

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.08.027

古塔的变形问题研究<sup>①</sup>

伍 亿

重庆电子工程职业学院, 重庆 401331

**摘要:** 根据检测得到的数据, 通过模型计算出古塔各层的中心坐标, 然后对中心线做拟合, 利用中心线的方向数对古塔的倾斜等现象进行了科学定量的分析和研究, 得到古塔的倾斜度约为  $0.66^\circ$ 。

**关键词:** 中心坐标; 倾斜度; 拟合

**中图分类号:** O1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2015)08-0163-06

某古塔已有上千年历史, 是我国重点保护文物. 古塔由于长时间承受自身质量、气温、风力等各种作用, 偶然还要受地震、飓风的影响, 古塔会产生各种变形, 诸如倾斜、弯曲等. 为保护古塔, 需适时对古塔进行观测, 了解各种变形量, 以制定必要的保护措施. 文物部门于 2011 年对该塔进行了观测, 获测量数据如表 1 所示. 根据表中数据分析该塔倾斜、弯曲等变形情况.

表 1 2011 年观测数据

层	点	坐 标			层	点	坐 标		
		$x/m$	$y/m$	$z/m$			$x/m$	$y/m$	$z/m$
1	1	565.454	528.012	1.792	8	1	565.77	526.397	33.383
	2	562.058	525.544	1.818		2	563.403	524.427	33.425
	3	561.39	521.447	1.783		3	563.158	521.382	33.424
	4	563.782	518.108	1.769		4	565.141	519.055	33.38
	5	567.941	517.407	1.772		5	568.164	518.59	33.305
	6	571.255	519.857	1.77		6	570.506	520.564	33.251
	7	571.938	523.953	1.794		7	570.862	523.591	33.279
	8	569.5	527.356	1.801		8	568.87	525.933	33.36
2	1	565.48	527.764	7.326	9	1	565.868	526.141	36.887
	2	562.238	525.364	7.351		2	563.674	524.268	36.929
	3	561.663	521.42	7.314		3	563.433	521.408	36.928
	4	564.001	518.226	7.301		4	565.333	519.263	36.884
	5	567.995	517.563	7.306		5	568.156	518.834	36.809
	6	571.165	519.961	7.304		6	570.333	520.686	36.755
	7	571.801	523.908	7.324		7	570.63	523.51	36.783
	8	569.414	527.141	7.336		8	568.747	525.701	36.864

① 收稿日期: 2013-10-21

基金项目: 重庆市高等教育教学改革研究一般项目资助(103433).

作者简介: 伍 亿(1968-), 女, 重庆市人, 主要从事教学管理与研究.

续表 1

层	点	坐 标			层	点	坐 标		
		$x/m$	$y/m$	$z/m$			$x/m$	$y/m$	$z/m$
3	1	565.506	527.52	12.761	10	1	565.961	525.9	40.201
	2	562.415	525.188	12.786		2	563.927	524.12	40.214
	3	561.931	521.394	12.749		3	563.693	521.433	40.244
	4	564.216	518.343	12.736		4	565.516	519.462	40.223
	5	568.048	517.716	12.741		5	568.148	519.068	40.171
	6	571.076	520.063	12.74		6	570.171	520.801	40.038
	7	571.666	523.864	12.758		7	570.408	523.433	40.129
	8	569.33	526.93	12.771		8	568.631	525.482	40.157
4	1	565.526	527.327	17.084	11	1	566.078	525.628	44.472
	2	562.555	525.047	17.109		2	564.193	523.95	44.485
	3	562.144	521.373	17.072		3	563.958	521.463	44.505
	4	564.387	518.435	17.059		4	565.649	519.607	44.486
	5	568.091	517.838	17.064		5	568.094	519.242	44.442
	6	571.005	520.144	17.063		6	570.013	520.885	44.309
	7	571.558	523.829	17.081		7	570.236	523.35	44.4
	8	569.263	526.762	17.094		8	568.615	525.259	44.428
5	1	565.548	527.119	21.726	12	1	566.195	525.355	48.743
	2	562.706	524.896	21.751		2	564.459	523.78	48.756
	3	562.373	521.351	21.714		3	564.224	521.492	48.776
	4	564.571	518.534	21.701		4	565.782	519.753	48.757
	5	568.136	517.969	21.705		5	568.039	519.415	48.713
	6	570.929	520.232	21.708		6	569.854	520.969	48.58
	7	571.443	523.791	21.723		7	570.063	523.268	48.671
	8	569.191	526.581	21.736		8	568.598	525.037	48.699
6	1	565.57	526.915	26.267	13	1	566.308	525.092	52.866
	2	562.854	524.748	26.309		2	564.716	523.616	52.878
	3	562.6	521.329	26.308		3	564.481	521.521	52.897
	4	564.752	518.632	26.264		4	565.91	519.893	52.88
	5	568.18	518.095	26.189		5	571.0345	523.630	26.182
	6	570.857	520.315	26.136		6	569.701	521.05	52.703
	7	571.333	523.755	26.164		7	569.897	523.188	52.794
	8	569.121	526.406	26.244		8	568.582	524.822	52.822
7	1	565.671	526.652	29.869	塔尖	1	567.255	522.238	55.128
	2	563.132	524.585	29.911		2	567.235	522.242	55.108
	3	562.883	521.356	29.91		3	567.247	522.251	55.128
	4	564.949	518.846	29.866		4	567.252	522.244	55.129
	5	568.172	518.346	29.791					
	6	570.679	520.441	29.737					
	7	571.094	523.672	29.765					
	8	568.994	526.167	29.846					

## 1 问题分析

先确定各层中心点的坐标. 设各层中心位置为  $O(x_0, y_0, z_0)$ , 则中心点到各检测点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  的距离  $d_{oi}$  应尽可能均衡; 对均衡度的衡量定义为最小距离  $d_{\min} = \min(d_{oi})$  与最大距离  $d_{\max} = \max(d_{oi})$  之比应尽可能大<sup>[1-2]</sup>, 即  $\max\left(\frac{d_{\min}}{d_{\max}}\right)$ , 以此作为确定中心坐标模型的目标函数, 结合相关的条件构造确定中心坐标的数学模型. 通过编程可计算出各层的中心坐标.

古塔的中心线集中了古塔的重要信息, 通过线性拟合中心线, 中心线拟合直线的方向数  $(m, n, p)$  与向量  $(0, 0, 1)$  的夹角就是古塔的倾斜度. 通过对中心线做直线拟合, 确定各层中心点处的曲率, 以各层中心点处曲率的平均值来衡量古塔的弯曲程度.

## 2 确定古塔各层中心位置的数学模型

### 2.1 目标函数的确定

设各层中心位置为  $O(x_0, y_0, z_0)$ , 则中心点到各检测点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  的距离  $d_{oi}$  应尽可能均衡, 如图 1 所示.

对均衡度的衡量定义为最小距离  $d_{\min} = \min(d_{oi})$  与最大距离  $d_{\max} = \max(d_{oi})$  之比应尽可能大, 即

$$\max\left(\frac{d_{\min}}{d_{\max}}\right)$$

此式即为确定中心坐标模型的目标函数.

### 2.2 约束条件的确定

对于所给定的检测点  $M_i(x_i, y_i, z_i) \quad i=1, 2, \dots, n$ , 令:

$$a_1 = \min\{x_i\}, \quad a_2 = \max\{x_i\}$$

$$b_1 = \min\{y_i\}, \quad b_2 = \max\{y_i\}$$

$$c_1 = \min\{z_i\}, \quad c_2 = \max\{z_i\}$$

则中心点  $O(x_0, y_0, z_0)$  的范围:

$$a_1 \leq x_0 \leq a_2, \quad b_1 \leq y_0 \leq b_2, \quad c_1 \leq z_0 \leq c_2$$

中心点  $O(x_0, y_0, z_0)$  到各检测点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  的距离  $d_{oi}$ :

$$d_{oi} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

### 2.3 模型的建立

由前面的分析可知, 中心位置的确定归结为如下优化模型:

求  $O(x_0, y_0, z_0)$  满足:

$$\max(d) = \frac{d_{\min}}{d_{\max}}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} d_{oi} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} \\ a_1 \leq x_0 \leq a_2 \\ b_1 \leq y_0 \leq b_2 \\ c_1 \leq z_0 \leq c_2 \\ d_{\min} = \min(d_{oi}) \\ d_{\max} = \max(d_{oi}) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

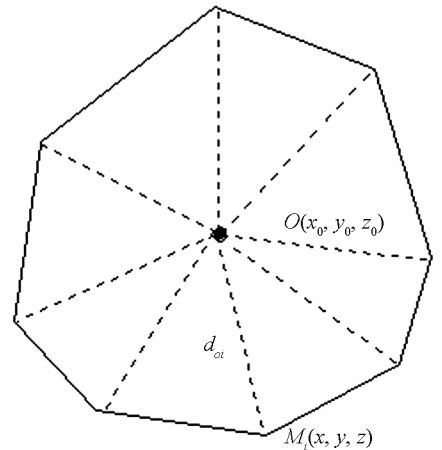


图 1 中心点位置图

## 2.4 模型的求解

采用搜索法找中心点, 求解算法<sup>[3]</sup>如下:

1) 初始化:  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0, d = 0$

2) 在空间区域:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}$$

中找一点  $P(x, y, z)$ .

3) 计算点  $P(x, y, z)$  到各检测点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  的距离  $d_{oi}$

$$d_{oi} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4) 确定  $d_{oi}$  的最小值与最大值, 并计算二者之比

$$d_{\min} = \min(d_{oi}) \quad d_{\max} = \max(d_{oi})$$

$$d_0 = \frac{d_{\min}}{d_{\max}}$$

5) 判断

如果  $d_0 > d$ , 则记录:  $x_0 \leftarrow x, y_0 \leftarrow y, z_0 \leftarrow z$ , 然后转到 6), 否则直接转到 6).

6) 改变自变量的值

$$x \leftarrow x + \Delta x, y \leftarrow y + \Delta y, z \leftarrow z + \Delta z$$

若  $(x, y, z) \notin \Omega$ , 则转(7), 否则转(3)

7) 输出中心点坐标:  $O(x_0, y_0, z_0)$

## 2.5 求解结果

用 MATLAB 编程求解, 得各层的中心坐标如表 2 所示.

表 2 古塔检测年各层中心坐标

层	$x_0/m$	$y_0/m$	$z_0/m$	层	$x_0/m$	$y_0/m$	$z_0/m$
第 1 层	566.69	522.707	1.769	第 8 层	567.008	522.49	33.251
第 2 层	566.713	522.663	7.351	第 9 层	567.033	522.484	36.755
第 3 层	566.781	522.616	12.786	第 10 层	567.043	522.468	40.038
第 4 层	566.844	522.588	17.109	第 11 层	567.108	522.442	44.309
第 5 层	566.873	522.569	21.751	第 12 层	567.174	522.415	48.73
第 6 层	566.9	522.545	26.136	第 13 层	567.231	522.393	52.853
第 7 层	566.933	522.496	29.737	塔尖	567.255	522.248	55.128

## 3 古塔倾斜分析

建筑物的倾斜指的是在外界因素影响之下, 建筑物发生倾斜的现象. 由于中心线集中了古塔的重要信息, 所以通过中心线来分析古塔的倾斜度.

### 3.1 中心点的线性拟合直线

中心点线性拟合直线的求法<sup>[4]</sup>如下:

1) 确定中心点  $O_i(x_{oi}, y_{oi}, z_{oi})$  在  $xoz$  面上的投影点  $O'_i(x_{oi}, 0, z_{oi})$ .

2) 对在  $xoz$  面上的投影点  $O'_i(x_{oi}, 0, z_{oi})$  做线性拟合, 得拟合直线:

$$x = f(z)$$

此拟合直线在空间中表示一平面.

3) 确定中心点  $O_i(x_{oi}, y_{oi}, z_{oi})$  在  $yozy$  面上的投影点  $O'_i(0, y_{oi}, z_{oi})$ .

4) 对在  $yozy$  面上的投影点  $O'_i(0, y_{oi}, z_{oi})$  做线性拟合, 得拟合直线:

$$y = g(z)$$

此拟合直线在空间中表示一平面.

5) 中心点在空间中的线性拟合直线可表示为

$$L: \begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}$$

即两平面的交线.

6) 中心点的线性拟合直线的方向数

在拟合直线  $L$  上任取两点  $N_i(x_i, y_i, z_i), N_j(x_j, y_j, z_j)$ , 拟合直线  $L$  的方向向量为:  $\mathbf{m} = (x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)$

### 3.2 中心点的线性拟合结果

根据表 2 中各层中心点的坐标, 对中心线做线性拟合.

用 MATLAB 语言编程可求得, 图 2 是中心点在  $xoz$  面和  $yoz$  面上投影的拟合直线<sup>[5]</sup>.

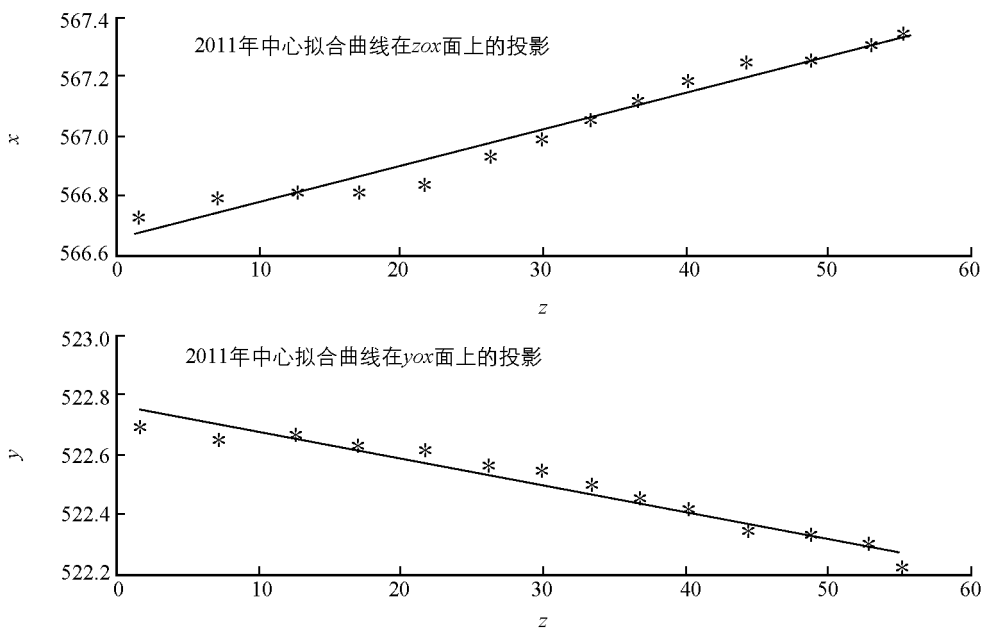


图 2 中心点在  $xoz$  面、 $yoz$  面上投影的拟合直线

古塔各层中心点的拟合直线如下

$$L: \begin{cases} x = 0.0107z + 566.6427 \\ y = -0.0068z + 522.7154 \end{cases}$$

其方向数为:  $(0.0122, -0.0089, 1)$

### 3.3 古塔的倾斜度

如图 3 所示,  $OA$  是竖直方向, 即古塔未发生倾斜时的中心线,  $OB$  是古塔发生倾斜后的中心线的拟合直线, 其二者的夹角为  $\theta$ , 把  $\theta$  定义为古塔的倾斜度. 倾斜度的计算公式如下:

$$\theta = \arccos \frac{|\vec{OA} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} \quad (1)$$

古塔竖直方向的向量可设为

$$\vec{OA} = (0, 0, 1)$$

中心线拟合直线的方向数为

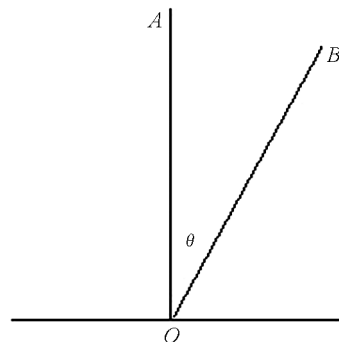


图 3 古塔倾斜角度

$$\vec{OB} = (m, n, p) = (0.012\ 2, -0.008\ 9, 1)$$

由公式 1 得古塔倾斜度

$$\theta = \arccos \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \arccos \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = 0.011\ 51 \approx 0.659\ 5^\circ$$

即古塔在 2011 年的倾斜度约  $0.659\ 5^\circ$

综上所述,通过对古塔的检测数据,求出各层中心坐标,利用中心坐标拟合中心线,对古塔的倾斜做科学定量的分析.若多检测几年的数据,可作出古塔的倾斜、弯曲等变形的走势,从而可预测古塔在未来一段时间内的变化情况,以便采取相应的措施,及时对古塔进行维护和保养,实现对古塔文物的保护.

#### 参考文献:

- [1] 陈正阳,曹传芬,郑 军.工程建筑物变形观测精度和观测方法 [J].中外建筑,2003(6):93-96.
- [2] 龚建伍,郭金芳,徐礼华,等.工程建筑物变形观测若干问题探讨 [J].勘察科学技术,2003(6):24-26.
- [3] 赵 静,但 琦.数学建模与数学实验 [M].北京:高等教育出版社,2009:182-184.
- [4] 王世杰,杨国林.工程建筑物变形监测技术研究综述 [J].矿山测量,2009(6):74-777.
- [5] 林 勋.建筑物变形监测的综合研究 [J].长春工程学院学报:自然科学版,2005,6(2):45-48.

## Study on Deformation of an Ancient Tower

WU Yi

Chongqing College of Electronic and Engineering, Chongqing 401331, China

**Abstract:** Based on the data detected, central coordinates of various floors of the tower are computed via the model. Then a central line is fitted and a quantitative analysis is made of the leaning and other phenomena of the old tower with the direction ratio of the central line. Based on the calculation, the obliquity of the old tower is found to be about  $0.66^\circ$ .

**Key words:** center coordinate; obliquity; fitting

责任编辑 汤振金

