第 37 卷第 9 期　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　2015 年 9 月
Vol. 37 No. 9　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Sep. 2015

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.09.023

# 冗余字典的扰动压缩数据分离①

刘春燕，　张　静，　王建军

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

**摘要：** 在冗余字典满足相互一致性条件和完全扰动矩阵满足限制性同构条件下，基于 $\ell_1$ -极小化方法，对压缩数据分离问题进行了研究，完美地重构了原始信号.

**关 键 词：** 压缩数据分离；$\ell_1$ -极小化；相互一致性；限制性等容性质；紧框架；完全扰动

**中图分类号：** TN911　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1673－9868(2015)09－0150－07

近年来，Donoho 和 Candes 等人提出的压缩感知[1-2]，已经实现了采样和压缩同时进行. 该理论是在信号(近似) 可压缩或稀疏条件下，以远低于 Nyquist 标准进行采样，从而实现对信号的准确重构. 该理论指出，对于任何信号只要能找到其相应的稀疏表示空间，就可以进行有效地压缩采样. 压缩感知理论的优点还在于它对应用科学的许多领域具有重大的影响，如统计学、信息科学、计算机科学等[3]. 目前压缩感知在模拟信息采样、核磁共振成像、合成孔径雷达成像、深孔探测成像、遥感成像、无线传感器网络、人脸识别等诸多领域展开了广泛研究[4-8]. 考虑如下模型：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{z} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \ll n)$ 是测量矩阵，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ 是观测信号，$\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{R}^n$ 是重构的目标信号，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$ 是一个噪音向量. 压缩感知所要解决的一个核心问题是从(1) 式中找出一个最稀疏的解 $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{R}^n$，即如下 $\ell_0$ -极小化问题：

$$\min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \| \tilde{\boldsymbol{f}} \|_0 \ \text{s. t.} \ \| \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{y} \|_2 \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

其中：$\| \tilde{\boldsymbol{f}} \|_0$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 中非零元素的个数，$\varepsilon$ 是 $\| \boldsymbol{z} \|_2$ 的上界. $\ell_0$ -极小化是一个 NP-hard 问题[9]，通常是将其转化为求解以下的 $\ell_1$ -极小化问题：

$$\min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \| \tilde{\boldsymbol{f}} \|_1 \ \text{s. t.} \ \| \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{y} \|_2 \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

如果 $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{R}^n$ 至多有 $k$ $(k \ll n)$ 个非零元素，那么称向量 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 为 $k$ -稀疏信号，并记为 $\| \tilde{\boldsymbol{f}} \|_0 \leqslant k$. 由于实际应用中，很多信号 $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{R}^n$ 并不具有稀疏性，但是这些信号在一些字典 $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ $(d \geqslant n)$ 上，能由稀疏向量进行表示[9-12]，即存在稀疏向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$，使得 $\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}$，则(1) 式的等价形式为：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \tag{4}$$

从而通过 $\ell_1$ -极小化算法可重构原始信号 $\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{D}\hat{\boldsymbol{x}}$[9,13-14]. 然而在现实世界中真实存在的数据还表现出诸多

① 收稿日期：2014－10－22
基金项目：国家自然科学基金(NO. 61273020).
作者简介：刘春燕(1989－)，女，四川资阳人，硕士研究生，主要从事海量数据分析和压缩感知方面的研究.
通信作者：王建军，教授.

异于传统数据的其它结构，比如多模态数据，其子部分的形态各不相同. 这类数据的处理来自于很多应用问题，如：声音数据处理、神经生物学的图像数据处理[17]. 从数学上讲，任意信号$\widetilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{R}^n$都可以被描述为$\widetilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 (\boldsymbol{f}_1 \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{f}_2 \in \mathbb{R}^n)$，文献[16]提出并研究了如下的$\ell_1$-极小化问题：

$$(\overline{\boldsymbol{f}}_1, \overline{\boldsymbol{f}}_2) = \arg \min_{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in \mathbb{R}^n} \| \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_1 \|_1 + \| \boldsymbol{D}_2^T \boldsymbol{f}_2 \|_1 \ \text{s.t.}\ \widetilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 \tag{5}$$

其误差上限估计为：

$$\| \overline{\boldsymbol{f}}_1 - \boldsymbol{f}_1 \|_2 + \| \overline{\boldsymbol{f}}_2 - \boldsymbol{f}_2 \|_2 \leqslant \frac{\| \boldsymbol{D}_{1J_1^c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_1 \|_1 + \| \boldsymbol{D}_{2J_2^c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_2 \|_1}{1 - 2\mu_c}$$

其中$\mu_c < 0.5$，且$\mu_c$表示$\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$关于索引集$J_1, J_2$的相互一致性.

为了方便表述，我们首先给出以下记号.

1）给定正整数$d$，$[d] = \{1, 2, \cdots, d\}$，记索引集$J \subset [d]$.

2）给定正整数$k \in [d]$，记向量$\boldsymbol{x}$的最优$k$-项逼近

$$\boldsymbol{x}_k = \arg \min_{\| \boldsymbol{y} \|_0 \leqslant k} \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|_1$$

记$\boldsymbol{x}_k^{\ c} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k$.

3）记$\| \boldsymbol{A} \|_2^{(k)} = \sigma_{\max}^{(k)}(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的所有$k$列子矩阵中的最大特征值.

4）$\boldsymbol{D}_J \in \mathbb{R}^{n \times |J|}$表示从$\boldsymbol{D}$中取出索引集$J$对应的列所组成的矩阵，$\boldsymbol{D}_{1J}$表示从矩阵$\boldsymbol{D}_1$中取出索引集$J$对应的列所组成的矩阵，记$\boldsymbol{D}_J^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{D}_J)^{\mathrm{T}}$.

5）记$K_{\boldsymbol{A}}^{(k)} = \dfrac{\sqrt{1+\delta_k}}{\sqrt{1-\delta_k}}$，$\alpha_{\boldsymbol{A}} = \dfrac{\| \boldsymbol{A} \|_2}{\sqrt{1-\delta_k}}$，$r_k = \dfrac{\| \boldsymbol{x}_k^{\ c} \|_2}{\| \boldsymbol{x}_k \|_1}$，$s_k = \dfrac{\| \boldsymbol{x}_k^{\ c} \|_1}{\sqrt{k} \| \boldsymbol{x}_k \|_1}$，且$r_k, s_k \ll 1$.

下面通过3类相对误差上限来量化矩阵$\boldsymbol{E}$与噪音向量$\boldsymbol{e}$：

$$\| \boldsymbol{E} \|_2 \leqslant \varepsilon_{\boldsymbol{A}} \| \boldsymbol{A} \|_2 \qquad \| \boldsymbol{E} \|_2^{(k)} \leqslant \varepsilon_{\boldsymbol{A}}^{(k)} \| \boldsymbol{A} \|_2^{(k)} \qquad \| \boldsymbol{e} \|_2 \leqslant \varepsilon_{\boldsymbol{y}} \| \boldsymbol{y} \|_2$$

其中：$\varepsilon_{\boldsymbol{A}}, \varepsilon_{\boldsymbol{A}}^{(k)}, \varepsilon_{\boldsymbol{y}}$表示相对误差上限；$\| \boldsymbol{A} \|_2, \| \boldsymbol{A} \|_2^{(k)}, \| \boldsymbol{y} \|_2 \neq 0$；$\varepsilon_{\boldsymbol{A}}, \varepsilon_{\boldsymbol{A}}^{(k)}, \varepsilon_{\boldsymbol{y}} < 1$.

考虑数学问题：设$\widetilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 (\boldsymbol{f}_1 \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{f}_2 \in \mathbb{R}^n)$，基于$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$的$\ell_1$-极小化的数据分离方法如下[12]：

$$(\overline{\boldsymbol{f}}_1, \overline{\boldsymbol{f}}_2) = \arg \min_{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in \mathbb{R}^n} \| \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_1 \|_1 + \| \boldsymbol{D}_2^T \boldsymbol{f}_2 \|_1 \ \text{s.t.}\ \| \boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) - \boldsymbol{y} \|_2 \leqslant \varepsilon \tag{6}$$

设线性测量$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) + \boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} (m \ll n)$是测量矩阵，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$是误差向量且$\| \boldsymbol{z} \|_2 \leqslant \varepsilon$. 设$\boldsymbol{D}_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}, \boldsymbol{D}_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$是两个紧框架，则$\widetilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{f}}$，$\widetilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{D}_2^T \widetilde{\boldsymbol{f}}$，对所有$\widetilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{R}^n$，设

$$d = d_1 + d_2$$

令

$$\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{D}_1 \mid \boldsymbol{D}_2] \qquad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{pmatrix}$$

则有$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$，从而问题(6)的等价问题为：

$$\overline{\boldsymbol{f}} = \arg \min_{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{2n}} \| \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} \|_1 \ \text{s.t.}\ \| \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} - \boldsymbol{y} \|_2 \leqslant \varepsilon \tag{7}$$

在一定条件下，文献[12]获得了(7)式的部分扰动结果. 本文在$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$和加性噪音下，研究了完全扰动的$\ell_1$-极小化问题，即：

$$(\overline{\boldsymbol{f}}_1, \overline{\boldsymbol{f}}_2) = \arg \min_{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in \mathbb{R}^n} \| \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_1 \|_1 + \| \boldsymbol{D}_2^T \boldsymbol{f}_2 \|_1 \ \text{s.t.}\ \| \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) - \boldsymbol{y} \|_2 \leqslant \varepsilon'_{\boldsymbol{A}, k, \boldsymbol{y}} \tag{8}$$

问题(8)的等价问题为：

$$\overline{\boldsymbol{f}} = \arg \min_{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{2n}} \| \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} \|_1 \ \text{s.t.}\ \| \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} - \boldsymbol{y} \|_2 \leqslant \varepsilon'_{\boldsymbol{A}, k, \boldsymbol{y}} \tag{9}$$

其中：$\hat{A}=A+E$（$E\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为 $A$ 的扰动矩阵），$\varepsilon'_{A,k,y}=\left(\dfrac{\varepsilon_A^{(k)}K_A(k)+\varepsilon_A\alpha_A r_k}{1-K_A^{(k)}(r_k+s_k)}+\varepsilon_y\right)\|y\|_2\geqslant 0$ 为全噪音参数.

本文在上述完全扰动和冗余字典 $D$ 下，利用相互一致性和 RIP 条件研究了完全扰动 $\ell_1$ -极小化问题(9)，获得了该问题的误差上限估计.

接下来给出本文的主要结果. 为此，首先给出与本文内容相关的一些定义.

**定义 1**　($\hat{A}$ − RIP) 设 $\delta_k(k=1,2,\cdots)$ 为矩阵 $A$ 的限制性等容常数，

$$\hat{\delta}_{k,\max}=(1+\delta_k)(1+\varepsilon_A^{(k)})^2-1$$

对于任意 $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$，$\|\bar{x}\|_0\leqslant k$，满足

$$(1-\hat{\delta}_k)\|\bar{x}\|_2^2\leqslant\|\hat{A}\bar{x}\|_2^2\leqslant(1+\hat{\delta}_k)\|\bar{x}\|_2^2 \tag{10}$$

的最小常数 $\hat{\delta}_k\leqslant\hat{\delta}_{k,\max}$，称为矩阵 $\hat{A}=A+E$ 的限制性等容常数(RIC)，且称矩阵 $\hat{A}$ 服从限制性等容性质(RIP).

**定义 2**　($\hat{A}-D-$RIP) 设 $\delta_k(k=1,2,\cdots)$ 为矩阵 $A$ 的限制性等容常数，$\hat{\delta}_{k,\max}=(1+\delta_k)(1+\varepsilon_A^{(k)})^2-1$，对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$，$\|x\|_0\leqslant k$，满足

$$(1-\hat{\delta}_k)\|Dx\|_2^2\leqslant\|\hat{A}Dx\|_2^2\leqslant(1+\hat{\delta}_k)\|Dx\|_2^2 \tag{11}$$

的最小常数 $\hat{\delta}_k\leqslant\hat{\delta}_{k,\max}$，称为矩阵 $\hat{A}=A+E$ 的 $D-$限制性等容常数($D-$RIC)，且称矩阵 $\hat{A}$ 服从 $D-$限制性等容性质($D-$RIP).

特别地，类似于文献[15]的定理 1 可知

$$1-(1-\delta_k)(1-\varepsilon_A^{(k)})^2\leqslant\hat{\delta}_k\leqslant(1+\delta_k)(1+\varepsilon_A^{(k)})^2-1 \tag{12}$$

**定义 3**　设 $D_1=(d_{1i})_{1\leqslant i\leqslant d_1}$，$D_2=(d_{2j})_{1\leqslant j\leqslant d_2}$，$D_1$ 与 $D_2$ 的相互一致性定义为

$$u_1=u_1(D_1;D_2)=\max_{i,j}|\langle d_{1i},d_{2j}\rangle|$$

我们针对问题(9)，获得了如下结果：

**定理 1**　设 $y=A(f_1+f_2)+z$，$D_1\in\mathbb{R}^{n\times d_1}$，$D_2\in\mathbb{R}^{n\times d_2}$ 是两个任意的紧框架，$D=[D_1|D_2]$，$\varphi=\begin{pmatrix}D_1&0\\0&D_2\end{pmatrix}$，$f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$，$k<b\leqslant 4a$（其中 $k,b,a$ 为正整数），对于信号 $f$ 满足

$$r_k+s_k<\frac{1}{K_A^{(k)}}$$

若

$$\begin{aligned}&u_1(k+a)(1-\delta_{k+a})(1-\varepsilon_A^{(k+a)})^2+4\rho(1+\delta_b)(1+\varepsilon_A^{(b)})^2+\\&2(1-\rho)^2(1+\delta_{k+a})(1+\varepsilon_A^{(k+a)})^2<\\&4(1-\rho)^2\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\delta_{k+a}$，$\delta_b$ 为 $A$ 的 $D-$RIP 常数，$u_1$ 为 $D_1$，$D_2$ 的相互一致性常数，$\rho=\dfrac{k}{b}$，则

$$\|\bar{f}-f\|_2\leqslant C_0\varepsilon'_{A,k,y}+C_1\frac{\|\varphi^{\mathrm{T}}f-(\varphi^{\mathrm{T}}f)_k\|_1}{\sqrt{k}} \tag{14}$$

其中 $C_0$，$C_1$ 为常数.

**注 1**　部分扰动情形（即 $E=0$，也即 $\varepsilon_A=\varepsilon_A^{(k)}=0$，$\hat{\delta}_k=\delta_k$）下获得

$$\| \bar{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f} \|_2 \leqslant \boldsymbol{C}_0 \varepsilon + \boldsymbol{C}_1 \frac{\| \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} - (\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f})_k \|_1}{\sqrt{k}}$$

这与文献[12]的结果完全吻合.

**注 2** 考虑不同的划分(即 $a$,$b$ 的不同取法),得到不同完全扰动恢复条件:

1) 若 $b = 4k$,$a = k$,$0 < \varepsilon_{\boldsymbol{A}}^{(4k)} < 0.01$,$\delta_{4k} < 0.01$,$u_1 k < 0.03$,则

$$\| \bar{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f} \|_2 \leqslant \boldsymbol{C}_0 \varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}_1 \frac{\| \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} - (\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f})_k \|_1}{\sqrt{k}}$$

2) 若 $b = 8k$,$a = 2k$,$0 < \varepsilon_{\boldsymbol{A}}^{(2k)} < 0.01$,$\delta_{8k} < 0.31$,$u_1 k < 0.17$,则

$$\| \bar{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f} \|_2 \leqslant \boldsymbol{C}_0 \varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}_1 \frac{\| \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} - (\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f})_k \|_1}{\sqrt{k}}$$

3) 若 $b = 8k$,$a = 2k$,$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$,$0 < \varepsilon_{\boldsymbol{A}}^{(3k)} < 0.01$,$u_1(k_1 + k_2) < 0.16$,则

$$\| \bar{\boldsymbol{f}}_1 - \boldsymbol{f}_1 \|_2 + \| \bar{\boldsymbol{f}}_2 - \boldsymbol{f}_2 \|_2 \leqslant \boldsymbol{C}_0 \varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}_1 \frac{\| \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_1 - (\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_1)_{k_1} \|_1 + \| \boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_2 - (\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_2)_{k_2} \|_1}{\sqrt{k_1 + k_2}}$$

**注 3** 信号重构速度受噪音和最佳 $k$ 项的控制,特别地,当 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上为 $k$-稀疏,即在 $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f})_k$ 和无噪音情形($\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}} = 0$)下,完美重构原始信号即 $\boldsymbol{f} = \bar{\boldsymbol{f}}$.

**定理 1 的证明** 设 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} - \bar{\boldsymbol{f}}$,$\bar{\boldsymbol{f}}$ 是(9)式的解,$\boldsymbol{f}$ 是原始信号,$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$,且设 $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}$ 中前 $k$ 个是最大的值. 假设 $| x_{k+1} | \geqslant | x_{k+2} | \geqslant \cdots \geqslant | x_d |$,设

$$J = J_0 = \{1, 2, \cdots, k\} \qquad J_* = \{k+1, k+2, \cdots, k+a\}$$

$$J_i = \{k + a + (i-1)b + 1, \cdots, k + a + ib\} \qquad i = 1, 2, \cdots$$

从而最后一个集合中的元素小于或者等于 $b$. 令 $J_{0*} = J_0 \cup J_*$,设

$$J^1 = J \cap [d_1] \qquad J^2 = \{j - d_1 \mid j \in J \backslash J^1\}$$

由于 $\boldsymbol{D}_1$,$\boldsymbol{D}_2$ 为紧框架,则 $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{I}$,从而 $\boldsymbol{\varphi}$ 也为紧框架. 那么,我们有:

$$\begin{aligned}
\| \boldsymbol{h} \|_2^2 = \| \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|_2^2 = \| \boldsymbol{\varphi}_{J_{0*}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|_2^2 + \| \boldsymbol{\varphi}_{J_{0*}^c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|_2^2 = \\
\| \boldsymbol{D}_{1J_{0*}^1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_1 \|_2^2 + \| \boldsymbol{D}_{2J_{0*}^2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_2 \|_2^2 + \| \boldsymbol{\varphi}_{J_{0*}^c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|_2^2 = \\
\langle \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_{1J_{0*}^1}^* \boldsymbol{h}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{D}_{1J_{0*}^2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_2 \rangle + \| \boldsymbol{\varphi}_{J_{0*}^c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|_2^2 \leqslant \\
\| \boldsymbol{h}_1 \|_2 \| \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_{1J_{0*}^1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_1 \|_2 + \| \boldsymbol{h}_2 \|_2 \| \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{D}_{2J_{0*}^2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_2 \|_2 + \| \boldsymbol{\varphi}_{J_{0*}^c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|_2^2 \leqslant \\
\| \boldsymbol{h}_1 \|_2 \| \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_{1J_{0*}^1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_1 \|_2 + \| \boldsymbol{h}_2 \|_2 \| \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{D}_{2J_{0*}^2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_2 \|_2 + (\sum_{i \geqslant 1} \| \boldsymbol{\varphi}_{J_i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|)^2
\end{aligned}$$

利用均值不等式可得,

$$\| \boldsymbol{h} \|_2^2 \leqslant \frac{c_1 \| \boldsymbol{h}_1 \|_2^2}{2} + \frac{\| \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_{1J_{0*}^1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_1 \|_2^2}{2c_1} + \frac{c_1 \| \boldsymbol{h}_2 \|_2^2}{2} + \frac{\| \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{D}_{2J_{0*}^2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_2 \|_2^2}{2c_1} + (\sum_{i \geqslant 1} \| \boldsymbol{\varphi}_{J_i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|)^2$$

即

$$\| \boldsymbol{h} \|_2^2 \leqslant \frac{c_1 \| \boldsymbol{h} \|_2^2}{2} + \frac{1}{2c_1} ( \| \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_{1J_{0*}^1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_1 \|_2^2 + \| \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{D}_{2J_{0*}^2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_1 \|_2^2 ) + (\sum_{i \geqslant 1} \| \boldsymbol{\varphi}_{J_i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|)^2 \tag{15}$$

为了获得 $\| \boldsymbol{h} \|_2^2$ 的上界,下面我们估计 $\| \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_{1J_{0*}^1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_1 \|_2^2 + \| \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{D}_{2J_{0*}^2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_1 \|_2^2$ 与 $\sum_{i \geqslant 1} \| \boldsymbol{\varphi}_{J_i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|$,

由于 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 是可行解,我们可得[15]

$$\begin{aligned}
\| \hat{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \|_2 = \| \hat{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{f} - \bar{\boldsymbol{f}}) \|_2 \leqslant \\
\| \hat{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} - \boldsymbol{y} \|_2 + \| \hat{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{y} \|_2 \leqslant
\end{aligned}$$

$$2\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}}$$

令

$$\rho=\frac{k}{b}\qquad \eta=\frac{2\|\boldsymbol{\varphi}_{J^c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\|_1}{\sqrt{k}}$$

$$\sum_{i\geqslant 1}\|\boldsymbol{\varphi}_{J_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\|_2\leqslant\sqrt{\rho}(\|\boldsymbol{h}\|_2+\eta) \tag{16}$$

$$\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}_{J_{0*}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\|_2^2\leqslant\frac{1}{1-\hat{\delta}_{k+a}}\left[2\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}}+\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}(\|\boldsymbol{h}\|_2+\eta)\right]^2 \tag{17}$$

$$\|\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_{1J_{0*}^1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_1\|_2^2+\|\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_{2J_{0*}^2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_2\|_2^2\leqslant$$
$$\frac{u_1(k+a)\|\boldsymbol{h}\|_2^2}{2}+\frac{1}{1-\hat{\delta}_{k+a}}\left[2\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}}+\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}(\|\boldsymbol{h}\|_2+\eta)\right]^2 \tag{18}$$

由(15),(16),(18)式可得

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{h}\|_2^2\leqslant{}&\frac{c_1\|\boldsymbol{h}\|_2^2}{2}+\rho(\|\boldsymbol{h}\|_2+\eta)^2+\frac{1}{2c_1}\Bigg(\frac{u_1(k+a)\|\boldsymbol{h}\|_2^2}{2}+\\
&\frac{1}{1-\hat{\delta}_{k+a}}\left[2\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}}+\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}(\|\boldsymbol{h}\|_2+\eta)\right]^2\Bigg)=\\
&\left(\frac{c_1}{2}+\frac{u_1(k+a)}{4c_1}+\rho+\frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\right)\|\boldsymbol{h}\|_2^2+\\
&\frac{2(\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}})^2}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}+\left(\rho+\frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\right)\eta^2+\\
&\frac{\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}2\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}}\eta+\frac{\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}2\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}}\|\boldsymbol{h}\|_2+\\
&\left(\rho+\frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\right)2\eta\|\boldsymbol{h}\|_2\leqslant\\
&\left(\frac{c_1}{2}+\frac{u_1(k+a)}{4c_1}+\rho+\frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\right)\|\boldsymbol{h}\|_2^2+\\
&\frac{2(\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}})^2}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}+\left(\rho+\frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\right)\eta^2+\\
&\frac{\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}((\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}})^2+\eta^2)+\\
&\frac{\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\left(\frac{(\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}})^2}{c_2}+c_2\|\boldsymbol{h}\|_2^2\right)+\\
&\left(\rho+\frac{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\right)\left(\frac{\eta^2}{c_3}+c_3\|\boldsymbol{h}\|_2^2\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

合并(19)式得

$$K_1\|\boldsymbol{h}\|_2^2\leqslant K_2(\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}})^2+K_3\eta^2$$

其中

$$K_1 = 1 - \frac{c_1}{2} - \frac{u_1(k+a)}{4c_1} - \rho - \frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} - \frac{c_2\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} - c_3\left(\rho + \frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\right)$$

$$K_2 = \frac{2}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} + \frac{\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} + \frac{\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}}{c_1c_2(1-\hat{\delta}_{k+a})}$$

$$K_3 = \rho + \frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} + \frac{\sqrt{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})} + \frac{1}{c_3}\left(\rho + \frac{\rho(1+\hat{\delta}_b)}{c_1(1-\hat{\delta}_{k+a})}\right)$$

于是，

$$\|\boldsymbol{h}\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\varepsilon'_{\boldsymbol{A},k,\boldsymbol{y}} + \sqrt{\frac{K_3}{K_1}}\eta \qquad K_1 > 0$$

为使 $K_1 > 0$，需使：

$$c_1 = \bar{c}_1 = \sqrt{\frac{u_1(k+a)}{2} + \frac{2\rho(1+\hat{\delta}_b)}{1-\hat{\delta}_{k+a}}} \qquad c_2 \rightarrow 0_+ \qquad c_3 \rightarrow 0_+$$

即

$$u_1(k+a)(1-\hat{\delta}_{k+a}) + 4\rho\hat{\delta}_b + 2(1-\rho)^2\hat{\delta}_{k+a} < 2(1-\rho)^2 - 4\rho \tag{20}$$

利用(12) 式，我们有

$$\hat{\delta}_{k+a} \leqslant (1+\delta_{k+a})(1+\varepsilon_A^{(k+a)})^2 - 1$$

$$\hat{\delta}_b \leqslant (1+\delta_b)(1+\varepsilon_A^{(b)})^2 - 1$$

$$1-\hat{\delta}_{k+a} \leqslant (1-\delta_{k+a})(1-\varepsilon_A^{(k+a)})^2$$

由(20) 式可得定理结果. 综上，定理 1 证毕.

**参考文献：**


[1] NYQUIST H. Certain Topics in Telegraph Transmission Theory [J]. American Institute of Electrical Engineers，1928，47(2)：617－644.

[2] CANDES E，ROMBERG J，TAO T. Robust Uncertainty Principles：Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information [J]. IEEE Transactions on Information Theory，2006，52(2)：489－509.

[3] DONOHO D. Compressed Sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory，2006，52(4)：1289－1306.

[4] BARANIUK R G. Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling [J]. IEEE Siganl Processing Magazine，2008，25(2)：83－91.

[5] LUSTIG M，DONOHO D，PAULY J M. Sparse MRI：The Application of Compressed Sensing for Rapid MR Imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine，2007，58(6)：1182－1195.

[6] 王文东，王 尧，王建军. 一类光滑加权块 $l_1$ 算法的收敛性分析与数值仿真实验 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2014，36(5)：72－77.

[7] WRIGHT J，YANG A Y，GANESH A，et al. Robust Face Recognition via Sparse Representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence，2009，31(2)：210－227.

[8] MAJUMDAR A，WARD R. Compressed Sensing of Color Images [J]. Signal Processing，2010，90(12)：3122－3127.

[9] CHEN S，DONOHO D L，SAUNDERS M A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit [J]. SIAM J Sci Comp，1999，20(1)：33－61.

[10] BRUCKSTEIN A M，DONOHO D L，ELAD M. From Sparse Solutions of Systems of Eqnarrays to Sparse Modeling of Signals and Images [J]. SIAM Rev，2009，51：34－81.

[11] CANDES E，ELDAS Y C，NEEDELL D，et al. Compressed Sensing with Coherent and Redundant Dictionaries [J]. Appl Comput Harmon Anal，2011，31：59－73.

[12] LIN J H，LI S，SHEN Y. Compressed Data Separation with Redundant Dictionaries [J]. IEEE Transactions on Information Theory，2013，59(7)：4309－4315.

[13] ELAD M，MILANFAR P，RUBINSTEIN R. Analysis Versus Synthesis in Signal Priors [J]. Inverse Problem，2007，23：947－968.

[14] RAUHUT H，SCHNASS K，VANDERGHEYNST P. Compressed Sensing and Redundant Dictionaries [J]. IEEE Trans Inf Theory，2008，54(5)：2210－2219.

[15] HERMAN M A，STROHMER T. General Deviants：an Analysis of Perturbations in Compressed Sensing [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing，4(2)：342－349.

[16] DONOHO D L，KUTYNIOK G. Microlocal Analysis of the Geometric Separation Problem [J]. Commun Pure Appl Math，2013，66：1－47.

[17] CAI J，OSHER S，SHEN Z. Split Bregman Methods and Frame Based Image Restoration [J]. Siam J Multiscale Model Simul，2009，8：337－369.

# Compressed Data Separation of Redundant Dictionaries of Perturbation

LIU Chun-yan，　ZHANG　Jing，　WANG Jian-jun

*School of Mathematics and Statistic，Southwest University，Chongqing 400715，China*

**Abstract**：Compressed data separation is one of the hot research theories of signal processing. Under the condition that the redundant dictionary satisfies a mutual coherence and the perturbation matrix satisfies a restricted isometry property，the authors of this paper research compressed data separation problems for $L_1$-minimization method，and achieve the perfect reconstruction of the original signal.

**Key words**：compressed data separation；$L_1$-minimization；mutual coherence；restricted isometry property (RIP)；tight frame；perturbation

**责任编辑**　张　枸