

相互作用网络耦合关系对其鲁棒性的影响^①

杨程成, 杨 春

电子科技大学 数学科学院, 成都 61000

摘要: 通过构造带有调控参数 α 的耦合网络模型, 改变两个网络耦合顶点之间的度匹配性, 研究了两个相互作用耦合网络在耦合关系变化、节点随机失效情况下的级联失效行为及其鲁棒性. 在对两个耦合无标度网络的研究中发现: 随着 α 的减小, 渗流阈值 p_c 也逐渐减小, 鲁棒性随之增强; 存在临界值 α_c , 当 $\alpha < \alpha_c$ 时, 网络渗流呈现二阶相变, 而当 $\alpha > \alpha_c$ 时, 呈现一阶相变. 然而, 在对两个耦合随机网络的研究中发现, 参数 α 对渗流阈值的影响相对较小.

关 键 词: 相互作用网络; 耦合关系; 鲁棒性; 渗流阈值

中图分类号: N94

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2015)09-0145-05

复杂网络科学是描述各种各样复杂系统的交叉性学科, 其研究内容主要涉及网络结构、网络动力学、网络鲁棒性等. 特别地, 网络鲁棒性是复杂网络研究的重要方面^[1-6]. 例如, 现代生活中的电力网络在受到人为或自然破坏时, 其鲁棒性的高低直接影响到相关的基础设施. 随着社会的迅猛发展, 各种网络的内部关联变得更加错综复杂, 而且网络与网络之间往往也相互依存、相互影响与相互制约. 这种网络与网络之间存在依赖关系的系统被称作相互作用网络. 对于一个相互作用网络来说, 一个网络的部分节点出现故障, 往往会引起与它耦合的网络的耦合顶点失去功能, 反过来又会引起原网络的相关顶点的进一步失效, 从而产生级联失效. 这种级联失效过程往往会给整个系统带来灾难性后果. 例如 2003 年意大利停电事故^[7], 2003 年北美停电事故^[8]等, 这些事故都导致了其电力—计算机网络大面积崩溃, 给整个国家带来了巨大的经济损失. 造成网络崩溃的根本原因是计算机网络与电力网络间的相互依赖所产生的级联失效. 现代技术产生了越来越多的相互依存的基础设施系统, 对其鲁棒性的研究是设计与控制这些基础设施的最具有挑战性的任务之一.

近十年来, 相互作用网络鲁棒性研究一直都受到国内外学者的广泛关注. 研究相互作用网络鲁棒性通常是以渗流理论为基础, 将系统发生渗流相变时的临界值和网络中最大连通分支大小作为衡量系统鲁棒性的标准^[9-10]. 2010 年, Buldyrev 等人应用在单网络中广泛使用的生成函数方法, 提出了研究相互作用网络级联失效的数学理论框架. 研究发现对于全耦合双层相互作用网络来说, 在随机攻击下产生的渗流相变属于不连续的一阶相变, 这与单网络渗流相变是连续的二阶相变显著不同^[11]. Parshani 等人通过减小网络间耦合强度, 使相互作用网络渗流相变从不连续相变再变回到连续相变^[12]. DiZhou 发现两个耦合无标度网络(SF-SF 网络)在受到随机攻击时, 随着耦合强度减小, 渗流相变呈现三种形式: 一阶相变、混合相变、二阶相变^[13]. 文献[14]发现聚类系数对相互作用网络鲁棒性影响很大, 在随机攻击下, 网络聚类系数越高, 网络鲁棒性越低. 在面对蓄意攻击时, 高建喜等人通过把蓄意攻击映射成随机攻击, 借助于生成函数方法,

① 收稿日期: 2014-09-21

基金项目: 国家自然科学基金(61172115, 60872029), 中央高校基本科研业务费专项资金(ZYGX2011J046, ZYGX2012J046), 四川省教育厅科学研究基金(13Z B0034).

作者简介: 杨程成(1990-), 男, 四川成都人, 硕士研究生, 主要从事复杂网络相关研究.

通信作者: 杨 春.

得到了研究相互作用网络在蓄意攻击下的级联失效理论框架^[15-16]. 他们发现, 网络在耦合强度大于某个临界值时, 渗流相变呈现一阶相变, 反之为二阶相变, 同时理论获得了耦合随机网络(ER-ER 网络)渗流相变从一阶相变过渡到二阶相变的临界值.

在以上的研究中, 两个相互依赖网络之间的耦合边都是随机连接的. 但是, 构成基础设施系统的网络间的耦合一般不是随机的. 基于此, 对在不同耦合情况下相互作用网络鲁棒性的研究显得尤为重要. 2011 年, Buldyrev 等人发现, 当相互作用网络中两个耦合网络是相同度分布的 SF 网络, 同时其耦合顶点的度也相等时, 渗流相变呈二阶相变^[17]. Parshani 等人对相互作用网络提出了两种内相似性指标, 一个是耦合顶点之间的度度相似性, 另一个是耦合顶点相邻节点之间的度度相似性. 在他们研究的航运空运网络中发现, 如果两个耦合网络内部相似, 则该网络对随机攻击具有高度鲁棒性^[18]. 本文从更一般的角度研究了两个相互依赖网络之间的非随机耦合下的鲁棒性问题. 首先, 引入网络间的耦合关系模型 $p_{ij}(\alpha)$, 通过调整模型中参数 α 来控制耦合顶点的选择概率; 其次, 在所提耦合模型下分别对 SF-SF 网络和 ER-ER 网络进行数值实验分析, 发现模型的调控参数可以调控网络鲁棒性以及网络相变点随参数 α 的变化规律, 同时发现了网络从一阶相变到二阶相变的临界值 α_c , 且通过解析分析和数值实验, 获得了寻找该临界值的方法.

1 模型描述

本文对文献[11]中的一对一随机耦合模型中耦合连接规则作如下重新设置.

定义顶点数都为 N 的网络 A 和 B . 集合 N'_A 和 N'_B 分别为网络 A 和 B 中未耦合顶点的集合, 每建立一条耦合边, 则从集合 N'_A 和 N'_B 中删除相关顶点, 最后始终保证每个顶点都存在其耦合顶点. 设 k_{A_i} 是网络 A 中顶点 i 的度, k_{B_j} 是网络 B 中顶点 j 的度. N'_A 中顶点 i 与 N'_B 顶点 j 建立耦合边的概率设置为:

$$p_{ij}(\alpha) = \frac{(|k_{A_i} - k_{B_j}| + \epsilon)^\alpha}{\sum_{l \in N'_B} (|k_{A_i} - k_{B_l}| + \epsilon)^\alpha} \quad (1)$$

为了保证 $p_{ij}(\alpha)$ 始终大于 0, 在(1)式中增加了一个常数 ϵ ($1 > \epsilon > 0$).

在(1)式中容易得到: 当 $\alpha = 0$ 时, $p_{ij}(\alpha) = \frac{1}{N}$, 顶点之间的耦合属于随机耦合情形; 当 $\alpha < 0$ 时, 点 i 和点 j 度数越相近, 则 $p_{ij}(\alpha)$ 值越大; 当 $\alpha > 0$ 时, 点 i 和点 j 度数相差越大, 则 $p_{ij}(\alpha)$ 值越大. 这样, 参数 α 可以调控 A 网络与 B 网络顶点之间的耦合关系.

在现实世界中, 重要基础设施所涉及的网络之间的耦合一般是非随机耦合, 这种非随机耦合的耦合关系可能存在多种选择. 于是, 我们可以通过具体背景建立某种恰当的带控制参数的数学模型, 通过对模型的实验与理论分析, 找到一个控制参数 α , 使网络鲁棒性尽可能高, 这也就相当于找到了相互依存网络优化设计的一个方法.

2 实验结果与分析

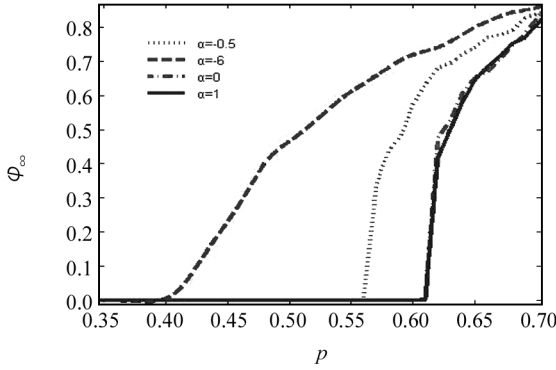
将模型公式应用到以 $1-p$ 概率使 A 网络中顶点随机失效的相互作用网络级联失效实验. 当模型应用于 SF-SF 网络时, 如图 1(a), (b). 当 $\alpha = 0$, $p_{ij}(\alpha) = \frac{1}{N}$, 网络间为随机耦合, 所得结果与文章[11]中的结果吻合. 随着 α 的增大或减小, 渗流阈值增大或减小一定程度就不再变化. 由图 1(a)可知, $\alpha \leq -6$ 时渗流相变已经连续. 考虑 SF 网络度分布对渗流阈值的影响时发现, SF 网络度分布指数 λ 对 SF-SF 网络渗流阈值影响不大, 如图 1(c). 对于 ER-ER 网络, 渗流阈值变化与 SF-SF 网络类似, 但是网络渗流始终存在明显的跳跃点, 如图 1(d).

SF 网络服从幂律分布, 大致可描述为 $P(k) \propto k^{-\lambda}$. 在相互作用网络中, 当耦合网络间的耦合边随机连接, 即 $\alpha = 0$ 时, 由于网络中的大部分点都为低度顶点, 只有很少的高度顶点, 导致 SF-SF 网络高度顶点和低度顶点的耦合概率很高. 因为遭受攻击后低度顶点容易脱离最大连通分支, 一旦与之耦合的高度顶点被破坏, 网络就很容易瓦解, 所以当 $\alpha \geq 0$ 时, SF-SF 网络会非常脆弱. 另一方面, 当 α 从 0 逐渐减小时, 度数越相似的顶点耦合概率增大, 低度顶点容易脱离最大连通分支的特性对大度顶点的影响逐渐减小, 从而网

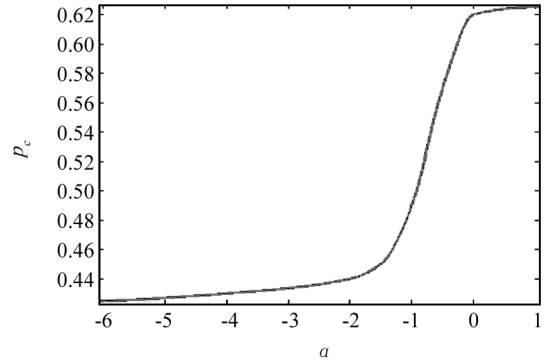
络的鲁棒性也逐渐增加。

对于 ER-ER 网络来说, ER 网络度分布为泊松分布, 高度数顶点和低度数顶点出现的概率相似. 当 $\alpha \geq 0$ 时, 高度顶点和低度顶点耦合的概率增大, 使高度顶点容易随着低度顶点的失效而失效, 导致渗流阈值 p_c 增大. 反之当 $\alpha < 0$ 时, 渗流阈值 p_c 就会减小. 与 SF-SF 网络相比, 在节点随机失效时, ER-ER 网络中顶点度数相对居中的节点被攻击概率很高, 而低度数顶点和高度数顶点被攻击的概率相对较低, 这样导致 ER 网络面对随机攻击更脆弱. 所以, ER-ER 网络在 $\alpha < 0$ 时, p_c 的变化小于 SF-SF 网络.

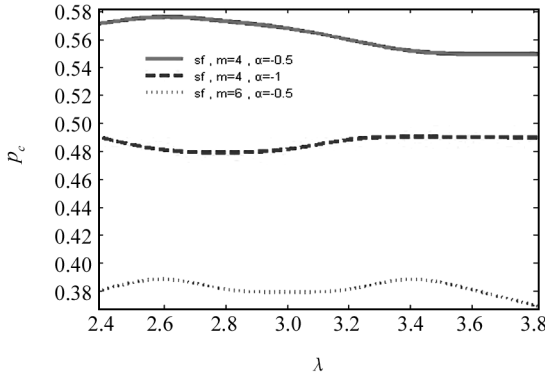
从 SF-SF 网络的实验结果看, 在 $\alpha \geq 0$ 时渗流相变出现跳跃的不连续相变, 而 $\alpha \leq -6$ 时渗流相变呈现连续相变, 所以提出一个假设: 存在某个临界值 α_c , 使得 $\alpha < \alpha_c$ 时, 网络呈现二阶相变, $\alpha > \alpha_c$ 时网络呈一阶相变.



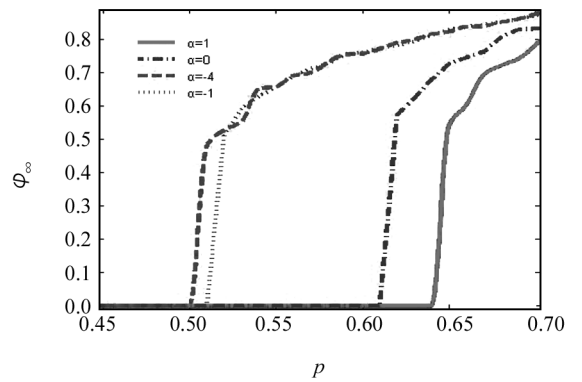
(a) SF-SF 网络以 $1-p$ 概率移除 A 网络部分顶点发生级联失效时 A 网络中最大连通分支大小 ϕ_∞ 与 p 的关系, 其中 $\lambda = 2.8$, 平均度 $m = 4$



(b) SF-SF 网络级联失效发生的渗流相变临界值 p_c 与 α 的关系



(c) SF-SF 网络渗流相变临界值 p_c 与 λ 的关系



(d) ER-ER 网络以 $1-p$ 概率移除 A 网络部分顶点发生级联失效时 A 网络中最大连通分支大小 ϕ_∞ 与 p 的关系, 平均度 $m = 4$

图 1 顶点数 $N = 30\,000$ 的 SF-SF 网络与 ER-ER 网络在模型控制下发生级联失效的数值模拟结果

3 寻找临界值 α_c

对于 SF-SF 网络中渗流相变的阶数变化, 希望能够寻找到 α_c , 满足条件: 当 $\alpha < \alpha_c$ 时, 渗流相变呈现二阶相变; 当 $\alpha > \alpha_c$ 时, 渗流相变呈一阶相变.

由于二阶相变是连续的, 而一阶相变不连续, 所以在跳跃点 $p = p_c$ 时, 两种情况下最大连通分支大小的增量截然不同.

引入式子:

$$s(p) = \frac{p^+ - p^-}{\phi_{\infty+}(p) - \phi_{\infty-}(p)} = \frac{dp}{d\phi(p)} \quad (2)$$

其中 $\phi_{\infty+}(p)$ 和 $\phi_{\infty-}(p)$ 分别表示网络在移除 $1 - p + \delta$ 部分和 $1 - p - \delta$ 部分的顶点并稳定后网络 A 中最

大连通分支的大小, 则 $s(p)$ 表示曲线在 p 点的斜率.

因为

$$d\varphi(p_c) = |\varphi_{\infty+}(p_c) - \varphi_{\infty-}(p_c)| = \max |\varphi_{\infty+}(p) - \varphi_{\infty-}(p)|$$

若每一个 dp 不变, 则有:

$$s(p_c) = \frac{dp}{d\varphi(p_c)} = \min \left\{ \frac{dp}{d\varphi(p)} \right\} \quad (3)$$

当网络渗流呈二阶相变时, 由连续的定义可以知道 $d\varphi(p_c)$ 更小, 从而使得 $s(p_c)$ 更大; 相反, 当网络呈一阶相变时, $d\varphi(p_c)$ 更大, $s(p_c)$ 反而更小. 由此性质可知在一阶相变转化为二阶相变时, $s(p_c)$ 变化迅速(如图(2)所示, 其中 $\lambda = 2.8$, 平均度 $m = 4$), 所以由该方式可以得到需要的临界值 α_c , 使得 α_c 满足上述的条件.

4 结 论

针对目前相互作用网络的研究情况, 本文通过引入模型来调节相互作用网络的耦合关系, 从更一般的角度研究了两个相互依赖网络之间的非随机耦合下的鲁棒性问题. 发现相互作用网络中网络之间随着度数相似的节点耦合概率增大, 系统的鲁棒性逐渐提高. 相对 ER-ER 网络, 模型对 SF-SF 网络鲁棒性的影响较大. 除此之外, 在研究 SF-SF 网络时发现, 模型参数存在一个临界值 α_c , 当 $\alpha < \alpha_c$ 时, 网络渗流呈现二阶相变, 而当 $\alpha > \alpha_c$ 时, 呈现一阶相变. 并且, 根据不同类型的网络渗流相变最大连通分支的变化特点, 得到了寻找该临界值 α_c 的方法.

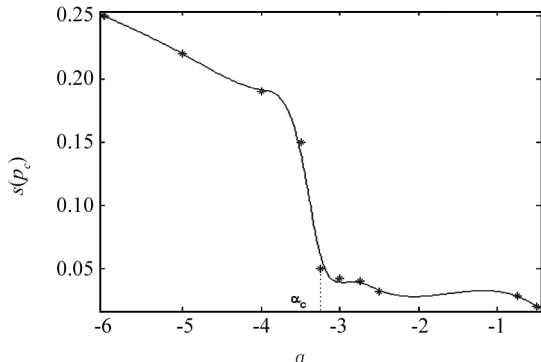


图 2 SF-SF 网络调控参数 α 与 $s(p_c)$ 的关系图

参考文献:

- [1] ALON U. Biological Networks: the Tinkerer as an Engineer [J]. Science, 2003, 11(301): 1866—1867.
- [2] KHANIN R, WIT E. How Scale-Free Are Biological Networks [J]. J Comput Biol, 2006, 13(3): 810—818.
- [3] GAO Z Y, ZHAO X M, Huang H J, et al. Research on Problems Related to Complex Networks and Urban Traffic Systems [J]. J Tran Sys Eng & Info Tech, 2006, 6(3): 41—47.
- [4] FALOUTSOS M, FALOUTSOS P, FALOUTSOS C. On Power-Law Relationships of the Internet Topology [J]. Comput Commun Rev, 2000, 83(29): 378—382.
- [5] BONANNO G, CALDARELLIG, LILLO F, et al. Topology of Correlation-Based Minimal Spanning Trees in Real and Model Markets [J]. Physical Review E, 2003, 68(4): 046130.
- [6] JACKSON M O, ROGERS B W. Meeting Strangers and Friends of Friends: How Random are Social Networks? [J]. The American Economic Review, 2007(97): 890—915.
- [7] ROSATO V, ISSACHAROFF L, TIRITICCO F, et al. Modelling Interdependent Infrastructures Using Interacting Dynamical Models [J]. International Journal of Critical Infrastructures, 2008, 4(1—2): 63—79.
- [8] U S Canada Power System Outage Task Force. Final Report on the August 14th 2003 Blackout in the United States and Canada: Cause and Recommendations [EB/OL]. (2003—08—14)[2014—01—05]. <http://energy.gov/sites/prod/files/oeprod/DocumentsandMedia/BlackoutFinal-Web.pdf>.
- [9] BUNDE A, HAVLIN S. Fractals and Disordered Systems [M]. Berlin: Springer, 1996.
- [10] SCHNEIDER C, MOREIRA A, ANDRADE J J, et al. Mitigation of Malicious Attacks on Networks [J]. Proceeding of the National Academy of Sciences, 2011, 108(10): 3838—3841.
- [11] BULDYREV S V, PARSHANI R, STANLEY H E, et al. Catastrophic Cascade of Failures in Interdependent Networks [J]. Nature, 2010, 464(7291): 1025—1028.
- [12] PASHANI R, BULDRYREV S, HAVLIN S. Interdependent Networks: Reducing the Coupling Strength Leads to a Change from a First to Second Order Percolation Transition [J]. PRL, 2010, 105(4): 4870.

- [13] ZHOU D I, GAO J X, EUGENE S H. Percolation of Partially Interdependent Scale-free Networks [J]. Physical Review E, 2013, 87(5): 052812.
- [14] HUANG X Q, SHAO S, WANG H J. The Robustness of Interdependent Clustered Networks [J]. EPL, 2013, 101: 18002.
- [15] HUANG X Q, GAO J X, BULDYREV S V, et al. Robustness of Interdependent Networks Under Targeted Attack [J]. Physical Review E, 2011, 83(6): 065101.
- [16] DONG G G, GAO J X, TIAN L X. Percolation of Partially Interdependent Networks Under Targeted Attack [J]. Physical Review E, 2012, 85(1): 016112.
- [17] BULDYREV S V, SHERE N W. Interdependent Networks with Identical Degrees of Mutually Dependent Nodes [J]. Physical Review E, 2011, 83(1): 016112.
- [18] PARSHANI R, ROZENBLAT C, IETRI D, et al. Inter-Similarity Between Coupled Networks [J]. Europhysics Letters, 2011, 92(6): 68002.

The Effect of the Coupling Relationship of the Interdependent Networks on Their Robustness

YANG Cheng-cheng, YANG Chun

School of Mathematical Science, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610000, China

Abstract: We study the robustness of interdependent networks by constructing a model with a controllable parameter α . In this model, we change the similarity of degree between mutually dependent nodes by controlling the parameter α . In the research of coupled scale-free networks systems we find that percolation threshold p_c decreases with decreasing α , and that there is a threshold α_c . The giant component approaches zero continuously if $\alpha < \alpha_c$ and discontinuously if $\alpha > \alpha_c$. However, in a study of two coupled random networks systems, we find that compared with coupled scale-free networks, parameter α has little influence on percolation threshold.

Key words: interdependent network; coupling relationship; robustness; percolation threshold

责任编辑 张 枸

