第 37 卷第 9 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2015 年 9 月
Vol. 37　No. 9　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Sep.　2015

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.09.012

Banach 空间中非凸广义方程的度量次正则性[①]

杨明歌[1,2]，　廖开方[3]

1. 复旦大学 管理学院，上海 200433；2. 上海大学 管理学院，上海 200444；
3. 洛阳师范学院数学科学学院，河南 洛阳 471022

摘要：利用 Ekeland 变分原理、Clarke 上导数和 Clarke 次微分，在一般的 Banach 空间中给出非凸广义方程的度量次正则性成立的充分条件，所得结果改进了相关文献中的结果.

关　键　词：Ekeland 变分原理；Clarke 上导数；Clarke 次微分；度量次正则性

中图分类号：**O224**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673－9868(2015)09－0077－05

本文讨论广义方程

$$b \in F(x) \tag{1}$$

的度量次正则性，其中：$F：X \rightrightarrows Y$ 是闭集值映射；X,Y 是 Banach 空间；$b \in Y$. 根据文献[1]知，若存在 $k \in (0, +\infty)$ 使得对 $a \in F^{-1}(b)$ 附近的所有 x 均有

$$\operatorname{dist}(x, F^{-1}(b)) \leqslant k \operatorname{dist}(b, F(x))$$

成立，则称广义方程(1) 在 $a \in F^{-1}(b)$ 是度量次正则的. 这个性质可以用来估计 a 的邻域中的 x 与广义方程(1) 解集之间的距离. 给定集值映射 $M：Y \rightrightarrows X$ 和$(b, a) \in \operatorname{gph} M$，若存在 $L \in (0, +\infty)$ 使得对(b, a) 附近所有的$(y, x) \in \operatorname{gph} M$ 均有

$$\operatorname{dist}(x, M(b)) \leqslant L \| y - b \|$$

成立，则称 M 在(b, a) 是镇定的. 根据文献[2]，广义方程(1) 在 $a \in F^{-1}(b)$ 是度量次正则的等价于 M 在(b, a) 是镇定的. 度量次正则性和镇定性已经被许多学者广泛研究[2-7]. 最近，文献[3] 借助变分分析的技巧，在一般的 Banach 空间中给出非凸广义方程(1) 的度量次正则性成立的充分和必要条件. 文献[4] 借助 Fréchet 上导数，在 Asplund空间中研究集值隐函数定理，给出了非凸广义方程(1) 当 $b=0$ 时的度量次正则性成立的充分条件. 受上述研究的启发，我们进一步在 Banach 空间中研究非凸广义方程(1) 的度量次正则性成立的充分条件，以期改进文献[3－4] 中的相关结果.

除非特别说明，本文涉及的空间均为 Banach 空间，其范数用 $\|\cdot\|$ 表示. 对给定的空间 X，用 X^* 表示配备了弱* 拓扑 w^* 的对偶空间，且$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示典范偶对. 用 B_X 和 S_X 分别表示 Banach 空间 X 中的闭单位球和闭单位球面. 类似地，可以定义 X^* 中的闭单位球和闭单位球面. 中心为 x 且半径为 r 的闭球记为 $B(x, r)$.

设 A 是 X 的闭子集，$a \in A$，记 $T_c(a; A)$ 为 A 在 a 的 Clarke 切锥，即 $v \in T_c(a; A)$ 当且仅当对 A 中任意收敛序列$\{a_n\}$ 和$(0, +\infty)$ 中任意收敛序列$\{t_n\}$，若 $a_n \to a$，$t_n \to 0$，则存在 X 中的序列$\{v_n\}$，使得 $v_n \to v$ 且对任意 n 有 $a_n + t_n v_n \in A$. 记 $N_c(a; A)$ 为 A 在 a 的 Clarke 正规锥，即

$$N_c(a; A) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, h\rangle \leqslant 0, \ \forall h \in T_c(a; A)\}$$

---

① 收稿日期：2014－06－11
基金项目：国家自然科学基金(11226228)；中国博士后科学基金资助项目(2014M551312)；河南省高等学校重点科研项目(15A110036).
作者简介：杨明歌(1982－)，女，河南洛阳人，副教授，主要从事优化理论及应用的研究.

设 F：$X \rightrightarrows Y$ 是拓扑空间 X,Y 之间的集值映射，记

$$\operatorname{dom} F=\{x \in X \mid F(x) \neq \varnothing\} \qquad \operatorname{rge} F=\{y \in Y \mid \exists x \text{ 使得 } y \in F(x)\}$$

分别为 F 的定义域和值域. 集值映射 F：$X \rightrightarrows Y$ 由它的图像

$$\operatorname{gph} F=\{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

唯一决定. 若 $\operatorname{gph} F$ 是 $X \times Y$ 的闭子集，则称 F 是闭的. 任给 $(x, y) \in \operatorname{gph} F$，$F$ 在 (x, y) 的 Clarke 上导数 $D_c{}^* F(x, y)$ 定义为：

$$D_c{}^* F(x, y)(y^*)=\{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N_c((x, y); \operatorname{gph} F)\} \qquad \forall y^* \in Y^*$$

关于上导数的更多知识可参见文献[8-9].

设 φ：$X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是广义实值函数，记

$$\operatorname{dom} \varphi=\{x \in X \mid \varphi(x)<\infty\} \qquad \operatorname{epi} \varphi=\{(x, \mu) \in X \times \mathbb{R} \mid \mu \geqslant \varphi(x)\}$$

分别为 φ 的定义域和上图. 若对所有的 $x \in X$，均有 $\varphi(x)>-\infty$ 且 $\operatorname{dom} \varphi \neq \varnothing$，则称 φ 是正常的. 设 $|\varphi(\bar{x})|<\infty$，若 $\liminf\limits_{x \rightarrow \bar{x}} \varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x})$，则称 φ 在 $\bar{x}$ 是下半连续的. 设 $x \in \operatorname{dom} \varphi$，$h \in X$，令 $\varphi^{\uparrow}(x, h)$ 表示广义方向导数[10]，即

$$\varphi^{\uparrow}(x, h)=\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{z \xrightarrow{\varphi} x} \sup_{t \downarrow 0} \inf_{w \in h+\varepsilon B_X} \frac{\varphi(z+t w)-\varphi(z)}{t}$$

其中 $z \xrightarrow{\varphi} x$ 表示 $z \rightarrow x$ 且 $\varphi(z) \rightarrow \varphi(x)$. 令 $\partial_c \varphi(x)$ 表示 φ 在 x 的 Clarke-Rockafellar 次微分，即

$$\partial_c \varphi(x)=\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, h\rangle \leqslant \varphi^{\uparrow}(x, h),\ \forall h \in X\}$$

若 φ 是凸的，则 Clarke-Rockafellar 次微分退化为凸分析中的次微分，即

$$\partial_c \varphi(x)=\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y-x\rangle \leqslant \varphi(y)-\varphi(x),\ \forall y \in X\} \qquad \forall x \in \operatorname{dom} \varphi$$

众所周知，

$$\partial_c \varphi(x)=\{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N_c((x, \varphi(x)); \operatorname{epi} \varphi)\} \qquad \forall x \in \operatorname{dom} \varphi$$

任给 X 的子集 A，令 δ_A 表示 A 的示性函数，即

$$\delta_A(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x \in A \\ \infty & \text{当 } x \notin A\end{cases}$$

显然 $\partial_c \delta_A(a)=N_c(a; A)$. 令 J 表示 Banach 空间 Y 的正规对偶映射，即

$$J(y)=\{y^* \in S_{Y^*} \mid \langle y^*, y\rangle=\|y\|\} \qquad \forall y \in Y \backslash\{0\}$$

则

$$J(y)=\partial_c\|\cdot\|(y) \qquad \forall y \in Y \backslash\{0\}$$

引理 1[8] 设 (X, d) 是完备度量空间，φ：$X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是正常下有界的下半连续函数. 令 $\varepsilon>0$，$x_0 \in X$ 满足 $\varphi(x_0) \leqslant \inf\limits_X \varphi+\varepsilon$. 则对任意 $\lambda>0$，存在 $\bar{x} \in X$，满足

(a) $\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(x_0)$，

(b) $d(\bar{x}, x_0) \leqslant \lambda$，

(c) $\varphi(x)+\dfrac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \bar{x})>\varphi(\bar{x})$，$\forall x \neq \bar{x}$.

引理 2[10] 设 X 是 Banach 空间，φ_1,φ_2：$X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是正常下半连续函数，$x \in \operatorname{dom} \varphi_1 \cap \operatorname{dom} \varphi_2$ 是 $\varphi_1+\varphi_2$ 的局部极小值点，φ_1 或 φ_2 在 x 是局部 Lipschitz 的，则

$$0 \in \partial_c \varphi_1(x)+\partial_c \varphi_2(x)$$

定理 1 设 X,Y 是 Banach 空间，F：$X \rightrightarrows Y$ 是闭集值映射，$\bar{x} \in X$，$b \in F(\bar{x})$. 若存在常数 $r>0$ 使得对任意的 $\delta>0$，

$$k_r=\lim_{\delta \downarrow 0} \inf\{\|x^*\| \mid x^* \in D_c^* F(x, y)(y^*),\ x \in B(\bar{x}, r) \backslash F^{-1}(b),$$
$$y \in \prod\nolimits_\delta(b; F(x)) \cap B(b, r),\ y^* \in J_\delta(y-b)\}>0$$

其中：

$$\prod\nolimits_{\delta}(b;F(x))=\{y\in F(x)\mid \|y-b\|\leqslant \operatorname{dist}(b,F(x))+\delta\},$$
$$J_{\delta}(y-b)=\{y^{*}\in S_{Y^{*}}\mid \operatorname{dist}(y^{*},J(y-b))\leqslant\delta\}$$

则对任意的 $s\in\left(0,\min\left\{\frac{r}{2},\frac{r}{k_r}\right\}\right)$，有

$$\operatorname{dist}(x,F^{-1}(b))\leqslant\frac{1}{k_r}\operatorname{dist}(b,F(x))\qquad \forall x\in B(\bar{x},s) \tag{2}$$

证　假设存在 $s\in\left(0,\min\left\{\frac{r}{2},\frac{r}{k_r}\right\}\right)$ 使得(2)式不成立，即存在 $x_0\in B(\bar{x},s)$ 使得

$$\operatorname{dist}(x_0,F^{-1}(b))>\frac{1}{k_r}\operatorname{dist}(b,F(x_0))$$

定义 $\varepsilon=\operatorname{dist}(b,F(x_0))$ 和 $\lambda=\varepsilon k^{-1}$，其中 $k\in(0,k_r)$ 且满足

$$\operatorname{dist}(x_0,F^{-1}(b))>\frac{1}{k}\operatorname{dist}(b,F(x_0))=\lambda \tag{3}$$

注意到

$$\operatorname{dist}(x_0,F^{-1}(b))\leqslant\|x_0-\bar{x}\|\leqslant s \tag{4}$$

由(3)和(4)式得 $0<\varepsilon<ks<k_r s<r$. 任取 $\alpha\in(0,r-ks)$，则存在 $y_0\in F(x_0)$ 满足

$$\|y_0-b\|<\operatorname{dist}(b,F(x_0))+\alpha=\varepsilon+\alpha<ks+\alpha<r \tag{5}$$

定义函数 $\varphi:X\times Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ 如下：

$$\varphi(x,y)=\|y-b\|+\delta_{\operatorname{gph}F}(x,y)\qquad\forall(x,y)\in X\times Y$$

则 φ 在 $X\times Y$ 上是下半连续的. 由(5)式得

$$\varphi(x_0,y_0)=\|y_0-b\|<\varepsilon+\alpha+\inf_{(x,y)\in X\times Y}\varphi(x,y)$$

在乘积空间 $X\times Y$ 中使用范数 $\|(x,y)\|_{\eta}=\|x\|+\eta\|y\|$，其中 $\eta>0$ 是常数. 由引理 1 中的 Ekeland 变分原理，存在$(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$ 满足

$$\varphi(\hat{x},\hat{y})\leqslant\varphi(x_0,y_0)\qquad\|(\hat{x},\hat{y})-(x_0,y_0)\|_{\eta}\leqslant\lambda$$

和

$$\varphi(\hat{x},\hat{y})\leqslant\varphi(x,y)+\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}\|(\hat{x},\hat{y})-(x,y)\|_{\eta}\qquad\forall(x,y)\in X\times Y$$

从而$(\hat{x},\hat{y})\in\operatorname{gph}F$，

$$\|\hat{y}-b\|\leqslant\|y_0-b\|<r,\ \|\hat{x}-x_0\|+\eta\|\hat{y}-y_0\|\leqslant\lambda \tag{6}$$

且

$$\|\hat{y}-b\|\leqslant\|y-b\|+\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}(\|x-\hat{x}\|+\eta\|y-\hat{y}\|)+\delta_{\operatorname{gph}F}(x,y)\qquad\forall(x,y)\in X\times Y \tag{7}$$

由(3)和(6)式得

$$\|\hat{x}-x_0\|\leqslant\lambda<\operatorname{dist}(x_0,F^{-1}(b))$$

这意味着 $\hat{x}\notin F^{-1}(b)$ 和 $\hat{y}\neq b$. 由(4)式得

$$\|\hat{x}-\bar{x}\|\leqslant\|\hat{x}-x_0\|+\|x_0-\bar{x}\|<\operatorname{dist}(x_0,F^{-1}(b))+s\leqslant 2s<r$$

定义 $\psi:X\times Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ 如下：

$$\psi(x,y)=\|y-b\|+\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}(\|x-\hat{x}\|+\eta\|y-\hat{y}\|)\qquad\forall(x,y)\in X\times Y$$

由(7)式可知，$(\hat{x},\hat{y})$ 是函数 $\psi+\delta_{\operatorname{gph}F}$ 在 $X\times Y$ 上的极小值点. 注意到 $\hat{y}\neq b$，由引理 2 得

$$(0,0)\in\partial_c\psi(\hat{x},\hat{y})+\partial_c\delta_{\operatorname{gph}F}(\hat{x},\hat{y})=\{0\}\times J(\hat{y}-b)+\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}(B_{X^{*}}\times\eta B_{Y^{*}})+N_c((\hat{x},\hat{y});\operatorname{gph}F)$$

故存在 $y_1^* \in J(\hat{y}-b)$ 和 $(x_2^*, y_2^*) \in B_{X^*} \times B_{Y^*}$ 使得

$$\left(\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^*, -y_1^*-\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right) \in N_c((\hat{x}, \hat{y}); \operatorname{gph} F)$$

令

$$\tilde{x}^* = \frac{\dfrac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^*}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|}$$

$$\tilde{y}^* = \frac{y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|}$$

则 $(\tilde{x}^*, -\tilde{y}^*) \in N_c((\hat{x}, \hat{y}); \operatorname{gph} F)$，故 $\tilde{x}^* \in D_c{}^* F(\hat{x}, \hat{y})(\tilde{y}^*)$. 任取 $y \in F(\hat{x})$，由(7)式得

$$\|\hat{y}-b\| \leqslant \|y-b\| + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|y-\hat{y}\| \leqslant \left(1+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\right)\|y-b\| + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|\hat{y}-b\|$$

从而

$$\|\hat{y}-b\| \leqslant \left(1+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\right)\operatorname{dist}(b, F(\hat{x})) + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|\hat{y}-b\|$$

故

$$\|\hat{y}-b\| \leqslant \operatorname{dist}(b, F(\hat{x})) + \frac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda-(\varepsilon+\alpha)\eta}\operatorname{dist}(b, F(\hat{x})) \tag{8}$$

进一步，我们有

$$\|\tilde{x}^*\| = \frac{\left\|\dfrac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^*\right\|}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|} \leqslant \frac{(\varepsilon+\alpha)k}{\varepsilon}\left[1-\frac{(\varepsilon+\alpha)k\eta}{\varepsilon}\right]^{-1} \tag{9}$$

和

$$\|\tilde{y}^*-y_1^*\| = \left\| \frac{y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|} - y_1^* \right\| =$$

$$\frac{\left\|\left(1-\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|\right)y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|} \leqslant$$

$$\frac{\left|1-\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|\right| + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}{1-\dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}} \leqslant$$

$$\frac{\dfrac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}{1-\dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}} = \frac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda-(\varepsilon+\alpha)\eta} \tag{10}$$

由上述(8),(9)和(10)式可得，对任意的 $\delta>0$，只要 α, η 选得足够小，就有

$$\hat{y} \in \prod\nolimits_{\delta}(b; F(\hat{x})) \qquad \|\tilde{x}^*\| < k+\delta \qquad \tilde{y}^* \in J_{\delta}(\hat{y}-b)$$

成立. 在上式中取 $\delta \downarrow 0$，则 $\|\tilde{x}^*\| \leqslant k < k_r$，与 k_r 的定义矛盾. 证毕.

注 文献[4]定理3.1与定理1类似. 然而，文献[4]定理3.1是建立在Asplund空间中，使用的是

Fréchet 上导数，且考虑的是$b=0$的特殊情况. 而定理1是建立在一般的Banach空间中，且使用的是Clarke上导数. 进一步，文献[3]定理3.2与定理1类似，均是建立在一般的Banach空间中，且使用的是Clarke上导数. 然而，由于$\frac{r}{2+k_r}<\min\left\{\frac{r}{2},\frac{r}{k_r}\right\}$，所以文献[3]定理3.2中$x$的取值范围严格小于定理1中$x$的取值范围，故文献[3]定理3.2为定理1特例.

参考文献：

[1] DONTCHEV A L，ROCKAFELLAR R T. Regularity and Conditioning of Solution Mappings in Variational Analysis [J]. Set-Valued Anal，2004，12(1/2)：79－109.

[2] HENRION R，OUTRATA J. Calmness of Constraint Systems with Applications [J]. Math Program，2005，104(2/3)：437－464.

[3] ZHENG X Y，NG K F. Metric Subregularity and Calmness for Nonconvex Generalized Equations in Banach Spaces [J]. SIAM J Optim，2010，20(5)：2119－2136.

[4] NGHIA T T A. A Note on Implicit Multifunction Theorems [J]. Optim Lett，2014，8(1)：329－341.

[5] BURKE J V，DENG S. Weak Sharp Minima Revisited，Part III：Error Bounds for Differentiable Convex Inclusions [J]. Math Program，2009，116(1/2)：37－56.

[6] IOFFE A D，OUTRATA J V. On Metric and Calmness Qualification Conditions in Subdifferential Calculus [J]. Set-Valued Anal，2008，16(2/3)：199－227.

[7] LEDYAEV Y S，ZHU Q J. Implicit Multifunction Theorems [J]. Set-Valued Anal，1999，7(3)：209－238.

[8] MORDUKHOVICH B H. Variational Analysis and Generalized Differentiation，Vol. I：Basic Theory [M]. Berlin：Springer，2006.

[9] MORDUKHOVICH B H. Variational Analysis and Generalized Differentiation，Vol. II：Applications [M]. Berlin：Springer，2006.

[10] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis [M]. New York：Wiley，1983.

Metric Subregularity of Nonconvex Generalized Equations in Banach Spaces

YANG Ming-ge[1,2]，　LIAO Kai-fang[3]

1. School of Management，Fudan University，Shanghai 200433，China；

2. School of Management，Shanghai University，Shanghai 200444，China；

3. College of Mathematics Science，Luoyang Normal University，Luoyang Henan 471022，China

Abstract：Using the Ekeland variational principle，the Clarke coderivative and the Clarke subdifferential，we give the sufficient conditions for the metric subregularity of nonconvex generalized equations in general Banach spaces. The results presented in this paper improve some corresponding results in the literature.

Key words：Ekeland variational principle；Clarke coderivative；Clarke subdifferential；metric subregularity

责任编辑　张　构