DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.09.015

多目标优化问题近似解的最优性条件①

李红梅[1,2]，　高　英[1]

1. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331；2. 茶园新城中学，重庆 401336

摘要：研究了多目标优化问题的一类近似有效解、近似弱有效解和近似真有效解，并利用切锥、可行方向锥、ε-法锥等几何概念刻画了近似解的必要性及充分性条件.

关　键　词：多目标规划；近似解；锥刻画

中图分类号：O224　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2015)09-0100-06

我们利用数值算法求得的解大多是近似解. 在实际情况中，有效解(弱有效解)往往不一定存在，但近似解在很弱的条件下都可能存在. 因此，研究近似解不仅有理论价值更有实际意义. 1979 年，文献[1]首次引进了凸数值优化问题近似解的概念. 文献[2]引进多目标规划问题的 ε-有效解和 ε-拟近似有效解的概念. 文献[3]对多目标规划问题又提出了几种近似解的概念. 随后，近似解有了一系列的发展[4-7]. 文献[8]利用 co-radiant 集的概念定义了一种新的近似有效解和近似弱有效解的概念，并说明以往研究的诸多近似解(如 Kutateladze[1]，White[3])都是它的特殊情况. 文献[9]中研究了 εq-有效解、弱有效解和真有效解的最优性条件. 文献[10]中利用 co-radiant 集在已有的 Benson 真有效解的基础之上提出了一类新的近似真有效解的概念，并研究了这类近似真有效解的一些线性与非线性标量化结果. 文献[11]在邻近次似凸条件下研究了多目标优化问题近似真有效解的标量化结果和鞍点定理. 文献[12]研究了一类近似解的存在性和最优性条件. 本文在文献[8-9]的基础上，利用各种锥研究了多目标优化问题近似解的最优性条件.

1　预备知识

设 $\mathbb{R}^n$ 是 n 维欧氏空间，$\mathbb{R}^n_+$ 是非负象限. 设 $C \subset \mathbb{R}^n$，$\operatorname{int} C$ 和 $\operatorname{cl} C$ 分别表示 C 的内部和闭包. 若 C 为点凸锥，C 的正极锥和严格正极锥分别记为 C^+ 和 C^{s+}. 对 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 给出以下符号：

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n$$

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$$

$$x \leqslant_q y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^n_+$$

考虑如下多目标优化问题(MOP)：

$$\min\{f(x): x \in S\}$$

其中：$S \subset \mathbb{R}^n$ 是非空子集，$f: S \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

定义 1[8]　如果对任意的 $d \in C$，任意的 $\alpha \geqslant 1$，有 $\alpha d \in C$，则称 C 为 co-radiant 集.

令 $C(\varepsilon) = \varepsilon C$，$\forall \varepsilon > 0$，且 $C(0) = \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.

---

① 收稿日期：2014-07-21

基金项目：国家自然科学基金(11201511)；重庆市重点实验室专项项目(CSTC，2011KLORSE03).

作者简介：李红梅(1988-)，女，重庆奉节人，硕士研究生，主要从事最优化理论研究.

定义 2[8, 11] 设 $\varepsilon \geqslant 0$，C 为 co-radiant 点集，

(i) 如果 $(f(x_0)-C(\varepsilon))\cap f(S)\subset\{f(x)\}$，则 x_0 是(MOP)的关于 C 的 ε-有效解.

(ii) 如果 $(f(x_0)-\operatorname{int}C(\varepsilon))\cap f(S)=\varnothing$，则 x_0 是(MOP)的关于 C 的 ε-弱有效解.

(iii) 如果 $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(f(S)+C(\varepsilon)-f(x_0))\cap(-C(\varepsilon))\subset\{0\}$，则 x_0 是(MOP)的关于 C 的 ε-Benson 真有效解.

记问题(MOP)关于 C 的 ε-有效解、ε-弱有效解和 ε-真有效解分别为 $AE(f, C, \varepsilon)$，$WAE(f, C, \varepsilon)$ 和 $PAE(f, C, \varepsilon)$.

定义 3 设 $\varepsilon \geqslant 0$，C 为 co-radiant 点集，

(i) 如果 $(f(x_0)-C(\varepsilon))\cap f(S\cap B)\subset\{f(x)\}$，则 x_0 是(MOP)的关于 C 的局部 ε-有效解.

(ii) 如果 $(f(x_0)-\operatorname{int}C(\varepsilon))\cap f(S\cap B)=\varnothing$，则 x_0 是(MOP)的关于 C 的局部 ε-弱有效解，其中 B 为 x_0 的球形领域.

记问题(MOP)关于 C 的局部 ε-有效解、局部 ε-弱有效解分别记为 $LAE(f, C, \varepsilon)$ 和 $LWAE(f, C, \varepsilon)$.

定义 4[13] 集合 X 在 $x\in X$ 处的切锥定义为：

$$T(x, X)=\{d\in\mathbb{R}^m: \exists t_j\downarrow 0, d_j\to d, \text{ s.t. } x+t_jd_j\in X\}$$

集合 X 在 $x\in X$ 处的可行方向锥定义为：

$$D(x, X)=\{d\in\mathbb{R}^m: \exists t>0 \text{ s.t. } x+td\in X\}$$

设 $X\subset\mathbb{R}^m$ 是非空凸集，集合 X 在 $x\in X$ 处的 ε-法锥定义为：

$$N_\varepsilon(x, X)=\{y\in\mathbb{R}^m: y^T(x-z)\leqslant\varepsilon, \forall z\in X\}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，记为

$$N(x, X)=\{y\in\mathbb{R}^m: y^T(x-z)\leqslant 0, \forall z\in X\}$$

3 近似解的锥刻画

设 C 为 co-radiant 点凸集，下面我们将利用各种不同的锥来研究近似的有效解、弱有效解和真有效解的最优性条件.

定理 1 设 $\bar{x}\in S$，$\varepsilon\geqslant 0$，如果

$$D(f(\bar{x}), f(S))\cap(-C(\varepsilon)\setminus\{0\})=\varnothing$$

则 $\bar{x}\in AE(f, C, \varepsilon)$.

证 利用反证法，假设 $\bar{x}\notin AE(f, C, \varepsilon)$，则存在 $x\in S$，$p\in C(\varepsilon)\setminus\{0\}$，使得 $f(x)=f(\bar{x})-p$，因 $f(x)=f(\bar{x})+1\cdot(f(x)-f(\bar{x}))\in f(S)$，取 $t=1$，由可行方向锥的定义知 $f(x)-f(\bar{x})\in D(f(\bar{x}), f(S))$，即 $-p=f(x)-f(\bar{x})\in D(f(\bar{x}), f(S))$，这与 $D(f(\bar{x}), f(S))\cap(-C(\varepsilon))=\varnothing$ 矛盾，故 $\bar{x}\in AE(f, C, \varepsilon)$.

注 1 事实上，$D(f(\bar{x}), f(S))\cap(-C(\varepsilon)\setminus\{0\})=\varnothing$ 意味着 $D(f(\bar{x}), f(S))\cap(-C(0)\setminus\{0\})=\varnothing$，$\bar{x}$ 是有效解[14]，从而 $\bar{x}\in AE(f, C, \varepsilon)$.

定理 2 设 $\bar{x}\in S$，$\varepsilon\geqslant 0$，如果

$$D(f(\bar{x}), f(S))\cap(-\operatorname{int}C(\varepsilon))=\varnothing$$

则 $\bar{x}\in WAE(f, C, \varepsilon)$.

证 证明方法与定理 1 类似.

定理 1 与定理 2 的逆命题不成立，参见如下例子：

例 1 设 $S=\{x\in\mathbb{R}^2: x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\}$，$f: S\longrightarrow\mathbb{R}^2$，$f_1(x_1, x_2)=x_1$，$f_2(x_1, x_2)=x_2$，$C(\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^2: x_1\geqslant\varepsilon; x_2\geqslant\varepsilon\}$，令 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，易知 $\bar{x}=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\in AE(f, C, \varepsilon)$，$\bar{x}=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\in$

$WAE(f,C,\varepsilon)$，但 $D\left(f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),f(S)\right)=\mathbb{R}^2$，这表明 $D\left(f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),f(S)\right)\cap(-C(\varepsilon))\neq\varnothing$，$D\left(f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),f(S)\right)\cap(-\operatorname{int}C(\varepsilon))\neq\varnothing$.

定理 3　设 $\varepsilon\geqslant 0$，若 $T(f(\bar{x}),f(S))\cap(-C(\varepsilon)\backslash\{0\})=\varnothing$，则 $\bar{x}\in PAE(f,C,\varepsilon)$.

证　因为 $f(S)$ 是凸集，故有 $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(f(S)-f(\bar{x}))=T(f(S),f(\bar{x}))$. 因此

$$\operatorname{cl}\operatorname{cone}(f(S)-f(\bar{x}))\cap -C(\varepsilon)\backslash\{0\}=\varnothing$$

利用凸集分离定理可知存在 $\mu\in\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ 使得

$$\langle\mu,y\rangle>0,\ \forall y\in -C(\varepsilon)\backslash\{0\}$$

$$\langle\mu,y\rangle\leqslant 0,\ \forall y\in\operatorname{cl}\operatorname{cone}(f(S)-f(\bar{x}))$$

因此有

$$\langle\mu,y\rangle\geqslant 0,\ \forall y\in -C(\varepsilon)\backslash\{0\}$$

$$\langle\mu,y\rangle>0,\ \forall y\in -C(\varepsilon)\backslash\{0\}$$

下面利用反证法证明结论. 假设 $\bar{x}\notin PAE(f,C,\varepsilon)$，则存在 $\bar{y}\in -C(\varepsilon)\backslash\{0\}$ 使得

$$\bar{y}\in\operatorname{cl}\operatorname{cone}(f(S)+C(\varepsilon)-f(\bar{x}))$$

即存在 $y_n\in\operatorname{cone}(f(S)+C(\varepsilon)-f(\bar{x}))$ 使得 $y_n\rightarrow\bar{y}$. 从而存在 $\lambda_n\in\mathbb{R}_+^m$，$x_n\in S$ 和 $p_n\in C(\varepsilon)$，$\forall n\in N$，使得

$$y_n=\lambda_n(f(x_n)+p_n-f(\bar{x}))$$

因 $\bar{y}\neq 0$，故存在 $n_1\in N$ 使得 $\lambda_n>0$，$\forall n\geqslant n_1$ 成立. 因此

$$\begin{aligned}\langle\mu,y_n\rangle=&\lambda_n\langle\mu,f(x_n)+p_n-f(\bar{x})\rangle=\\&\lambda_n\langle\mu,f(x_n)-f(\bar{x})\rangle+\lambda_n\langle\mu,p_n\rangle<\lambda_n\langle\mu,f(x_n)-f(\bar{x})\rangle\leqslant 0\end{aligned}\tag{1}$$

即 $\langle\mu,\bar{y}\rangle\leqslant 0$. 另一方面，由 $\bar{y}\in -C(\varepsilon)\backslash\{0\}$ 可知 $\langle\mu,\bar{y}\rangle\geqslant 0$ 与(1)式矛盾，故结论成立.

定理 3 的反面不一定成立，参见如下例子：

例 2　参见例 1，易知 $\bar{x}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in PAE(f,C,\varepsilon)$，但 $T\left(f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),f(S)\right)=\mathbb{R}^2$，因此 $T\left(f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),f(S)\right)\cap(-\operatorname{int}C(\varepsilon))\neq\varnothing$.

定理 4　设 $\bar{x}\in S$，$\varepsilon>0$ 且 $\operatorname{int}C(\varepsilon)\neq\varnothing$，如果存在 $\mu\in -C(0)^+\backslash\{0\}$ 使得 $\langle\mu,q\rangle>1$，对任意的 $q\in -C$ 成立，并且 $N_\varepsilon(f(S),f(\bar{x}))\cap(-C(0)^+\backslash\{0\})\neq\varnothing$，则 $\bar{x}\in WAE(f,C,\varepsilon)$.

证　若 $\bar{x}\notin WAE(f,C,\varepsilon)$，由定义可知存在 $p\in -\operatorname{int}C(\varepsilon)$，$x\in S$ 使得 $p=f(x)-f(\bar{x})$. 又因 $p\in -\operatorname{int}C(\varepsilon)$ 知存在 $q\in -\operatorname{int}C$，使得 $p=\varepsilon q$. 由条件得 $\langle\mu,p\rangle=\langle\mu,\varepsilon q\rangle>\varepsilon$. 即 $\langle\mu,f(x)-f(\bar{x})\rangle>\varepsilon$，这与 $\mu\in N_\varepsilon(f(\bar{x}),f(S))$ 矛盾.

例 3 说明了定理 4 的合理性.

例 3　设 $C=\{x\in\mathbb{R}^2: x_1+x_2>1; x_1\geqslant 0; x_2\geqslant 0\}$，$S=C(0)=\mathbb{R}_+^2$，$f: S\longrightarrow\mathbb{R}^2$，$f_1(x_1,x_2)=x_1$，$f_2(x_1,x_2)=x_2$，取 $\varepsilon=1$，$\mu=\langle -1,-1\rangle$，则对任意的 $q=(q_1,q_2)\in -C$，有 $\langle\mu,q\rangle=-(q_1+q_2)>1$，且 $\mu=(-1,-1)\in N_\varepsilon(f(S),f(\bar{x}))$. 这表明定理 3.4 中的条件成立，从而 $\bar{x}=(0,0)\in WAE(f,C,\varepsilon)$.

定理 4 的逆命题不一定成立.

例 4　在例 3 中，考虑 $\bar{x}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\bar{x}\in WAE(f,C,\varepsilon)$，但 $\mu=(-1,-1)\notin N_\varepsilon(f(S),f(\bar{x}))$.

定理 5　设 $\bar{x}\in S$，$\varepsilon\geqslant 0$，如果存在 $\mu\in -C(0)^{s+}$ 使得 $\langle\mu,q\rangle>1$，$\forall q\in -C$ 且 $N_\varepsilon(f(S),f(\bar{x}))\cap(-C(0)^{s+})\neq\varnothing$，则 $\bar{x}\in PAE(f,C,\varepsilon)$.

证　若 $\bar{x} \notin PAE(f, C, \varepsilon)$，则由定义知，存在 $p \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ 使得

$$p \in \operatorname{cl}\operatorname{cone}(f(S) + C(\varepsilon) - f(\bar{x})) \cap -C(\varepsilon) \setminus \{0\}$$

因此存在

$$p_n \in \operatorname{cone}(f(S) + C(\varepsilon) - f(\bar{x})) \qquad \forall n \in N$$

使得 $p_n \to p$.

由 $\mu \in -C(0)^{s+}$ 和 $p \in -C(\varepsilon) \setminus \{0\}$ 知 $\langle \mu, p \rangle > 0$，从而存在充分大的 $n_1 \in N$，使得 $\langle \mu, p_n \rangle > 0$，$\forall n \geqslant n_1$. 又因 $p_n \in \operatorname{cone}(f(S) + C(\varepsilon) - f(\bar{x}))$ 知存在 $\lambda_n \in \mathbb{R}^m_+$，$x_n \in S$ 和 $q_n \in C(\varepsilon)$ 使得

$$p_n = \lambda_n (f(x_n) + q_n - f(\bar{x}))$$

由 $p \neq 0$，不妨假设 $\lambda_n > 0$ 对任意的 $n \geqslant n_1$ 成立. 因此

$$\langle \mu, f(x_n) + q_n - f(\bar{x}) \rangle > 0 \qquad \forall n \geqslant n_1$$

由 $q_n \in C(\varepsilon)$ 知存在 $\bar{q}_n \in C$，使得 $q_n = \varepsilon \bar{q}_n$，由条件 $\langle \mu, q \rangle > 1$，$\forall q \in -C$ 知

$$\langle \mu, -q_n \rangle = \varepsilon \langle \mu, -\bar{q}_n \rangle > \varepsilon$$

因此

$$\langle \mu, f(x_n) - f(\bar{x}) \rangle > - \langle \mu, q_n \rangle > \varepsilon$$

这与 $\mu \in N_\varepsilon(f(S), f(\bar{x}))$ 矛盾，故结论成立.

定理5的逆命题不一定成立.

例5　设 $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leqslant 0; x_2 \geqslant 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leqslant 1; x_2 \leqslant 0\}$，$f: S \longrightarrow \mathbb{R}^2$，$f_1(x_1, x_2) = x_1$，$f_2(x_1, x_2) = x_2$，$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 1; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0\}$. 令 $\varepsilon = 1$，易知 $\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in PAE(f, C, \varepsilon)$，取 $\mu = \langle -1, -1 \rangle \in PAE(f, C, \varepsilon)$，则对任意的 $q = (q_1, q_2) \in -C$，有 $\langle \mu, q \rangle = -(q_1 + q_2) > 1$，但 $\mu = (-1, -1) \notin N_\varepsilon(f(S), f(\bar{x}))$.

下面我们将讨论局部性结果.

定理6　设 $\bar{x} \in S$，$\varepsilon \geqslant 0$，$0 \in C$ 且 $C \setminus \{0\}$ 是闭集，如果

$$T(f(\bar{x}), f(S \cap B) + C(\varepsilon)) \cap (-C(0) \setminus \{0\}) = \varnothing$$

则 $\bar{x} \in LAE(f, C, \varepsilon)$.

证　反证，若 $\bar{x} \notin LAE(f, C, \varepsilon)$，由定义的否定知存在 $x_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n})$，使得

$$f(\bar{x}) - f(x_n) \in C(\varepsilon) \setminus \{0\}$$

令 $t_n = \| f(x_n) - f(\bar{x}) \|$，$d_n := t_n^{-1}[f(x_n) - f(\bar{x})]$，则有

$$f(x_n) = f(\bar{x}) + t_n d_n$$

因 $0 \in C$，有

$$f(x_n) \in f(S) \subset f(S) + C(\varepsilon)$$

又因 $C \setminus \{0\}$ 为闭集，因此当 n 充分大使得 $t_n \downarrow 0$，$d_n \to d$ 时有

$$d \in T(f(\bar{x}), f(S) + C(\varepsilon))$$

又 $d_n = \dfrac{f(x_n) - f(\bar{x})}{t_n}$，当 n 充分大时有 $d \in -C(0) \setminus \{0\}$，这与题设矛盾，故 $\bar{x} \in LAE(f, C, \varepsilon)$.

注2　若 $\varepsilon = 0$，则 $\bar{x}$ 是 Borwen 真有效解，从而是有效解. 但 $\varepsilon > 0$ 时，只能得到局部有效解. 当 $f(S) + C(\varepsilon)$ 是凸集时，$\bar{x}$ 就相当于是 ε-Benson 真有效解. 下面的例6是为了说明 ε 有效解并不一定是 ε-Benson 真有效解.

例6　设 $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leqslant 1\}$，$f: S \longrightarrow \mathbb{R}^2$，$f_1(x_1,

$x_2) = x_1$，$f_2(x_1, x_2) = x_2$，$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geqslant 1;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0\}$. 取 $\bar{x} = (0, 0)$，则 $\bar{x} \in AE(f, C, \varepsilon)$ 对任意的 $\varepsilon >$ 成立. 但 $\bar{x} \notin PAE(f, C, \varepsilon)$.

定理 6 的逆命题不一定成立.

例 7　设 $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant x_1^{\,2}\}$，$f : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$，$f_1(x_1, x_2) = x_1$，$f_2(x_1, x_2) = x_2$，$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geqslant 1;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0\} \cup \{(0, 0)\}$，易知 $\bar{x} = (0, 0) \in AE(f, C, \varepsilon)$，因此对任意的 $\varepsilon > 0$，$\bar{x} \in LAE(f, C, \varepsilon)$，但 $T(f(0, 0), f(S) + C(\varepsilon)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant 0;\ x_1 \in \mathbb{R}\}$，故 $T(f(\bar{x}), f(S) + C(\varepsilon)) \cap (-C(0) \backslash \{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0;\ x_1 \leqslant -1\} \neq \varnothing$.

定理 7　设 $\bar{x} \in S$，$\varepsilon \geqslant 0$，如果 $\bar{x} \in S$ 是(MOP) 关于 C 的 ε -弱有效解，则

$$T(f(\bar{x}), f(S \cap B) + C(\varepsilon)) \cap -\operatorname{int} C(0) = \varnothing$$

证　利用反证法. 若 $T(f(\bar{x}), f(S \cap B) + C(\varepsilon)) \cap -\operatorname{int} C(0) \neq \varnothing$，则存在 $d_k \in T(f(\bar{x}), f(S \cap B) + C(\varepsilon)) \cap (-\operatorname{int} C(0))$，$\forall k \in N$ 且 $d_k \to d$. 因此存在 $x_k \in f(S \cap B)$，$q_k \in C(\varepsilon)$，$t_k \downarrow 0$ 使得

$$f(\bar{x}) + t_k x_k = f(x_k) + q_k \qquad \forall k \in N$$

当 $\bar{k}$ 充分大，令 $t_{\bar{k}} \to r > 0$，则有

$$f(\bar{x}) - f(x_k) = -t_{\bar{k}} x_{\bar{k}} + q_k \in \operatorname{int} C(0) + C(\varepsilon) \subset \operatorname{int} C(\varepsilon)$$

这与 $\bar{x} \in S$ 是(MOP) 的局部弱有效解矛盾，故 $T(f(\bar{x}), f(S \cap B) + C(\varepsilon)) \cap (-\operatorname{int} C(0)) = \varnothing$.

定理 7 的逆命题不一定成立.

例 8　设 $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1^{\,2} \leqslant x_2 \leqslant x_1^{\,2}\}$，$f : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$，$f_1(x_1, x_2) = x_1$，$f_2(x_1, x_2) = x_2$，$C(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geqslant \varepsilon;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0\}$，令 $\varepsilon = 1$，易知 $\bar{x} = (0, 0) \notin LWAE(f, C, \varepsilon)$，但 $T(f(\bar{x}), f(S \cap B) + C) = \mathbb{R} \times \{0\}$，$T(f(\bar{x}), f(S \cap B) + C) \cap (-\operatorname{int} C) = \varnothing$.

例 9　设 $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 \geqslant x_1^{\,2}\}$，$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^{\,2}$，$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3^2$，$C(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + y_3 \geqslant \varepsilon,\ y_1 \geqslant,\ y_2 \geqslant 0,\ y_3 \geqslant 0\}$. 令 $\varepsilon = 1$，易知 $\bar{x} = (0, 0) \notin LWAE(f, C, \varepsilon)$，但 $T(f(\bar{x}), f(S) + C) \cap (-\operatorname{int} C(0)) = \varnothing$.

参考文献：

[1] KUTAELADZE S S. Convex ε-Programming [J]. Soviet Mathematical Dokl，1979，20(3)：390－393.

[2] LORIDAN P. ε-Solution in Vector Minimization Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1984，43(2)：265－272.

[3] WHITE D J. Epsilon Efficiency [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1986，49(2)：319－337.

[4] LIU J C. ε-Properly Efficient Solutions to Nondifferentiable Multiobjective Programming Problems [J]. Applied Mathematics Letters，1999，12(6)：109－113.

[5] Rong W D，Wu Y N. ε-Weak Minimal Solutions of Vector Optimization Problems with Set-Valued Maps [J]. JOTA，2000，106(3)：569－579.

[6] Lin C. ε-Super Efficient Solutions of Vector Optimization Problems with Set-Valued Maps [J]. OR Transactions，2001，5(1)：51－56.

[7] RONG W D，Ma Y. ε-Properly Efficient Solutions of Vector Optimization Problems with Set-Valued Maps [J]. Operational Research Transactions，2000，4(4)：21－32.

[8] GUTIERREZ C，JIMENEZ B，NOVO V. A Unified Approach and Optimality Conditions for Approximate Solutions of Vector Optimization Problems [J]. Siam Journal Optimizations，2006，17(3)：688－710.

[9] GAO Y，YANG X M，LEE H. Optimality Conditions for Approximate Solutions in Multiobjective Optimization Problems [J/OL]. (2010－10－27) [2014－02－01]. http：//www. journalofinequalitiesandapplications. com/content/2010/

1/620928.

[10] GAO Y, YANG X M, TEO K L. Optimality Conditions for Approximate Solutions of Vector Optimization Problems [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2011, 7(2): 483－496.

[11] GUTIERREZ C, HUERGA L, NOVO V. Scalarization and Saddle Points of Approximate Proper Solutions in Nearly Subconvexlike Vector Optimization Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 389(2): 1046－1058.

[12] GAO Y, HOU S H, YANG X M. Existence and Optimality Conditions for Approximate Solutions to Vector Optimization Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2012, 152(1): 97－120.

[13] BAZARAS M S, SHERALI H D, SHETTY C M. Nonlinear Programming: Theorey and Algorithms [M]. New York: Joho Wiley and Sons, 2006.

[14] KAISA M, MAKELA M. On Cone Characterizations of Weak, Proper and Pareto Optimality in Multiobjective Optimization [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2001, 53(2): 233－245.

Optimality Conditions for Approximate Solutions in Multiobjective Optimization Problems

LI Hong-mei[1,2], GAO Ying[1]

1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China;
2. Chayuan Xincheng Middle School, Chongqing 401331, China

Abstract: In this paper, we study the necessary and sufficient optimality conditions for approximate weakly, approximate efficiently and approximate properly efficient solutions for multiobjective optimization problems. Here, tangent cone, ε-normal cone, and cones of feasible directions are used in their characterization.

Key words: multiobjective programming problem; approximate solution; cone characterization

责任编辑 张 枸