第 37 卷第 9 期 西 南 大 学 学 报 (自然科学版) 2015 年 9 月
Vol. 37 No. 9 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Sep. 2015

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.09.013

带借贷利率及干扰的双到达过程风险模型①

魏广华[1,2], 高启兵[3], 刘国祥[3], 王晓谦[3]

1. 金陵科技学院 基础部, 南京 211169; 2. 河海大学 水文水资源学院, 南京 211100;
3. 南京师范大学 数学科学学院, 南京 210097

摘要: 考虑了带借贷利率及干扰的双到达过程风险模型, 借助全概率公式、微分和伊藤积分等知识, 分别获得了无限时破产概率积分微分方程和有限时破产概率的积分偏微分方程. 当索赔服从指数分布时, 得到了无限时破产概率的微分方程.

关 键 词: 借贷; 双到达风险模型; 布朗运动; 破产概率; 积分微分方程; 积分偏微分方程

中图分类号: O211.9 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2015)09-0082-12

近几年来, 风险理论研究中绝对破产概率问题得到广泛关注, 越来越多学者开始研究各种风险模型下的绝对破产问题[1-9], 并考虑利率等问题[10]. 文献[8]考虑更实际的风险模型, 研究带借贷及干扰的复合泊松盈余过程. 当盈余是负的或公司财政赤字时, 保险公司以一定利率借钱支付所发生的索赔, 这样继续经营它的业务, 与此同时, 保险公司通过不断的保费收入偿还债务, 因此, 保险公司的盈余可以回到正的水平. 然而当盈余低于某一特定值时, 盈余不可能回到正的水平, 此时绝对破产概率发生了. 文献[8]获得破产概率的积分微分方程, 而文献[7]讨论了双到达带索赔成本风险模型, 获得破产概率的上界. 本文推广上述风险模型, 考虑带借贷及干扰的双到达过程风险模型.

记

$$\begin{aligned} U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j + \sigma W(t) = \\ u + ct - S_1(t) - S_2(t) + \sigma W(t) \qquad t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

此处:

1) u 是初始准备金, c 是保险公司单位时间征收的保险费率;

2) $\{X, X_i, i=1,2,\cdots\}$ 是一独立同分布的非负随机变量序列, X 表示 A 险种的索赔额, 其分布为 G;

3) $\{M(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 α 的 Poisson 过程, 表示到时刻 t 为止 A 险种索赔发生的次数;

4) $\{Y, Y_j, j=1,2,\cdots\}$ 是一独立同分布的非负随机变量序列, Y 表示 B 险种的索赔额, 且其分布为 F;

5) $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 β 的 Poisson 过程, 表示到时刻 t 为止 B 险种索赔发生的次数;

6) $\{W(t), t \geqslant 0\}$ 是一标准布朗运动, σ 是一常数;

7) 由于各个保险过程和索赔是相互独立的, 设 $\{X_i, i=1,2,\cdots\}$, $\{Y_j, j=1,2,\cdots\}$, $\{M(t), t \geqslant 0\}$,

---

① 收稿日期: 2014-04-09
基金项目: 国家自然科学基金(61374080, 11271193, 11201199, 10671032, 10871001); 江苏高校自然科学研究项目(11KJB110005)资助.
作者简介: 魏广华(1979-), 男, 江苏建湖人, 副教授, 主要从事风险理论研究.

$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 以及 $\{W(t),t\geqslant 0\}$ 是相互独立的.

我们假设当公司盈余是负的或财政赤字时，可以允许公司以利息力 $\delta>0$ 进行借贷，然而当公司的盈余水平低于 $-\frac{c}{\delta}$ 时，绝对破产出现.

带借贷的双到达过程风险模型，即

$$\mathrm{d}U_\delta(t)=(c+\delta U_\delta(t)I(U_\delta(t)<0))\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W(t)-\mathrm{d}S_1(t)-\mathrm{d}S_2(t),\ U_\delta(0)=u \tag{2}$$

其中 $I(A)$ 是集合 A 上的示性函数. 设 T_δ 表示风险模型 (2) 的破产时刻，

$$T_\delta=\inf\left\{t\geqslant 0:U_\delta(t)<-\frac{c}{\delta}\right\}$$

且约定 $\inf\phi=\infty$；$\psi(u)$ 表示模型(2) 中初始资本为 u 的无限时破产概率，即

$$\psi(u)=Pr\{T_\delta<\infty\mid U_\delta(0)=u\},\ u>-\frac{c}{\delta},\ \psi\left(-\frac{c}{\delta}\right)=1$$

当盈余水平处于不同层次时，破产概率符合不同的积分微分方程，为了表述方便，当 $u\geqslant 0$ 时，记 $\psi(u)=\psi_+(u)$；当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，记 $\psi(u)=\psi_-(u)$.

设 T 表示风险模型 (1) 的破产时刻，$T=\inf\{t\geqslant 0:U(t)<0\}$；$\phi(u)$ 表示风险模型(1) 中初始资本为 u 的无限时破产概率，即

$$\phi(u)=Pr\{T<\infty\mid U_0=u\},\ u>0$$

显然当 $u\geqslant 0$ 时，$T\leqslant T_\delta$，$\psi_+(u)\leqslant\phi(u)$ 且 $\lim\limits_{u\to+\infty}\psi_+(u)=0$ 及 $0<\psi_+(u)\leqslant\phi(u)<1$.

众所周知，在带干扰的风险模型中，导致破产出现有两种可能：一是由于索赔引起的，二是由于干扰引起的. 因此无限时破产概率有以下分解：

$$\psi(u)=\psi_s(u)+\psi_{\mathrm{d}}(u),\ u\geqslant-\frac{c}{\delta}$$

其中：$\psi_s(u)$ 表示破产是由索赔引起的破产概率；$\psi_d(u)$ 表示破产是由干扰引起的破产概率，而且

$$\psi_d\left(-\frac{c}{\delta}\right)=\psi\left(-\frac{c}{\delta}\right)=1,\ \psi_s\left(-\frac{c}{\delta}\right)=0$$

类似地，当 $u\geqslant 0$ 时，记 $\psi_{s+}=\psi_s(u)$，$\psi_{d+}=\psi_d(u)$；当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，记 $\psi_{s-}=\psi_s(u)$，$\psi_{d-}=\psi_d(u)$.

类似于无限时的情况，定义有限时所有变量：

$$\psi(u,t),\ \psi_s(u,t),\ \psi_d(u,t),\ \psi_{s-}(u,t),\ \psi_{s+}(u,t)$$

$$\psi_{d-}(u,t),\ \psi_{d+}(u,t)$$

为了保证保险公司的稳定经营，假定保费收入的期望值大于总的索赔平均值，由此定义安全负荷条件为：

$$c>\alpha E(X)+\beta E(Y)$$

本文安排如下：第 1 节借助全概率公式、微分和伊藤公式分别得到 $\psi_s(u)$ 和 $\psi_d(u)$ 的积分微分方程，从而推出 $\psi(u)$ 的积分微分方程；第 2 节讨论当索赔都服从指数分布时，分别给出 $\psi_s(u)$，$\psi_d(u)$ 和 $\psi(u)$ 的微分方程；第 3 节讨论了有限时破产概率的积分偏微分方程.

1 无限时破产概率的积分微分方程

定理 1 假设 $\psi_s(u)$ 是二次连续可微的，当 $u\geqslant 0$ 时，则 $\psi_s(u)$ 符合下面积分微分方程：

$$c\psi_{s+}'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}''(u)=(\alpha+\beta)\psi_{s+}(u)-\alpha\left[\int_0^u\psi_{s+}(u-x)\mathrm{d}G(x)+B_{s_1}(u)\right]-$$

$$\beta\left[\int_0^u\psi_{s+}(u-y)\mathrm{d}F(y)+B_{s_2}(u)\right] \tag{3}$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，则 $\psi_s(u)$ 符合下面积分微分方程：

$$(u\delta+c)\psi_{s-}'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s-}''(u)=(\alpha+\beta)\psi_{s-}(u)-\alpha\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}(u+\frac{c}{\delta})\right]-\beta\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}(u+\frac{c}{\delta})\right] \tag{4}$$

边界条件为：

$$\begin{cases}\psi_{s-}\left(\dfrac{-c}{\delta}\right)=0\\ \dfrac{1}{2}\sigma^2\psi_{s-}''\left(-\dfrac{c}{\delta}\right)=-\alpha-\beta\\ \lim\limits_{u\to\infty}\psi_{s+}(u)=0\end{cases} \tag{5}$$

其中

$$B_{s_1}(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$

$$B_{s_2}(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right),\ u\geqslant 0$$

证　当 $u\geqslant 0$ 时，令 $H(t)=u+ct+\sigma W(t)$，则 $H(0)=u$ 且

$$\mathrm{d}H(t)=c\,\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t$$

由伊藤积分公式有

$$\mathrm{d}\psi_{s+}(H(t))=\left[c\psi_{s+}'(H(t))+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}''(H(t))\right]\mathrm{d}t+\sigma\psi_{s+}'(H(t))\mathrm{d}W_t$$

即

$$\psi_{s+}(H(t))-\psi_{s+}(u)=\int_0^t\left[c\psi_{s+}'(H(x))+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}''(H(x))\right]\mathrm{d}x+\int_0^t\sigma\psi_{s+}'(H(x))\mathrm{d}W_x$$

所以

$$E\left[\psi_{s+}(H(t))\right]-\psi_{s+}(u)=\int_0^t\left(cE[\psi_{s+}'(H(x))]+\frac{1}{2}\sigma^2E[\psi_{s+}''(H(x))]\right)\mathrm{d}x \tag{6}$$

在充分小的时间段 $(0,t]$ 内，考虑(2)式定义的风险过程 $U_\delta(t)$. 既然 $M(t)$ 和 $N(t)$ 都是 Poisson 过程，则在 $(0,t]$ 有以下 4 种可能情况：

1) $M(t)$ 和 $N(t)$ 都没有跳跃，其发生的概率为 $(1-\alpha t)(1-\beta t)+o(t)$.

2) $M(t)$ 有一个跳跃且 $N(t)$ 没有跳跃，其发生的概率为 $\alpha t(1-\beta t)+o(t)$.

3) $M(t)$ 没有跳跃且 $N(t)$ 有一个跳跃，其发生的概率为 $(1-\alpha t)\beta t+o(t)$.

4) $M(t)$（或者 $N(t)$）至少有两个跳跃或者 $M(t)$ 和 $N(t)$ 同时有跳跃，其发生的概率为 $o(t)$.

因此

$$\begin{aligned}\psi_{s+}(u)=&(1-\alpha t)(1-\beta t)E\left[\psi_{s+}(H(t))\right]+\alpha t(1-\beta t)E\\&\left[\int_0^{H(t)}\psi_{s+}(H(t)-x)\mathrm{d}G(x)+\int_{H(t)}^{H(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(t)-x)\mathrm{d}G(x)+\int_{H(t)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}G(x)\right]+\\&\beta t(1-\alpha t)E\left[\int_0^{H(t)}\psi_{s+}(H(t)-y)\mathrm{d}F(y)+\right.\\&\left.\int_{H(t)}^{H(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(t)-y)\mathrm{d}F(y)+\int_{H(t)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}F(y)\right]+o(t)\end{aligned}$$

等价地

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)tE\left[\psi_{s+}(H(t))\right]=E\left[\psi_{s+}(H(t))\right]-\psi_{s+}(u)+\\
&\alpha tE\left[\int_0^{H(t)}\psi_{s+}(H(t)-x)\mathrm{d}G(x)+\int_{H(t)}^{H(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(t)-x)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(H(t)+\frac{c}{\delta}\right)\right]+\\
&\beta tE\left[\int_0^{H(t)}\psi_{s+}(H(t)-y)\mathrm{d}F(y)+\int_{H(t)}^{H(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(t)-y)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(H(t)+\frac{c}{\delta}\right)\right]+o(t)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

在(7)式两边同时除以 t，令 $t\to 0$，同时利用(6)式则有

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)\psi_{s+}(u)=c\psi_{s+}^{'}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}^{''}(u)+\\
&\alpha\left[\int_0^u\psi_{s+}(u-x)\mathrm{d}G(x)+\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right]+\\
&\beta\left[\int_0^u\psi_{s+}(u-y)\mathrm{d}F(y)+\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right]
\end{aligned}
$$

所以(3)式成立.

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，令 $Y(t)=u\mathrm{e}^{\delta t}+ct+\sigma W_t$，则 $Y(0)=u$ 及 $\mathrm{d}Y(t)=(u\delta\mathrm{e}^{\delta t}+c)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t$.

由伊藤积分公式有：

$$
\mathrm{d}\psi_{s-}(Y(t))=\left[(u\delta\mathrm{e}^{\delta t}+c)\psi_{s-}(Y(t))+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s-}^{''}(Y(t))\right]\mathrm{d}t+\sigma\psi_{s-}^{'}(Y(t))\mathrm{d}W_t
$$

即

$$
\psi_{s-}(Y(t))-\psi_{s-}(u)=\int_0^t\left[(u\delta\mathrm{e}^{\delta x}+c)\psi_{s-}(Y(x))+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s-}^{''}(Y(x))\right]\mathrm{d}x+\int_0^t\sigma\psi_{s-}^{'}(Y(x))\mathrm{d}W_x
$$

所以

$$
E\left[\psi_{s-}(Y(t))\right]-\psi_{s-}(u)=\int_0^t((u\delta\mathrm{e}^{\delta x}+c)E[\psi_{s-}(Y(x))]+\frac{1}{2}\sigma^2E[\psi_{s-}^{''}(Y(x))])\mathrm{d}x \tag{8}
$$

利用同 $u\geqslant 0$ 时的讨论方法可得：

$$
\begin{aligned}
&\psi_{s-}(u)=(1-\alpha t)(1-\beta t)E\left[\psi_{s-}(Y(t))\right]+\alpha t(1-\beta t)E\\
&\left[\int_0^{Y(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(t)-x)\mathrm{d}G(x)+\int_{Y(t)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}G(x)\right]+\beta t(1-\alpha t)E\\
&\left[\int_0^{Y(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(t)-y)\mathrm{d}F(y)+\int_{Y(t)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}F(y)\right]+o(t)
\end{aligned}
$$

等价地

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)tE\left[\psi_{s-}(Y(t))\right]=E\left[\psi_{s-}(Y(t))\right]-\psi_{s-}(u)+\alpha tE\\
&\left[\int_0^{Y(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(t)-x)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}(Y(t)+\frac{c}{\delta})\right]+\beta tE\\
&\left[\int_0^{Y(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(t)-y)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}(Y(t)+\frac{c}{\delta})\right]+o(t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

在(9)式两边同时除以 t，令 $t\to 0$，同时利用(8)式则有

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)\psi_{s-}(u)=(u\delta+c)\psi_{s-}^{'}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s-}^{''}(u)+\\
&\alpha\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}(u+\frac{c}{\delta})\right]+
\end{aligned}
$$

$$\beta\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}(u+\frac{c}{\delta})\right]$$

所以(4)式成立.

在(4)式中，令 $u\downarrow-\frac{c}{\delta}$，得边界条件(5)式中的第(2)式.

定理 2　假设 $\psi_d(u)$ 是二次连续可微的，当 $u\geqslant 0$ 时，则 $\psi_d(u)$ 符合下面积分微分方程：

$$c\psi_{d+}'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{d+}''(u)=(\alpha+\beta)\psi_{d+}(u)-\alpha\left[\int_0^u\psi_{d+}(u-x)\mathrm{d}G(x)+B_{d_1}(u)\right]-\beta\left[\int_0^u\psi_{d+}(u-y)\mathrm{d}F(y)+B_{d_2}(u)\right]\tag{10}$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，则 $\psi_d(u)$ 符合下面积分微分方程：

$$(u\delta+c)\psi_{d-}'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{d-}''(u)=(\alpha+\beta)\psi_{d-}(u)-\alpha\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-x)\mathrm{d}G(x)\right]-\beta\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-y)\mathrm{d}F(y)\right]\tag{11}$$

边界条件为：

$$\begin{cases}\psi_{d-}\left(\frac{-c}{\delta}\right)=1\\ \frac{1}{2}\sigma^2\psi_{d-}''\left(-\frac{c}{\delta}\right)=\alpha+\beta\\ \lim\limits_{u\to\infty}\psi_{d+}(u)=0\end{cases}\tag{12}$$

其中

$$B_{d_1}(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-x)\mathrm{d}G(x)$$

$$B_{d_2}(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-y)\mathrm{d}F(y),\ u\geqslant 0$$

证　类似于定理 1.

推论 1　在定理 1 和定理 2 的条件下，当 $u>0$ 时，$\psi(u)$ 符合下面的积分微分方程：

$$c\psi'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''(u)=(\alpha+\beta)\psi(u)-\alpha\left[\int_0^u\psi(u-x)\mathrm{d}G(x)+B_1(u)\right]-\beta\left[\int_0^u\psi(u-y)\mathrm{d}F(y)+B_2(u)\right]\tag{13}$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，则 $\psi(u)$ 符合下面积分微分方程：

$$(u\delta+c)\psi'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''(u)=(\alpha+\beta)\psi(u)-\alpha\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-x)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}(u+\frac{c}{\delta})\right]-\beta\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-y)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right]\tag{14}$$

边界条件为：

$$\begin{cases} \psi_{-}\left(\dfrac{-c}{\delta}\right)=1 \\ \dfrac{1}{2}\sigma^2\psi_{-}^{''}\left(-\dfrac{c}{\delta}\right)=0 \\ \lim\limits_{u\to\infty}\psi_{+}(u)=0 \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$B_1(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-x)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$

$$B_2(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-y)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right),\ u\geqslant 0$$

证

$$\psi_d(u)+\psi_s(u)=\psi(u),\ \psi_d^{'}(u)+\psi_s^{'}(u)=\psi^{'}(u),\ \psi_d^{''}(u)+\psi_s^{''}(u)=\psi^{''}(u)$$

因此，根据(3)式和(10)式得(13)式，根据(4)式和(11)式得(14)式，根据(5)式和(12)式得(15)式.

2 索赔都服从指数情形

推论 2 若 G 服从参数为 λ_1 的指数分布，F 服从参数为 λ_2 的指数分布，则在定理 1 的条件下，当 $u\geqslant 0$ 时，$\psi_s(u)$ 满足：

$$(c\lambda_1\lambda_2-\alpha\lambda_2-\beta\lambda_1)\psi_{s+}^{'}(u)+\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_1\lambda_2+c(\lambda_1+\lambda_2)-\alpha-\beta\right)\psi_{s+}^{''}(u)+$$
$$\left(c+\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)\right)\psi_{s+}^{'''}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}^{''''}(u)=0 \tag{16}$$

当 $-\dfrac{c}{\delta}<u<0$ 时，$\psi_s(u)$ 满足：

$$\begin{aligned}&[(u\delta+c)\lambda_1\lambda_2-\alpha\lambda_2-\beta\lambda_1]\psi_{s-}^{'}(u)+\\&\left[\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)-\alpha-\beta+(u\delta+c)(\lambda_1+\lambda_2)\right]\psi_{s-}^{''}(u)+\\&\left[(u\delta+c)+\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)\right]\psi_{s-}^{'''}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s-}^{''''}(u)=0\end{aligned} \tag{17}$$

边界条件为：

$$\begin{cases} \psi_{s-}\left(\dfrac{-c}{\delta}\right)=0 \\ \dfrac{1}{2}\sigma^2\psi_{s-}^{''}\left(-\dfrac{c}{\delta}\right)=-\alpha-\beta \\ \lim\limits_{u\to\infty}\psi_{s+}(u)=0 \end{cases} \tag{18}$$

证 当 F 和 G 都是指数分布时，(3)式可化为：

$$\begin{aligned}&c\psi_{s+}^{'}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}^{''}(u)=(\alpha+\beta)\psi_{s+}(u)-\\&\alpha\left[\int_0^u\psi_{s+}(u-x)\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1x}\mathrm{d}x+\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x)\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1x}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-\lambda_1\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}\right]-\\&\beta\left[\int_0^u\psi_{s+}(u-y)\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2y}\mathrm{d}y+\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2y}\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-\lambda_2\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

在(19)式中，令 $x_1=u-x$，$y_1=u-y$，有

$$c\psi_{s+}'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}''(u)=(\alpha+\beta)\psi_{s+}(u)-$$

$$\alpha\left[\int_0^u\psi_{s+}(x_1)\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1(u-x_1)}\mathrm{d}x_1+\int_{-\frac{c}{\delta}}^0\psi_{s-}(x_1)\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1(u-x_1)}\mathrm{d}x_1+\mathrm{e}^{-\lambda_1\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}\right]-$$

$$\beta\left[\int_0^u\psi_{s+}(y_1)\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2(u-y_1)}\mathrm{d}y_1+\int_{-\frac{c}{\delta}}^0\psi_{s-}(y_1)\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2(u-y_1)}\mathrm{d}y_1+\mathrm{e}^{-\lambda_2\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}\right] \tag{20}$$

在(20)式两边同时对 u 求导有

$$c\psi_{s+}''(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}'''(u)=(\alpha+\beta)\psi_{s+}'(u)-$$

$$\alpha\left[\lambda_1\psi_{s+}(u)-\int_0^u\psi_{s+}(x_1)\lambda_1^2\mathrm{e}^{-\lambda_1(u-x_1)}\mathrm{d}x_1-\int_{-\frac{c}{\delta}}^0\psi_{s-}(x_1)\lambda_1^2\mathrm{e}^{-\lambda_1(u-x_1)}\mathrm{d}x_1-\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}\right]-$$

$$\beta\left[\lambda_2\psi_{s+}(u)-\int_0^u\psi_{s+}(y_1)\lambda_2^2\mathrm{e}^{-\lambda_2(u-y_1)}\mathrm{d}y_1-\int_{-\frac{c}{\delta}}^0\psi_{s-}(y_1)\lambda_2^2\mathrm{e}^{-\lambda_2(u-y_1)}\mathrm{d}y_1-\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}\right] \tag{21}$$

在(21)式两边同时对 u 求导有

$$c\psi_{s+}'''(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{s+}''''(u)=(\alpha+\beta)\psi_{s+}''(u)-$$

$$\alpha\left[\lambda_1\psi_{s+}'(u)-\lambda_1^2\psi_{s+}(u)+\int_0^u\psi_{s+}(x_1)\lambda_1^3\mathrm{e}^{-\lambda_1(u-x_1)}\mathrm{d}x_1+\int_{-\frac{c}{\delta}}^0\psi_{s-}(x_1)\lambda_1^3\mathrm{e}^{-\lambda_1(u-x_1)}\mathrm{d}x_1+\lambda_1^2\mathrm{e}^{-\lambda_1\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}\right]-$$

$$\beta\left[\lambda_2\psi_{s+}'(u)-\lambda_2^2\psi_{s+}(u)+\int_0^u\psi_{s+}(y_1)\lambda_2^3\mathrm{e}^{-\lambda_2(u-y_1)}\mathrm{d}y_1+\int_{-\frac{c}{\delta}}^0\psi_{s-}(y_1)\lambda_2^3\mathrm{e}^{-\lambda_2(u-y_1)}\mathrm{d}y_1+\lambda_2^2\mathrm{e}^{-\lambda_2\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}\right] \tag{22}$$

由(20)式，(21)式及(22)式，得(16)式. 利用同样的讨论方法可得(17)式.

推论 3　若 G 服从参数为 λ_1 的指数分布，F 服从参数为 λ_2 的指数分布，则在定理 2 的条件下，当 $u\geqslant 0$ 时，$\psi_d(u)$ 满足：

$$(c\lambda_1\lambda_2-\alpha\lambda_2-\beta\lambda_1)\psi_{d+}'(u)+\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_1\lambda_2+c(\lambda_1+\lambda_2)-\alpha-\beta\right)\psi_{d+}''(u)+$$

$$\left(c+\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)\right)\psi_{d+}'''(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{d+}''''(u)=0$$

当 $-\dfrac{c}{\delta}<u<0$ 时，$\psi_d(u)$ 满足：

$$[(u\delta+c)\lambda_1\lambda_2-\alpha\lambda_2-\beta\lambda_1]\psi_{d-}'(u)+\left[\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)-\alpha-\beta+(u\delta+c)(\lambda_1+\lambda_2)\right]\psi_{d-}''(u)+$$

$$\left[(u\delta+c)+\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)\right]\psi_{d-}'''(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{d-}''''(u)=0$$

边界条件为：

$$\begin{cases}\psi_{d-}\left(\dfrac{-c}{\delta}\right)=1\\[2mm] \dfrac{1}{2}\sigma^2\psi_{d-}''\left(-\dfrac{c}{\delta}\right)=\alpha+\beta\\[2mm] \lim\limits_{u\to\infty}\psi_{d+}(u)=0\end{cases}$$

证　类似于推论 2.

推论 4　在推论 2 和推论 3 条件下，当 $u\geqslant 0$ 时，$\psi(u)$ 满足：

$$(c\lambda_1\lambda_2-\alpha\lambda_2-\beta\lambda_1)\psi'(u)+\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda_1\lambda_2+c(\lambda_1+\lambda_2)-\alpha-\beta\right)\psi''(u)+$$

$$\left(c+\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)\right)\psi'''(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''''(u)=0$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，$\psi(u)$ 满足

$$[(u\delta+c)\lambda_1\lambda_2-\alpha\lambda_2-\beta\lambda_1]\psi'(u)+\left[\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)-\alpha-\beta+(u\delta+c)(\lambda_1+\lambda_2)\right]\psi''(u)+$$
$$\left[(u\delta+c)+\frac{1}{2}\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2)\right]\psi'''(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''''(u)=0$$

边界条件为

$$\begin{cases}\psi_-\left(\frac{-c}{\delta}\right)=1\\ \frac{1}{2}\sigma^2\psi''_-\left(-\frac{c}{\delta}\right)=0\\ \lim\limits_{u\to\infty}\psi_+(u)=0\end{cases}$$

证 类似于推论 1.

3 有限时破产概率的积分偏微分方程

定理 3 假设 $\psi_s(u,t)$ 对 u 是二次连续可微的，对 t 是一次连续可微的. 当 $u\geqslant 0$，$\psi_s(u,t)$ 符合下面的偏微分积分方程：

$$c\frac{\partial\psi_{s+}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s+}(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s+}(u,t)}{\partial u^2}=(\alpha+\beta)\psi_{s+}(u,t)-$$
$$\alpha\left[\int_0^u\psi_{s+}(u-x,t)\mathrm{d}G(x)+B_{s_1}(u,t)\right]-\beta\left[\int_0^u\psi_{s+}(u-y,t)\mathrm{d}F(y)+B_{s_2}(u,t)\right] \tag{23}$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，则 $\psi_s(u,t)$ 符合下面积分微分方程：

$$(u\delta+c)\frac{\partial\psi_{s-}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s-}(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s-}(u,t)}{\partial u^2}-(\alpha+\beta)\psi_{s-}(u,t)=$$
$$-\alpha\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x,t)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}(u+\frac{c}{\delta})\right]-\beta\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y,t)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}(u+\frac{c}{\delta})\right] \tag{24}$$

边界条件为：

$$\begin{cases}\psi_{s+}(+\infty,t)=0\\ \psi_s(u,+\infty)=\psi_s(u)\end{cases} \tag{25}$$

其中

$$B_{s_1}(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x,t)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$

$$B_{s_2}(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y,t)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right),\ u\geqslant 0$$

证 当 $u\geqslant 0$ 时，令 $H(t)=u+ct+\sigma W(t)$，则 $H(0)=u$ 且

$$\mathrm{d}H(\Delta)=c\,\mathrm{d}\Delta+\sigma\mathrm{d}W_\Delta$$

由伊藤积分公式有

$$\mathrm{d}\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)=\left[c\frac{\partial\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)}{\partial t}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)}{\partial u^2}\right]\mathrm{d}\Delta+\sigma\frac{\partial\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)}{\partial u}\mathrm{d}W_\Delta$$

即

$$\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)-\psi_{s+}(u,t)=\int_0^{\Delta}\left(c\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u^2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\Delta}\sigma\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u}\mathrm{d}W_x$$

所以

$$E[\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)]-\psi_{s+}(u,t)=\int_0^{\Delta}\left(c\,E\left[\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u}\right]+E\left[\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial t}\right]+\frac{1}{2}\sigma^2E\left[\frac{\partial^2\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u^2}\right]\right)\mathrm{d}x \tag{26}$$

在充分小的时间段$(0,\Delta]$内，考虑(2)式定义的风险过程. 既然$M(t)$和$N(t)$都是Poisson过程，则在$(0,\Delta]$有以下4种可能情况：

1) $M(t)$和$N(t)$都没有跳跃，其发生的概率为$(1-\alpha\Delta)(1-\beta\Delta)+o(\Delta)$.

2) $M(t)$有一个跳跃且$N(t)$没有跳跃，其发生的概率为$\alpha\Delta(1-\beta\Delta)+o(\Delta)$.

3) $M(t)$没有跳跃且$N(t)$有一个跳跃，其发生的概率为$(1-\alpha\Delta)\beta\Delta+o(\Delta)$.

4) $M(t)$(或者$N(t)$)至少有两个跳跃或者在时间段$(0,\Delta]$内，$M(t)$和$N(t)$同时有跳跃，其发生的概率为$o(\Delta)$.

因此

$$\begin{aligned}\psi_{s+}(u,t)=&(1-\alpha\Delta)(1-\beta\Delta)E[\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)]+\alpha\Delta(1-\beta\Delta)\\&E\left[\int_0^{H(\Delta)}\psi_{s+}(H(\Delta)-x,t-\Delta)\mathrm{d}G(x)+\right.\\&\left.\int_{H(\Delta)}^{H(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(\Delta)-x,t-\Delta)\mathrm{d}G(x)+\int_{H(\Delta)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}G(x)\right]+\\&\beta\Delta(1-\alpha\Delta)E\left[\int_0^{H(\Delta)}\psi_{s+}(H(\Delta)-y,t-\Delta)\mathrm{d}F(y)+\right.\\&\left.\int_{H(\Delta)}^{H(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(\Delta)-y,t-\Delta)\mathrm{d}F(y)+\int_{H(\Delta)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}F(y)\right]+o(\Delta)\end{aligned}$$

等价地

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\Delta E[\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)]=&E[\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)]-\psi_{s+}(u,t)+\alpha\Delta E\\&\left[\int_0^{H(\Delta)}\psi_{s+}(H(\Delta)-x,t-\Delta)\mathrm{d}G(x)+\int_{H(\Delta)}^{H(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(\Delta)-x,t-\Delta)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(H(\Delta)+\frac{c}{\delta}\right)\right]+\\&\beta\Delta E\left[\int_0^{H(\Delta)}\psi_{s+}(H(\Delta)-y,t-\Delta)\mathrm{d}F(y)+\right.\\&\left.\int_{H(\Delta)}^{H(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(\Delta)-y,t-\Delta)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(H(\Delta)+\frac{c}{\delta}\right)\right]+o(t)\end{aligned} \tag{27}$$

在(27)式两边同时除以Δ，令$\Delta\to 0$，同时利用(26)式得(23)式.

当$-\frac{c}{\delta}<u<0$时，令$Y(t)=u\mathrm{e}^{\delta t}+ct+\sigma W_t$，则

$$Y(0)=u \text{ 及 } \mathrm{d}Y(\Delta)=(u\delta\mathrm{e}^{\delta\Delta}+c)\mathrm{d}\Delta+\sigma\mathrm{d}W_{\Delta}$$

由伊藤积分公式有

$$\mathrm{d}\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)=\left[(u\delta\mathrm{e}^{\delta\Delta}+c)\frac{\partial\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)}{\partial t}+\right.$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)}{\partial u^2}\Bigg]\mathrm{d}\Delta+\sigma\frac{\partial\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)}{\partial u}\mathrm{d}W_\Delta$$

即

$$\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)-\psi_{s-}(u,t)=$$
$$\int_0^\Delta\Bigg((u\delta e^{\delta x}+c)\frac{\partial\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial t}+$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial u^2}\Bigg)\mathrm{d}x+\int_0^\Delta\sigma\frac{\partial\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial u}\mathrm{d}W_x$$

所以

$$E[\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)]-\psi_{s-}(u,t)=\int_0^\Delta\Bigg((u\delta e^{\delta x}+c)E\left[\frac{\partial\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial u}\right]+$$
$$E\left[\frac{\partial\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial t}\right]+\frac{1}{2}\sigma^2E\left[\frac{\partial^2\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial u^2}\right]\Bigg)\mathrm{d}x \tag{28}$$

利用与 $u\geqslant 0$ 时相同的讨论方法得

$$\psi_{s-}(u,t)=(1-\alpha\Delta)(1-\beta\Delta)E[\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)]+\alpha\Delta(1-\beta\Delta)E$$
$$\left[\int_0^{Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(\Delta)-x,t-\Delta)\mathrm{d}G(x)+\int_{Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}G(x)\right]+$$
$$\beta\Delta(1-\alpha\Delta)E\left[\int_0^{Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(\Delta)-y,t-\Delta)\mathrm{d}F(y)+\int_{Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}F(y)\right]+o(\Delta)$$

等价地

$$(\alpha+\beta)\Delta E[\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)]=E[\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)]-\psi_{s-}(u,t)+\alpha\Delta E$$
$$\left[\int_0^{Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(\Delta)-x,t-\Delta)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}\right)\right]+$$
$$\beta\Delta E\left[\int_0^{Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(\Delta)-y,t-\Delta)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}(H(\Delta)+\frac{c}{\delta})\right]+o(t) \tag{29}$$

在(29)式两边同时除以 Δ,令 $\Delta\to 0$,同时利用(28)式得(24)式.

注 $\frac{\partial\psi_s(u,t)}{\partial t}\big|_{t=\infty}=0$,当 $t\to\infty$ 时,(23)式即为(3)式,(24)式即为(4)式.

定理 4 假设 $\psi_d(u,t)$ 对 u 是二次连续可微的,对 t 是一次连续可微的. 当 $u\geqslant 0$ 时,$\psi_s(u,t)$ 符合下面的偏微分积分方程:

$$c\frac{\partial\psi_{d+}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{d+}(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{d+}(u,t)}{\partial u^2}=(\alpha+\beta)\psi_{d+}(u,t)-$$
$$\alpha\left[\int_0^u\psi_{d+}(u-x,t)\mathrm{d}G(x)+B_{d_1}(u,t)\right]-\beta\left[\int_0^u\psi_{d+}(u-y,t)\mathrm{d}F(y)+B_{d_2}(u,t)\right] \tag{30}$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时,则 $\psi_d(u,t)$ 符合下面积分微分方程:

$$(u\delta+c)\frac{\partial\psi_{d-}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{d-}(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{d-}(u,t)}{\partial u^2}-(\alpha+\beta)\psi_{d-}(u,t)=$$
$$-\alpha\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-x,t)\mathrm{d}G(x)\right]-\beta\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-y,t)\mathrm{d}F(y)\right] \tag{31}$$

边界条件为:

$$\begin{cases}\psi_{d+}(+\infty,t)=0\\ \psi_d(u,+\infty)=\psi_d(u)\end{cases}$$

其中

$$B_{d_1}(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-x,t)\mathrm{d}G(x)$$

$$B_{d_2}(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-y,t)\mathrm{d}F(y),\ u\geqslant 0$$

注　$\dfrac{\partial\psi_d(u,t)}{\partial t}\Big|_{t=\infty}=0$，当 $t\to\infty$ 时，(30) 式即为(10) 式，(31) 式即为(11) 式.

推论 5　在定理 3 和定理 4 条件下，当 $u\geqslant 0$ 时，$\psi(u,t)$ 符合下面的偏微分积分方程：

$$c\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi(u,t)}{\partial u^2}=$$
$$(\alpha+\beta)\psi(u,t)-\alpha\left[\int_0^u\psi(u-x,t)\mathrm{d}G(x)+B_1(u,t)\right]-$$
$$\beta\left[\int_0^u\psi(u-y,t)\mathrm{d}F(y)+B_2(u,t)\right]\tag{32}$$

当 $-\dfrac{c}{\delta}<u<0$ 时，则 $\psi(u,t)$ 符合下面积分微分方程：

$$(u\delta+c)\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi(u,t)}{\partial u^2}-(\alpha+\beta)\psi(u,t)=$$
$$-\alpha\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-x,t)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right]-\beta\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-y,t)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right]\tag{33}$$

边界条件为：

$$\begin{cases}\psi(+\infty,t)=0\\ \psi(u,+\infty)=\psi(u)\end{cases}$$

其中

$$B_1(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-x,t)\mathrm{d}G(x)+\overline{G}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$

$$B_2(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-y,t)\mathrm{d}F(y)+\overline{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right),\ u\geqslant 0$$

注　$\dfrac{\partial\psi(u,t)}{\partial t}\Big|_{t=\infty}=0$，当 $t\to\infty$ 时，(32) 式即为(13) 式，(33) 式即为(14) 式.

参考文献：

[1]　CAI J，DICKSON D C M. On The Expected Discounted Penalty Function at Ruin of a Surplus Process with Interest [J]. Insurance：Mathematics and Economics，2002，30(3)：389－404.

[2]　WANG C W，YIN C C. Dividend Payments in the Classical Risk Model under Absolute Ruin with Debit Interest [J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry，2009，25(3)：247－262.

[3]　CAI J，YANG H L. Ruin in the Perturbed Compound Poisson Risk Process under Interest Force [J]. Advances in Applied Probability，2005，37(3)：819－835.

[4]　CAI J. On the Time Value of Absolute Ruin with Debitinterest [J]. Advances in Applied Probability，2007，39(2)：343－359.

[5]　魏广华，高启兵，刘国祥. 常利力下双复合 Poisson 风险过程的生存概率 [J]. 南京师范大学学报：自然科学版，2013，36(2)：27－31.

[6]　魏广华，高启兵. 常利力下双复合泊松风险模型破产概率的上界 [J]. 南京师范大学学报：自然科学版，2009，32(1)：30－34.

[7] 覃东君，李俊平，刘志峰，等. 双到达过程带索赔成本风险模型的破产概率 [J]. 数学理论与应用，2011，31(2)：110－114.

[8] CAI J，YANG H L. On the Decomposition of the Absolute Ruin Probability in a Perturbed Compound Poisson Surplus Process with Debit Interest [J]. Annals of Operations Research，2014，212(1)：61－77.

[9] 魏广华，高启兵，王晓谦. 常利力下带干扰的双复合 Poisson 风险过程的生存概率 [J]. 应用概率统计，2012，28(1)：31－42.

[10] 魏广华，袁明霞，王丙均，等. 随机利率下数字幂型期权的定价 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2013，38(12)：55－60.

A Perturbed Double Arrival Process Risk Model with Debit Interest

WEI Guang-hua[1,2]， GAO Qi-bing[3]， LIU Guo-xiang[3]， WANG Xiao-qian[3]

1. Basic Department，Jinling Institute of Technology，Nanjing 211169，China；
2. College of Hydrology and Water Resources，Hohai University，Nanjing 211100，China；
3. School of Mathematical Sciences，Nanjing Normal University，Nanjing 210097，China

Abstract：In this paper，we consider a risk model which is a perturbed double arrival process with debit interest. We obtain the integro-differential equation for infinite time ruin probability and then derive the integral partial differential equation for finite time ruin probability by the total probability formula，the differential calculus and Ito′s formula. When the claims are exponentially distributed，a differential equation is derived for infinite time ruin probability.

Key words：debit interest；double arrival process；Brown motion；ruin probability；integro-differential equation；integral partial differential equation

责任编辑　张　枸