DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.10.002

闭正则模糊拟阵的单点延拓[①]

李尧龙

渭南师范学院 数学与信息科学学院, 陕西 渭南 714000

摘要: 定义了闭正则模糊拟阵的单点系列延拓与单点平行延拓, 研究了闭正则模糊拟阵的单点系列延拓与单点平行延拓的若干性质, 得到了闭正则模糊拟阵的单点系列延拓与单点平行延拓还是闭正则模糊拟阵, 给出了闭正则模糊拟阵与截拟阵延拓之间的关系.

关 键 词: 模糊拟阵; 单点延拓; 闭正则模糊拟阵; 截拟阵

中图分类号: O157.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2015)10-0009-06

拟阵的概念是由 Whitey 于 1935 年提出的, 它是在推广图和矩阵时提出的一种新理论. 此后, Birkhorff, Dilworth 和 Maclance 等研究了拟阵的几何方面的问题以及拟阵与格论的关系. 20 世纪 60 年代, 加拿大数学家 Tutte 把拟阵理论与图论充分地结合起来, 取得了一系列开创性的成果. Edmonds, Minty 等人把图论算法推广到拟阵理论中, 使得拟阵理论被广泛应用到组合优化、整数规划、网络流、电网络及信息安全等许多应用领域. Welsh 与 Oxley 研究了拟阵的结果, 拟阵与格的关系以及拟阵的极值等, 并于 1976 年出版了拟阵理论的专著, 标志着拟阵理论的成熟[1-2]. 拟阵理论为图论、线性代数、格论等数学研究的许多领域提供了简单却非常有用的研究方法. 近 30 年来, 由于组合优化理论的快速发展, 拟阵理论的研究也取得了长足发展, 目前拟阵理论已经成为一个日益引人瞩目且生气勃勃的应用数学分支[3].

拟阵理论主要是研究一个有限集合的子集合上的抽象相关关系, 具有高度的概括性和抽象性. 确定一个集合上拟阵的方法很多, 一个拟阵可以从独立集、基、极小圈、闭包算子和闭集等概念出发去定义, 这使得拟阵理论更便于应用到解决实际问题中. 拟阵的一个重要应用就是在组合优化中, 其背景如下[1-3]:

设 E 是一个非空有限集合, $\mathscr{I}$ 为 E 的子集族. 令 $\omega: E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个权函数, 将其扩张为 $\omega: 2^E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, 使得 $\forall A \in 2^E$, $\omega(A) = \sum\limits_{e \in A} \omega(e)$. 考虑以下优化问题:

$$\max \omega(B) \text{ s.t. } B \in \mathscr{I} \tag{1}$$

则 Greedy 算法对优化问题(1) 有效当且仅当 $\mathscr{I}$ 为 E 上的某个拟阵的独立集族.

在实际问题中, 权函数 $\omega: E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 的值未必是一个具体的实数, 它的值可能是不确定的, 也许我们只能确定它在某个区间范围内, 甚至它仅仅是一个模糊区间或模糊数. 其形式还有:

(i) $\omega: [0, 1]^E \longrightarrow \mathbb{R}_+$;

(ii) $\omega: 2^E \longrightarrow \mathbb{R}_+([0, 1])$, 这里 $\mathbb{R}_+([0, 1])$ 表示模糊正实数的全体;

(iii) $\omega: [0, 1]^E \longrightarrow \mathbb{R}_+([0, 1])$.

① 收稿日期: 2015-05-20
基金项目: 国家自然科学基金项目(11201112); 陕西省自然科学基础研究计划项目(2014JM1026); 渭南师范学院特色学科建设项目(14TSXK02); 渭南师范学院科研基金项目(13YKS005).
作者简介: 李尧龙(1970-), 男, 陕西渭南人, 教授, 主要从事模糊拟阵理论的研究.

为了解决上述权函数对应的最优化问题，一般拟阵就有其局限性. 1988 年，以情形(i)为背景，Goetschel 和 Voxman[4] 引入了拟阵的一种模糊化方法，开始了 Goetschel-Voxman 模糊拟阵(简称 G-V 模糊拟阵)的研究. 在这之后，他们研究了 G-V 模糊拟阵的性质与结构，并给出了 G-V 模糊拟阵的基、极小圈、秩函数、积与和，以及 Greedy 算法等一系列性质[5-7]. 为了解决权函数为(ii)与(iii)的模糊优化问题，考虑模糊集本身的模糊势，史福贵教授提出了新的拟阵模糊化方法，引入了 L-拟阵、M-模糊化拟阵与(L，M)-模糊拟阵[8-9]. 易知一个 G-V 模糊拟阵等价于一个完全的[0，1]-拟阵. 应用新的模糊化方法，一个模糊化拟阵与模糊代数中的模糊群、模糊环、模糊域以及模糊向量空间的情形相协调.

G-V 模糊拟阵有许多好的性质. 由于闭正则 G-V 模糊拟阵可以应用 Greedy 算法来寻找一个极大或极小赋权模糊集，这使得 G-V 模糊拟阵的应用前景十分广泛[10-12]. 众所周知，基在矩阵和拟阵理论的研究中有十分重要的作用，矩阵和拟阵的许多性质也都是由基来刻画的，并且拟阵也可以用基集来等价地定义. 本文研究闭正则 G-V 模糊拟阵的单点延拓，包括系列延拓与平行延拓. 本文给出的闭正则 G-V 模糊拟阵与其截拟阵延拓之间的关系及其性质，为研究闭正则 G-V 模糊拟阵的其他性质提供了一定的基础.

为方便起见，以下称 G-V 模糊拟阵为模糊拟阵. 文中的概念和术语见文献[1，4－7，10].

1 闭正则模糊拟阵的单点系列延拓

定理 1 设 $\boldsymbol{M}=(E,\mathscr{I})$ 是一闭正则模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_m\leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本列，$x\in E$，$y\notin E$. $S_x^{r_1}$，$S_y^{r_1}$ 为两个尖. β 是 $\boldsymbol{M}=(E,\mathscr{I})$ 的基集. 令

$$\beta'=\{\mu\vee y_{r_1}\mid\mu\in\beta\}\cup\{\mu\vee x_{r_1}\mid\mu\in\beta\text{ 且 }x\notin\operatorname{supp}\mu\}$$

则 β' 是 $E'=E\cup y$ 上的一个闭正则模糊拟阵的基集.

证 由文献[7]的定理 4.1，我们证明 β' 满足闭正则模糊拟阵的基公理.

(Ⅰ) 显然 $\beta'\neq\varnothing$.

(Ⅱ) $\forall\mu'\in\beta'$，$\mathbb{R}_+(\mu')=\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$. 对于模糊集系统$(E',\beta')$，以 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant 1$ 作截系统，则$(E',C(\beta'))$是 E' 上的截系统. 以下证明$(E',C_{r_1}(\beta'))$是 E' 上的分明拟阵，即证 $C_{r_1}(\beta')$ 满足拟阵的基公理. 因为

$$C_{r_1}(\beta')=\{C_{r_1}(\mu)\cup y\mid\mu\in\beta\}\cup\{C_{r_1}(\mu)\cup x\mid\mu\in\beta\text{ 且 }x\notin\operatorname{supp}\mu\}$$

由文献[10]的定理 4.1 以及$(E,\mathscr{I})$是闭正则模糊拟阵，$C_{r_1}(\beta')$ 中任意两个元都有相同的基数.

以下证明 $C_{r_1}(\beta')$ 满足基交换性质. 设 A_1,A_2 是 $C_{r_1}(\beta')$ 中的任意两个元. $\forall a\in A_1$，若 $A_1=B_1\cup y$，$A_2=B_2\cup y$(其中 $B_1,B_2\in C_{r_1}(\beta)$).

(i) 若 $a=y$，取 $b=y$，有

$$(A_1\backslash a)\cup b\in C_{r_1}(\beta')$$

结论成立.

(ii) 若 $a\in B_1$，由于$(E,C(\beta))$是分明拟阵，则存在 $b\in B_2$，使得

$$(B_1\backslash a)\cup b\in C_{r_1}(\beta)$$

由 $C_{r_1}(\beta')$ 的定义知

$$((B_1\backslash a)\cup b)\cup y=((B_1\cup y)\backslash a)\cup b=(A_1\backslash a)\cup b\in C_{r_1}(\beta')$$

所以 $C_{r_1}(\beta')$ 是 $E'=E\cup y$ 上一个分明拟阵的基集族，即$(E',C_{r_1}(\beta'))$是 E' 上的分明拟阵.

同样地，可以证明$(E',C_{r_2}(\beta'))$，$(E',C_{r_3}(\beta'))$，…，$(E',C_{r_n}(\beta'))$是 E' 上的一个拟阵列，并且

$$(E',C_{r_2}(\beta'))\supset(E',C_{r_3}(\beta'))\supset\cdots\supset(E',C_{r_n}(\beta'))$$

容易证明，(i) 若 $r\in(r_{i-1},r_i]$，则 $I_r=I_{r_i}$；

(ii) 若 $r\in(r_i,1]$，则 $I_r=\varnothing$.

(Ⅲ) 若 $\xi,\eta\in\beta'$，且 $S_x^{r_1}\in\xi$($x\in\operatorname{supp}\mu-\operatorname{supp}\nu$，$\mu,\nu\in\beta$). 仅证 $\xi=\mu\vee S_y^{r_1}$，$\eta=\nu\vee S_y^{r_1}$ 的情形，

其他情形类似.

(i) 若 $S_x^{r_1}=S_y^{r_1}$，则显然 $(\xi\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}=\xi\in\beta'$；

(ii) 若 $S_a^{r_1}\in\mu(x\in\operatorname{supp}\mu\text{-}\operatorname{supp}\nu)$，由于 β 是 $(E,\mathscr{I})$ 的基集，由文献[7]的定理 4.1，有

$$S_b^{r_1}\in\mu(b\in\operatorname{supp}\nu\text{-}\operatorname{supp}\mu)$$

使得 $(\mu\backslash\backslash a)\vee S_b^{r_1}\in\beta$. 再由 β' 的定义，有

$$((\mu\backslash\backslash a)\vee S_b^{r_1})\vee S_y^{r_1}=((\mu\vee S_y^{r_1})\backslash\backslash a)\vee S_b^{r_1}=(\xi\backslash\backslash a)\vee S_b^{r_1}\in\beta'$$

由文献[10]的定理 4.1 知，β' 是 E' 上一个闭正则模糊拟阵的基集.

推论 1 设 $\boldsymbol{M}=(E,\mathscr{I})$ 是一闭正则模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_m\leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本列，$x\in E$，$y\notin E$. $S_x^{r_{i_0}}$，$S_y^{r_{i_0}}$ 为两个尖 $(i_0\in\{1,2,\cdots,m\})$. β 是 $\boldsymbol{M}=(E,\mathscr{I})$ 的基集. 令

$$\beta'=\{\mu\vee y_{r_{i_0}}\mid\mu\in\beta\}\cup\{\mu\vee x_{r_{i_0}}\mid\mu\in\beta\text{ 且 }x\notin\operatorname{supp}\mu\}$$

则 β' 是关于 $E'=E\cup y$ 上的一个闭正则模糊拟阵的基集.

称此类闭正则模糊拟阵 (E',β') 是闭正则模糊拟阵 $(E,\mathscr{I})$ 的一个单点系列延拓.

例 1 设 $E=\{a,b,c\}$，以及

$$I_{\frac{1}{2}}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

$$I_1=\{\varnothing,\{a\},\{c\}\}$$

易知 $I_1\subseteq I_{\frac{1}{2}}$. 令

$$I_r=\begin{cases}I_{\frac{1}{2}} & r\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\\[2mm] I_1 & r\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

以及

$$\mathscr{I}=\{\mu\in F(E)\mid C_r(\mu)\in I_r,\ r\in(0,1]\}$$

由文献[4]的定理 2.4，$(E,\mathscr{I})$ 是一个模糊拟阵.

令 $\mu_2=\chi_{\{a,c\}}\wedge\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$\mu_3=\chi_{\{b,c\}}\wedge\left(\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $\{\{a,c\},\{b,c\}\}$ 为 $\left(E,I_{\frac{1}{2}}\right)$ 的基集族.

令 $\mu_4=\chi_{\{a\}}$，$\mu_5=\chi_{\{c\}}$，其中 $\{\{a\},\{c\}\}$ 为 (E,I_1) 的基集族.

易知 $(E,\mathscr{I})$ 的基为

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & x=a\\ 0 & x=b\\ \dfrac{1}{2} & x=c\end{cases}\qquad \nu(x)=\begin{cases}0 & x=a\\ \dfrac{1}{2} & x=b\\ 1 & x=c\end{cases}$$

$$\tau(x)=\begin{cases}1 & x=a\\ \dfrac{1}{2} & x=b\\ 0 & x=c\end{cases}\qquad \lambda(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=a\\ 0 & x=b\\ 1 & x=c\end{cases}$$

由定理，易知 $\{\mu,\nu\}$ 为 $(E,\mathscr{I})$ 的基集族，$(E,\mathscr{I})$ 的基本列为 $0<\dfrac{1}{2}<1$.

因为所有的基的基数相等，所以 $(E,\mathscr{I})$ 是闭正则模糊拟阵.

设 $E'=\{a,b,c,d\}$，令

$$\beta'=\{\mu\vee S_d^{r_1}\mid\mu\in\beta\}\cup\{\mu\vee S_x^{r_1}\mid\mu\in\beta\text{ 且 }x\notin\operatorname{supp}\mu\}$$

则 $(E,\mathscr{I}')$ 的基集为 β'，即

$$(\mu \vee S_d^{\frac{1}{2}})(x)=\begin{cases}1 & x=a\\ 0 & x=b\\ \frac{1}{2} & x=c\\ \frac{1}{2} & x=d\end{cases} \qquad (\nu \vee S_d^{\frac{1}{2}})(x)=\begin{cases}0 & x=a\\ \frac{1}{2} & x=b\\ 1 & x=c\\ \frac{1}{2} & x=d\end{cases}$$

$$(\tau \vee S_d^{\frac{1}{2}})(x)=\begin{cases}1 & x=a\\ \frac{1}{2} & x=b\\ 0 & x=c\\ \frac{1}{2} & x=d\end{cases} \qquad (\lambda \vee S_d^{\frac{1}{2}})(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=a\\ 0 & x=b\\ 1 & x=c\\ \frac{1}{2} & x=d\end{cases}$$

$$(\mu \vee S_b^{\frac{1}{2}})(x)=\begin{cases}1 & x=a\\ \frac{1}{2} & x=b\\ \frac{1}{2} & x=c\\ 0 & x=d\end{cases} \qquad (\nu \vee S_a^{\frac{1}{2}})(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=a\\ \frac{1}{2} & x=b\\ 1 & x=c\\ 0 & x=d\end{cases}$$

$$(\tau \vee S_c^{\frac{1}{2}})(x)=\begin{cases}1 & x=a\\ \frac{1}{2} & x=b\\ \frac{1}{2} & x=c\\ 0 & x=d\end{cases} \qquad (\lambda \vee S_b^{\frac{1}{2}})(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=a\\ \frac{1}{2} & x=b\\ 1 & x=c\\ 0 & x=d\end{cases}$$

因为 β' 中所有元素的基数都相等，所以$(E, \mathscr{I}')$是闭正则模糊拟阵.

2 闭正则模糊拟阵的单点平行延拓

定理 2 设 $\boldsymbol{M}=(E, \mathscr{I})$ 是一闭正则模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_m\leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本列，$x\in E$，$y\notin E$，$S_x^{r_1}$，$S_y^{r_1}$ 为两个尖. β 是 $\boldsymbol{M}=(E, \mathscr{I})$ 的基集. 令

$$\beta'=\{(\mu\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}\mid \mu\in\beta,\ x\in \operatorname{supp}\mu\}\cup\beta$$

则 β' 是 $E'=E\cup y$ 上的一个闭正则模糊拟阵的基集.

证 我们证明 β' 是 $E'=E\cup y$ 上一个闭正则模糊拟阵的基集族.

(Ⅰ) 显然，$\beta'\neq\varnothing$.

(Ⅱ) $\forall\mu'\in\beta'$，$\mathbb{R}_+(\mu')=\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$. 对于模糊集系统$(E', \beta')$，以 $0=r_0<r_1<\cdots<r_m\leqslant 1$ 作截系统，则$(E', C_{r_1}(\beta'))$是 E' 上的集系统. 以下证明$(E', C_{r_1}(\beta'))$是 E' 上的分明拟阵，即证 $C_{r_1}(\beta')$ 满足拟阵的基公理. 由于

$$C_{r_1}(\beta')=\{(C_{r_1}(\mu)\backslash x)\cup y\mid \mu\in\beta,\ x_{r_1}\ \text{为}\ \mu\ \text{中的一个尖}\}\cup C_{r_1}(\beta)$$

由文献[10]的定理 4.1 以及$(E, \mathscr{I})$是闭正则模糊拟阵，$C_{r_1}(\beta')$ 中任意两个元都有相同的基数.

以下证明 $C_{r_1}(\beta')$ 满足基交换性质. 设 B'_1，B'_2 是 $C_{r_1}(\beta')$ 中的任意两个元. 以下证明 $\forall a\in B'_1$，存在 $b\in B'_2$，使得

$$(B'_1\backslash a)\cup b\in C_{r_1}(\beta')$$

情形 1　若 $B'_1=(B_1\backslash x)\cup y$，$B'_2=(B_2\backslash x)\cup y$(其中 $B_1,B_2\in C_{r_1}(\beta)$).

(i) 若 $a=y$，则取 $b=y$，有

$$(B'_1\backslash a)\cup b=B'_1\in C_{r_1}(\beta')$$

结论成立；

(ii) 若 $a\neq y$，则 $a\in B_1$，由于$(E, C(\beta))$是分明拟阵，存在 $b\in B_2$，使得

$$(B_1\backslash a)\cup b\in C_{r_1}(\beta)$$

又由于 $x\in B_1$ 且 $a\neq x$，于是 $x\in(B_1\backslash a)\cup b$，这样由 $C_{r_1}(\beta')$ 的定义知

$$(((B_1\backslash a)\cup b)\backslash x)\cup y=(((B_1\backslash x)\cup y)\backslash a)\cup b=(B'_1\backslash a)\cup b\in C_{r_1}(\beta')$$

情形 2　若 $B'_1=(B_1\backslash x)\cup y$，$B'_2=B_2$(其中 $B_1,B_2\in C_{r_1}(\beta)$).

(i) 若 $a=y$ 且 $x\in B_2$，取 $b=x$ 即可；

(ii) 若 $a=y$ 且 $x\notin B_2$，对 $x\in B_1$，存在 $b\in B_2$ 使得

$$(B_1\backslash x)\cup b\in C_{r_1}(\beta)$$

这样

$$(B_1\backslash x)\cup b\in C_{r_1}(\beta')$$

即$(B_1\backslash a)\cup b\in C_{r_1}(\beta')$；

(iii) 若 $a\neq y$，则 $a\in B_1$ 且 $a\neq x$，存在 $b\in B_2$ 使得

$$(B_1\backslash x)\cup b\in C_{r_1}(\beta)$$

即

$$(((B_1\backslash a)\cup b)\backslash x)\cup y\in C_{r_1}(\beta')$$

情形 3　若 $B'_1=B_1$，$B'_2=B_2$. 由于 $B_1,B_2\in C_{r_1}(\beta)$，由 $C_{r_1}(\beta')$ 的定义，有 $B_1,B_2\in C_{r_1}(\beta')$.

同样地，可以证明$(E', C_{r_2}(\beta'))$,$(E', C_{r_3}(\beta'))$,…,$(E', C_{r_n}(\beta'))$是 E' 上的一个拟阵列，并且

$$(E', C_{r_2}(\beta'))\supset(E', C_{r_3}(\beta'))\supset\cdots\supset(E', C_{r_n}(\beta'))$$

容易证明：(i) 若 $r\in(r_{i-1}, r_i]$，则 $I_r=I_{r_i}$；

(ii) 若 $r\in(r_i, 1]$，则 $I_r=\varnothing$；

(Ⅲ) 若 $\xi,\eta\in\beta'$，且 $S_a^{r_1}\in\xi(a\in\operatorname{supp}\mu\text{-}\operatorname{supp}\nu, \mu,\nu\in\beta)$.

我们仅证明 $\xi=(\mu\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}$，$\eta=(\nu\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}$ 的情形.

(i) 若 $S_a^{r_1}=S_y^{r_1}$，取 $S_b^{r_1}=S_y^{r_1}$，则显然$(\xi\backslash\backslash x)\vee S_b^{r_1}=\xi\in\beta'$；

(ii) 若 $S_a^{r_1}\neq S_y^{r_1}$，则 $S_a^{r_1}\in\mu(a\in\operatorname{supp}\mu\text{-}\operatorname{supp}\nu)$，由于 β 是$(E, \mathscr{I})$的基集，由文献[10]的定理 4.1，存在 $S_b^{r_1}\in\nu$，使得

$$(\mu\backslash\backslash a)\vee S_b^{r_1}\in\beta$$

由于 $S_x^{r_1}\in\mu$ 且 $S_a^{r_1}\neq S_x^{r_1}$，由 β' 的定义，有

$$(((\mu\backslash\backslash a)\vee S_b^{r_1})\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}=(((\mu\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1})\backslash\backslash a)\vee S_b^{r_1}=(\xi\backslash\backslash a)\vee S_b^{r_1}\in\beta'$$

由文献[10]的定理 4.1 知，β' 是 E' 上的一个闭正则模糊拟阵的基集.

推论 2　设 $\boldsymbol{M}=(E, \mathscr{I})$是一闭正则模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_m\leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本列，$x\in E$，$y\notin E$. $S_x^{r_{i_0}}$,$S_y^{r_{i_0}}$ 为两个尖($i_0\in\{1, 2, \cdots, m\}$). β 是 $\boldsymbol{M}=(E, \mathscr{I})$ 的基集. 令

$$\beta'=\{(\mu\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_{i_0}}\mid\mu\in\beta, x\in\operatorname{supp}\mu\}\cup\beta$$

则 β' 是关于 $E'=E\cup y$ 上的一个闭正则模糊拟阵的基集.

称此类闭正则模糊拟阵(E', β')是闭正则模糊拟阵$(E, \mathscr{I})$的一个单点平行延拓.

例 2　设 $E=\{a, b, c\}$，$(E, \mathscr{I})$ 如例 1 所示. 令

$$E'=\{a, b, c, d\}\beta'=\{(\mu\backslash\backslash x)\vee S_d^{r_1}\mid\mu\in\beta, x\in\operatorname{supp}\mu\}\cup\beta$$

则(E', β')的基本列为$0 < \frac{1}{2} < 1$.

因为所有的基的基数相等，所以(E', β')是闭正则模糊拟阵.

参考文献：

[1] WELSH D. Matroid Theory [M]. London：Academic Press，1976.
[2] OXLEY J. Matroid Theory [M]. New York：Oxford University Press，1992.
[3] 赖虹建. 拟阵论 [M]. 北京：高等教育出版社，2002.
[4] GOETSCHEL R，VOXMAN W. Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems，1988，27：291－302.
[5] GOETSCHEL R，VOXMAN W. Base of Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，31：253－261.
[6] GOETSCHEL R，VOXMAN W. Fuzzy Circuits [J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，32：35－43.
[7] GOETSCHEL R，VOXMAN W. Fuzzy Matroid Structures [J]. Fuzzy Sets and Systems，1991，41：343－357.
[8] SHI Fu-gui. A New Approach to the Fuzzification of Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems，2009，160：696－705.
[9] SHI Fu-gui. (L，M)-Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems，2009，160：2387－2400.
[10] LI Yao-long，ZHANG Guo-jun，LU Ling-xia. Axioms for Bases of Closed Regular Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems，2010，161(12)：1711－1725.
[11] 陈娟娟，吴德垠，夏 军. 准模糊图拟阵的子拟阵 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2014，36(4)：52－54.
[12] 李尧龙，赵小鹏. 闭正则模糊拟阵基的若干性质 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2014，39(8)：5－9.

Single-Element Extensions of Closed Regular Fuzzy Matroids

LI Yao-long

College of Mathematics and Information Science，Weinan Teachers University，Weinan Shaanxi 714000，China

Abstract：The definitions of single-element series extension and single-element parallel extension of closed regular fuzzy matroids are given. Some properties of single-element series extension and single-element parallel extension of closed regular fuzzy matroids are studied. The relation between single-element extension of closed regular fuzzy matroids and their cut matroid is given.

Key words：fuzzy matroid；single-element extension；closed regular fuzzy matroid；cut matroid

责任编辑 廖 坤