

无限深方势阱中受击粒子的非线性现象研究^①

袁通全

河池学院 物理与机电工程学院, 广西 宜州 546300

摘要: 以无限深方势阱中受击粒子为研究对象, 详细分析了在参数变化情况下粒子的相空间轨道的形状. 结果表明, 该系统粒子的相空间轨道形成所谓的随机网区域与混沌区域共存, 而且随着参数 K 的变化, 随机网出现先破裂然后又恢复的有趣的现象.

关键词: 非线性; 随机网; 相空间

中图分类号: O415

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2015)09-0106-04

非线性过程广泛存在于自然界发生的许多过程之中, 包括生态系统的自适应过程、物质系统中物质的物理变化和化学反应等复杂过程; 而与之相应的线性过程只是自然界中较为简单的部分. 也许可以这么说, 自然界之所以变得如此丰富多彩、生机勃勃, 非线性过程起着决定性的作用. 非线性过程最重要的特征是存在标度和系统各部分的不可分性^[1-4]. 物质系统中的动力学系统可分为保守系统和耗散系统. 人们已经很清楚, 保守系统的相空间是守恒的. 无限深方势阱中的受击粒子是金属中的自由电子受到外场驱动的简化模型. 由于受到周期性外力的作用, 它是一个耗散系统. 文献[5]研究了这个模型在特殊情况下的量子混沌的演化, 文献[6]研究了无限深方势阱中受到频繁测量的粒子的行为. 本研究的目的在于把特殊情况推广到更一般的情况, 考查系统演化的相空间行为, 绘出粒子在相空间中的运动轨迹. 结果发现, 粒子的相空间轨迹形成随机网区域和混沌区域共存的现象.

1 无限深方势阱中的受击粒子

1.1 理论模型

无限深方势阱中受击粒子这个系统的哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2} + V_0(q) + k \cos(q + \alpha) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT)$$

其中无限深方势阱

$$V_0(q) = \begin{cases} 0 & q \in [0, \pi] \\ \infty & q = 0, q = \pi \end{cases}$$

式中: 最后一项为周期性 δ 势阱的外力作用, 它是一个非线性的作用; T 是 δ 势阱的周期, 可取为一个单位; α 是相移, 一般情况下 $\alpha \neq 0$. 这里已经取粒子的质量为一个单位. 方势阱中的受击粒子是人们感兴趣的课题. 文献[5]已经绘出了 $K = 0.01$, $a = 1$ 条件下系统的相空间演化图像. 为了更系统研究这个系统的相空间演化规律, 这里将取 $\alpha = 1$ 和 K 分别取 $0.02 \sim 0.18$ 和 0.20 , 绘出系统相空间的演化图像. 根

^① 收稿日期: 2014-06-20

基金项目: 河池学院引进人才科研启动经费资助课题(2008QS-No. 17).

作者简介: 袁通全(1972-), 男, 广西都安人, 讲师, 主要从事量子相空间理论和强关联电子系统的研究.

据哈密顿正则方程,有

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= K \sin(q+1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), K=kt\end{aligned}$$

这个微分方程组可化为迭代方程组:

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + p_{n+1}, \text{Mod}\pi \\ p_{n+1} = p_n + K \sin(q_n + 1) \end{cases}$$

1.2 相空间 Poincaré 截面图

图 1—3 是用 Mathematica 语言编程(当然其他语言也可以)绘出的粒子运动的相空间 Poincaré 截面图. 选定的初始值为 $q_0=0.1$, $p_0=0.012$, 迭代 100 000 次后得到文中所示的 Poincaré 截面图. 从图 1 中可以看到, 每个图的中间区域是一个大的椭圆, 周边是小椭圆构成的网状结构(也称为随机网). 网状结构的外围是无序的混沌局域. 在 $K=0.03$ 时, 这种网似乎裂开一样, 变得很稀疏. 而当 $K=0.04$ 时, 网又变得清晰一点, 但内层的网和外层的网已经破裂.

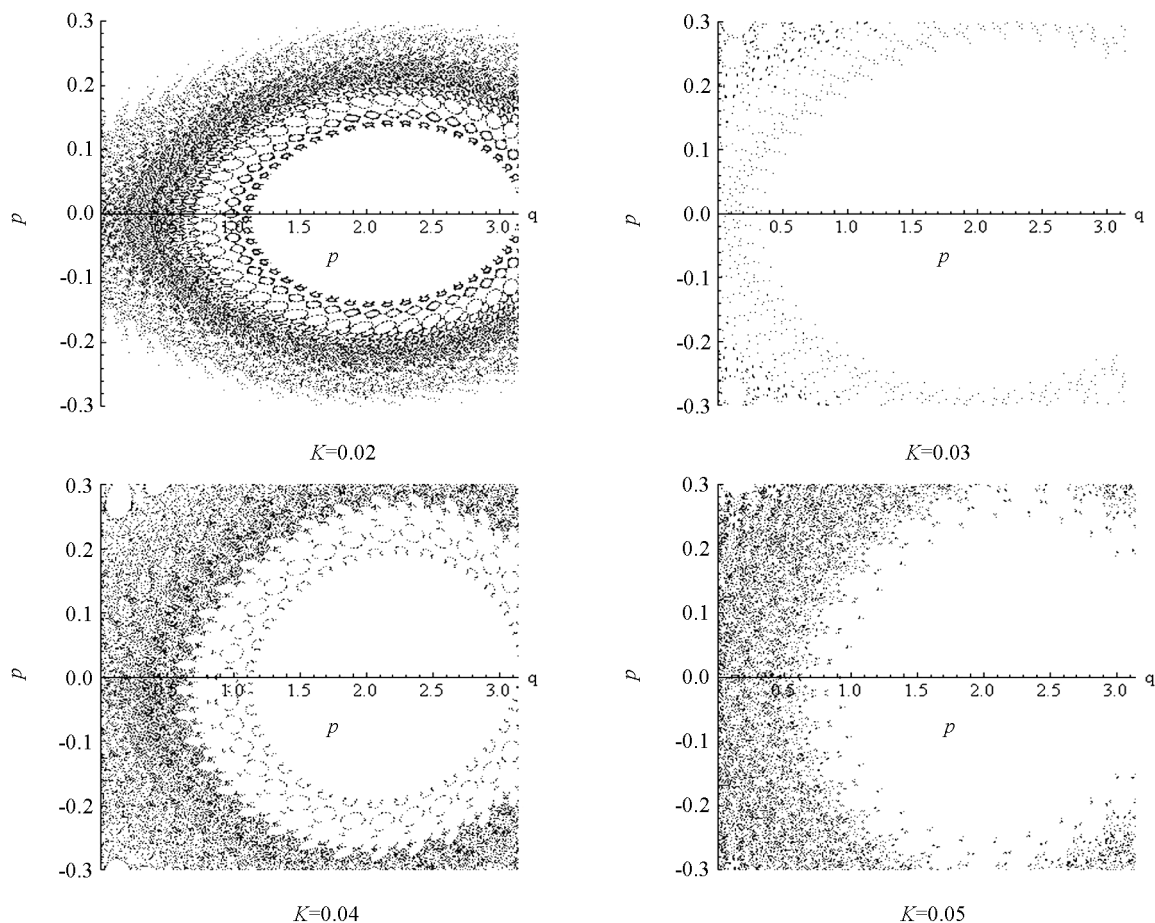
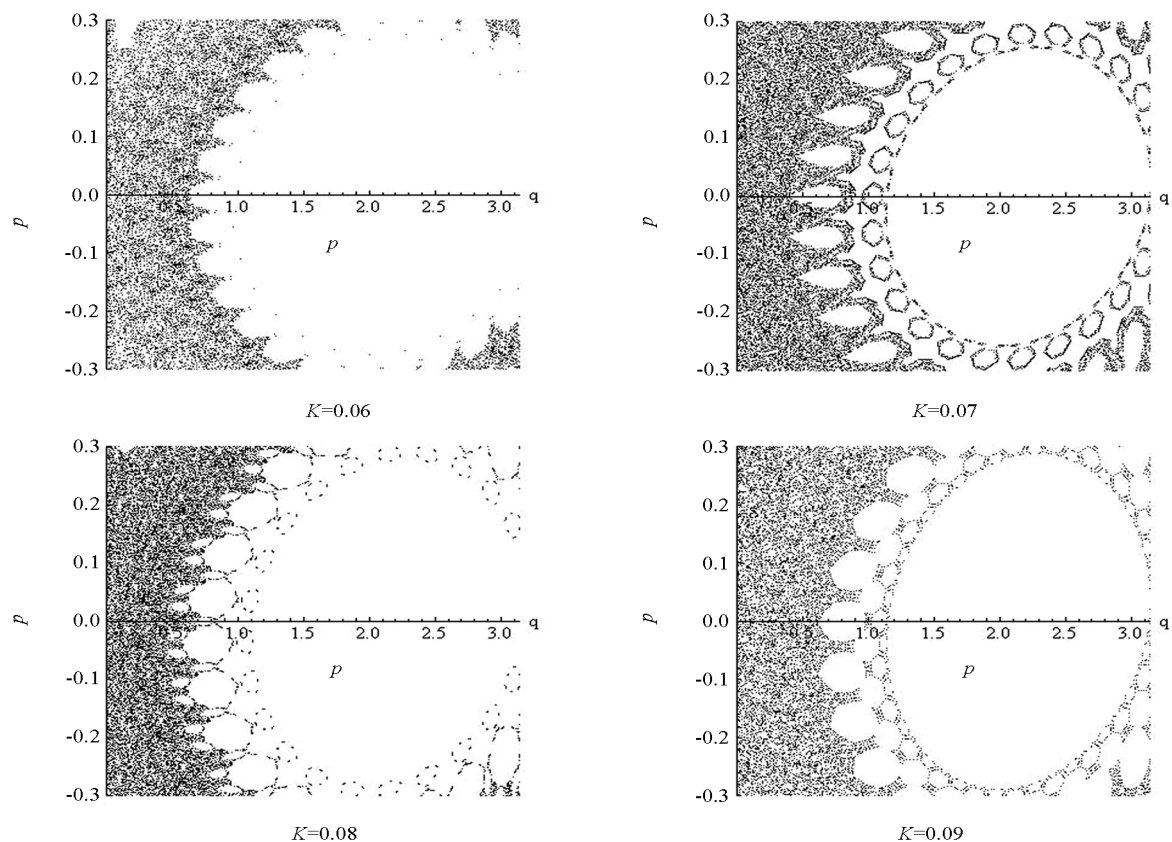
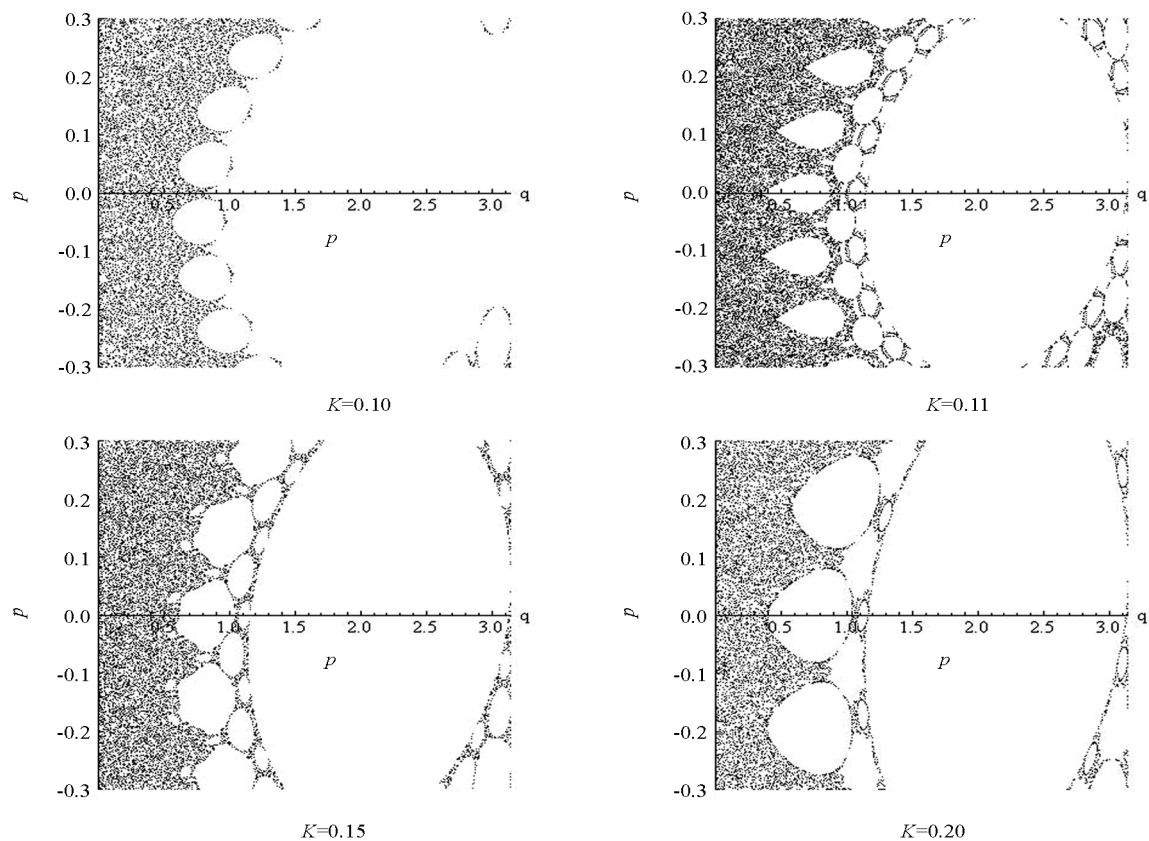


图 1 $K=0.02\sim 0.05$ 的 Poincaré 截面图

当 $K=0.05$ 和 0.06 时网结构进一步裂开. $K=0.06$ 时网结构只剩下一半了. 但是当 $K=0.07$ 时又恢复了二层网结构.

图 3 是 K 分别为 $0.10, 0.11, 0.15$ 和 0.20 时的 Poincaré 截面图. 这时的随机网进一步变大. 网的个数也变少了. 如 $K=0.10$ 时随机网进一步向外破裂, 只剩下了不闭合的一层大点的随机网. 有趣的是 $K=0.20$ 时除了外层出现大的网外内层还出现小的随机网.

图 2 $K=0.06\sim 0.09$ 的 Poincaré 截面图图 3 K 分别为 0.1, 0.11, 0.15 和 0.2 时的 Poincaré 截面图

2 结 论

本文详细分析了无限深方势阱中受击粒子的相空间轨道, 绘出了参数 K 在 0.05 到 0.20 变化的范围内 Poincaré 截面图, 结果表明, 相空间轨道存在随机网区域和混沌区域共存的现象, 参数 K 变大过程中, 原来的随机网破裂, 新的随机网形成. 把迭代的次数增加到 1 000 000 次, 网状的结构没有改变, 只是相空间中的点变得更密罢了.

参考文献:

- [1] HARINDER P A L, SANTHANAM M S. Dynamics of Kicked Particles in a Double-Barrier Structure [J]. Physical Review E, 2010, 82: 056212-1-056212-22.
- [2] LUCA D, ANATOLI P. Many-Body Energy Localization Transition in Periodically Driven Systems [J]. Annals of Physics, 2013, 333: 19-33.
- [3] 王秉宏. 弱混沌与准规则斑图 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1996: 82-90.
- [4] 陆同兴. 非线性物理概论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2002: 24-47.
- [5] HU BAMBI, LI Bao-wen, LIU Jie, et al. Quantum Chaos of a Kicked Particle in an Infinite Potential Well [J]. Phys Rev Lett, 1999, 82(21): 4224-4227.
- [6] LI Shang-bin, XU Jing-bo. Diffusion and Entanglement of a Kicked Particle in an Infinite Square Well Under Frequent Measurements [J]. Phys Rev E, 2006, 74: 046204-1-046204-12.

On a Nonlinear Phenomenon of Kicked Particles in an Infinite Square Well

YUAN Tong-quan

School of Physics and Mechanical and Electronic Engineering, Hechi University, Yizhou Guangxi 546300, China

Abstract: Based on the kicked particles in an infinite square well, the trajectory of the particles in the phase space is analyzed in detail in the case of variational parameters. The result shows that the stochastic net region and the chaotic region coexist in the phase space. An interesting phenomenon is detected that when the parameter k is varied the stochastic net rives first and renews afterwards.

Key words: nonlinearity; stochastic net; phase space

责任编辑 潘春燕

