DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.10.010

集值非扩张映象的不动点及带误差的 Ishikawa 迭代序列的收敛性①

陈清明，　欧增奇

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在 Banach 空间中讨论了集值非扩张映象带误差的 Ishikawa 迭代序列的收敛性，然后在适当条件下证明了集值非扩张映象存在不动点. 所得结果改进了已有的一些结果.

关 键 词：集值非扩张映象；带误差的 Ishikawa 迭代序列；不动点

中图分类号：O177.91　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2015)10-0062-05

设 E 是赋范线性空间，D 是 E 的非空子集，用 $CB(D)$ 表示 D 中一切非空有界闭集族，对 $a \in E$，$A, B \in CB(D)$，记

$$d(a, A) = \inf_{x \in A} \| a - x \|$$

令 A, B 集合的 Hausdorff 距离为

$$H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y)\}$$

易见，若 $a, b \in E$，$A, B \in CB(D)$，则：

(i) $d(a, A) \leqslant \| a - b \| + d(b, A)$；

(ii) $d(a, A) \leqslant d(a, B) + H(A, B)$.

定义 1　对映象 $T: D \longrightarrow CB(D)$，如果 $\forall x, y \in D$，有

$$H(Tx, Ty) \leqslant \| x - y \|$$

则称 T 为集值非扩张映象.

定义 2　设 D 是赋范线性空间 E 的非空凸子集，$T: D \longrightarrow CB(D)$ 是一集值映象. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha_n'\}, \{\beta_n'\}, \{\gamma_n'\}$ 都是 $[0, 1]$ 中的序列，满足

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha_n' + \beta_n' + \gamma_n' = 1$$

令 $\{\varepsilon_n\}$ 是一列正的单调递减的数列，且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$ 和 $\lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} = 0$，$\{p_n\}, \{q_n\}$ 都是 D 的有界序列. 设 $x_1 \in D$，$u_1 \in Tx_1$，我们构造 D 中的序列 $\{x_n\}$ 如下：

令 $y_1 = \alpha_1' u_1 + \beta_1' x_1 + \gamma_1' q_1$，则存在 $v_1 \in Ty_1$，使得

$$\| v_1 - u_1 \| \leqslant d(u_1, Ty_1) + \varepsilon_1 \leqslant H(Tx_1, Ty_1) + \varepsilon_1$$

现令 $x_2 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 p_1$，则又存在 $u_2 \in Tx_2$，使得

$$\| u_2 - v_1 \| \leqslant d(v_1, Tx_2) + \varepsilon_2 \leqslant H(Tx_2, Ty_1) + \varepsilon_1$$

---

① 收稿日期：2014-12-15

基金项目：国家自然科学基金项目(11101347).

作者简介：陈清明(1965-)，男，重庆铜梁人，副教授，主要从事非线性泛函分析的研究.

按这种方式进行下去，得到：

$$\begin{cases} x_{n+1}=\alpha_n v_n+\beta_n x_n+\gamma_n p_n \\ y_n=\alpha_n' u_n+\beta_n' x_n+\gamma_n' q_n \end{cases} \qquad n \geqslant 1 \tag{1}$$

这里 $u_n \in Tx_n$，$v_n \in Ty_n$，且：

$$\| u_{n+1}-v_n \| \leqslant d(v_n, Tx_{n+1})+\varepsilon_{n+1} \leqslant H(Tx_{n+1}, Ty_n)+\varepsilon_{n+1}$$

$$\| u_n-v_n \| \leqslant d(u_n, Ty_n)+\varepsilon_n \leqslant H(Tx_n, Ty_n)+\varepsilon_n$$

我们称$\{x_n\}$为集值映象 T 的带误差的 Ishikawa 迭代序列.

特别地，如果 $\gamma_n=\gamma_n'=0$ $(n \geqslant 1)$，(1) 式变为

$$\begin{cases} x_{n+1}=\alpha_n v_n+(1-\alpha_n)x_n \\ y_n=\alpha_n' u_n+(1-\alpha_n')x_n \end{cases} \qquad n \geqslant 1$$

则称$\{x_n\}$为集值映象 T 的 Ishikawa 迭代序列(见文献[1]).

关于单值映射的 Ishikawa 迭代序列的收敛性与不动点问题，近年来已被许多作者研究过(见文献[2－5]). 对于集值映象的迭代序列的收敛性问题，文献[1－2，6－8]进行了研究，得到了一些重要结果，但在这些文献中，迭代序列很少涉及带误差项的情形. 受文献[1－8]的相关结论和方法的启发，本文将考虑集值非扩张映象带误差的 Ishikawa 迭代序列的收敛性.

定义 3[2]　令 $T: D \longrightarrow CB(D)$，如果对 D 中的满足$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n)=0$ 的有界序列$\{x_n\}$，均存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=x^* \in D$$

则称 T 为半紧的.

引理 1[3]　设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$是3个非负实数列，满足条件

$$a_{n+1} \leqslant (1+b_n)a_n+c_n \qquad \forall n \geqslant 1$$

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n<+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

引理 2[4]　设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是赋范线性空间 E 中的两个点序列，如果有一个实数列$\{\alpha_n\}$满足：

(ⅰ) $0<\alpha_n \leqslant \alpha<1$ 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n=+\infty$；

(ⅱ) $a_{n+1}=(1-\alpha_n)a_n+\alpha_n b_n$，$\forall n \geqslant 1$；

(ⅲ) $\lim\limits_{n\to\infty} \| a_n \|=d$；

(ⅳ) $\limsup\limits_{n\to\infty} \| b_n \| \leqslant d$ 且$\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right\}$有界.

则 $d=0$.

定理 1　设 D 是赋范线性空间 E 的非空凸子集，$T: D \longrightarrow CB(D)$ 是一集值非扩张映象. $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\alpha_n'\}$,$\{\beta_n'\}$,$\{\gamma_n'\}$都是$[0,1]$中的序列，满足：

(ⅰ) $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=\alpha_n'+\beta_n'+\gamma_n'=1$；

(ⅱ) $0<\alpha_n \leqslant \alpha<1$ 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n=+\infty$；

(ⅲ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n'<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n'<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\gamma_n}{\alpha_n}<+\infty$；

(ⅳ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n'}{\alpha_n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n'}{\alpha_n}=0$.

如果$\{x_n\}$是由(1)式所定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列，且$\{x_n\}$有界，则$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n)=0$.

证　当$\{x_n\}$有界时，由于$\{p_n\}$,$\{q_n\}$都是 D 的有界序列，所以存在 $M>0$，对 $\forall n \geqslant 1$，有

$$\| x_n-p_n \| \leqslant M \qquad \| x_n-q_n \| \leqslant M$$

由定义 2，我们有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &= \|\alpha_n(v_n-u_{n+1})+(1-\alpha_n)(x_n-u_{n+1})+\gamma_n(p_n-x_n)\| \leqslant \\ & \alpha_n\|v_n-u_{n+1}\|+(1-\alpha_n)\|x_n-u_{n+1}\|+\gamma_n M \leqslant \\ & \alpha_n[H(Tx_{n+1},Ty_n)+\varepsilon_{n+1}]+(1-\alpha_n)(\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-u_{n+1}\|)+\gamma_n M \leqslant \\ & \alpha_n[\alpha_n\|y_n-v_n\|+(1-\alpha_n)\|y_n-x_n\|]+(1-\alpha_n)\|x_{n+1}-u_{n+1}\|+ \\ & (1-\alpha_n)\alpha_n\|v_n-x_n\|+2\gamma_n M+\alpha_n\varepsilon_{n+1}\end{aligned}$$

因 $\varepsilon_{n+1}\leqslant\varepsilon_n$，移项整理得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\leqslant \alpha_n\|y_n-v_n\|+(1-\alpha_n)(\|y_n-x_n\|+\|v_n-x_n\|)+\frac{2\gamma_n}{\alpha_n}M+\varepsilon_{n+1}\leqslant \\ & \alpha_n\alpha_n' H(Tx_n,Ty_n)+(1-\alpha_n\alpha_n')\|v_n-x_n\|+ \\ & (1-\alpha_n)\|y_n-x_n\|+\left(\alpha_n\gamma_n'+\frac{2\gamma_n}{\alpha_n}\right)M+\alpha_n\alpha_n'\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}\leqslant \\ & [(1-2\alpha_n+\alpha_n\alpha_n')\alpha_n'+1]\|u_n-x_n\|+(1-\alpha_n\alpha_n')[H(Tx_n,Ty_n)+\varepsilon_n]+ \\ & \left[(1+\alpha_n\alpha_n')\gamma_n'+\frac{2\gamma_n}{\alpha_n}\right]M+(1+\alpha_n\alpha_n')\varepsilon_n\leqslant \\ & [1+2\alpha_n'(1-\alpha_n)]\|u_n-x_n\|+2\left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n}+\gamma_n'\right)M+2\varepsilon_n\end{aligned}$$

若记

$$a_n=u_n-x_n \qquad b_n=2\alpha_n'(1-\alpha_n) \qquad c_n=2\left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n}+\gamma_n'\right)M+2\varepsilon_n$$

则有

$$\|a_{n+1}\|\leqslant(1+b_n)\|a_n\|+c_n \qquad \forall n\geqslant 1$$

由条件 (ⅲ) 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty$ 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$. 再由引理 1 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|a_n\|$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}\|a_n\|=d$. 易见 $\{u_n-x_n\}$ 有界，再由 $\{x_n\}$ 有界，从而推出 $\{u_n\}$ 有界.

现令

$$b_n=\frac{1}{\alpha_n}(u_{n+1}-u_n)+u_n-v_n+\frac{\gamma_n}{\alpha_n}(x_n-p_n)$$

则有

$$a_{n+1}=(1-\alpha_n)a_n+\alpha_n b_n$$

且

$$\begin{aligned}\|b_n\| &\leqslant \frac{1}{\alpha_n}\|u_{n+1}-u_n\|+\|u_n-v_n\|+\frac{\gamma_n}{\alpha_n}M\leqslant \\ & \frac{1}{\alpha_n}\|u_{n+1}-v_n\|+\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)\|u_n-v_n\|+\frac{\gamma_n}{\alpha_n}M\leqslant \\ & \frac{1}{\alpha_n}[H(Tx_{n+1},Ty_n)+\varepsilon_{n+1}]+\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)[H(Tx_n,Ty_n)+\varepsilon_n]+\frac{\gamma_n}{\alpha_n}M\leqslant \\ & \frac{1}{\alpha_n}\|x_{n+1}-y_n\|+\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)\|y_n-x_n\|+\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)\varepsilon_n+\frac{\varepsilon_{n+1}}{\alpha_n}+\frac{\gamma_n}{\alpha_n}M\leqslant \\ & \|y_n-v_n\|+\frac{2}{\alpha_n}\|y_n-x_n\|+\left(1+\frac{2}{\alpha_n}\right)\varepsilon_n+\frac{2\gamma_n}{\alpha_n}M\leqslant \\ & (1-\alpha_n')\|u_n-x_n\|+\left(1+\frac{2}{\alpha_n}\right)\alpha_n'\|u_n-x_n\|+\left(2+\frac{2}{\alpha_n}\right)\varepsilon_n+2\left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n}+\frac{\gamma_n'}{\alpha_n}+\gamma_n'\right)M\leqslant \\ & \left(1+\frac{2\alpha_n'}{\alpha_n}\right)\|u_n-x_n\|+\left(2+\frac{2}{\alpha_n}\right)\varepsilon_n+2\left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n}+\frac{2\gamma_n'}{\alpha_n}\right)M\end{aligned}$$

由条件 (iii) 知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\gamma_n}{\alpha_n}=0$，再由条件 (iv)，并注意到$\{u_n-x_n\}$有界，我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\|b_n\|\leqslant d$$

最后，

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i\right\|=&\left\|\sum_{i=1}^{n}(u_{i+1}-u_i)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(u_i-v_i)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x_i-p_i)\right\|\leqslant\\&\|u_{n+1}-u_1\|+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|u_i-v_i\|+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\|x_i-p_i\|\leqslant\\&\|u_{n+1}-u_1\|+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|y_i-x_i\|+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varepsilon_i+M\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\leqslant\\&\|u_{n+1}-u_1\|+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\|u_i-x_i\|+\Big(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i'+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\Big)M+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\end{aligned}$$

因点列$\{u_i\}$与$\{u_i-x_i\}$有界，又因：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n'<+\infty\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n'<+\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\alpha_n}<+\infty$$

所以$\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i b_i\right\}$有界. 因此由引理 2 可得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,Tx_n)=0$$

定理 2 设 D 是赋范线性空间 E 的非空闭凸子集，$T:D\longrightarrow CB(D)$ 是半紧的集值非扩张映象. $\mathrm{F}(T)\neq\varnothing$($\mathrm{F}(T)$ 表示 T 的不动点集)，且 $\forall p\in\mathrm{F}(T)$，有 $Tp=\{p\}$. 如果$\{x_n\}$同定理 1 所定义，则$\{x_n\}$收敛到 T 在 D 中的某个不动点.

证 我们首先证明：$\forall p\in\mathrm{F}(T)$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-p\|$存在.

由于$\{x_n\}$,$\{p_n\}$,$\{q_n\}$都是 D 的有界序列，所以存在 $M>0$，对 $\forall n\geqslant 1$，有：

$$\|x_n-p_n\|\leqslant M\qquad\|x_n-q_n\|\leqslant M$$

因 $Tp=\{p\}$，所以

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|\leqslant&\alpha_n\|v_n-p\|+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\gamma_n M\leqslant\\&\alpha_n H(Ty_n,Tp)+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\gamma_n M\leqslant\\&\alpha_n\|y_n-p\|+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\gamma_n M\leqslant\\&\alpha_n[\alpha_n'\|u_n-p\|+(1-\alpha_n')\|x_n-p\|+\gamma_n'\|x_n-q_n\|]+\\&(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\gamma_n M\leqslant\\&\alpha_n\alpha_n'H(Tx_n,Tp)+(1-\alpha_n\alpha_n')\|x_n-p\|+(\alpha_n\gamma_n'+\gamma_n)M\leqslant\\&\|x_n-p\|+(\gamma_n'+\gamma_n)M\end{aligned}$$

记

$$a_n=\|x_n-p\|\qquad b_n=0\qquad c_n=(\gamma_n+\gamma_n')M$$

由条件可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$，由引理 1 得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，即$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-p\|$存在.

其次，由定理 1，得$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,Tx_n)=0$，再由 T 的半紧性知$\{x_n\}$有收敛的子列$\{x_{n_k}\}$，记$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=p\in D$. 下证 p 是 T 的不动点. 事实上，

$$\begin{aligned}d(p,Tp)\leqslant&\|x_{n_k}-p\|+d(x_{n_k},Tp)\leqslant\\&\|x_{n_k}-p\|+d(x_{n_k},Tx_{n_k})+H(Tx_{n_k},Tp)\leqslant 2\|x_{n_k}-p\|+d(x_{n_k},Tx_{n_k})\end{aligned}$$

令 $k \to \infty$，得 $d(p, Tp) = 0$，注意到 Tp 是闭集，因此，$p \in \mathrm{F}(T)$. 又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - p \|$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p \in D$.

定理 3　设 D 是 Banach 空间 E 的非空紧凸子集，$T: D \longrightarrow CB(D)$ 是集值非扩张映象，则 T 在 D 中有不动点.

证　设 $\{x_n\}$ 是由(1) 式所定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列，因 D 是 Banach 空间 E 的紧集，所以 D 是有界闭集，从而 $\{x_n\}$ 有界. 在定理 1 的条件下，已证得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

再由 D 的紧性知 $\{x_n\}$ 有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$，记 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = p \in D$. 类似定理 2 可证 p 是 T 的不动点.

注 1　定理 3 改进了文献[7] 的定理 2.2，去掉了空间的一致凸性，并把 δ 集值非扩张映象减弱为 Hausdorff 距离下的集值非扩张映象.

参考文献：

[1]　邓　磊，陈清明. 集值非扩张映象的迭代收敛性 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，1996，21(3)：218－221.

[2]　张石生，黄南京. 集值非扩张映象列的公共不动点及重合点 [J]. 四川大学学报：自然科学版，1990，27(2)：117－120.

[3]　LIU Qi-hou. Iterative Sequences for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mappings with Error Member [J]. J Math Anal Appl，2001，259：18－24.

[4]　DENG Lei. Convergence of the Ishikawa Iteration Process for Non-Expansive Mappings [J]. J Math Anal Appl，1996，199：769－775.

[5]　黄家琳. 涉及渐近非扩张映象的带误差的合成显迭代新算法 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(3)：41－44.

[6]　陈清明，何一农. 集值非扩张映象列迭代过程的收敛性及不动点 [J]. 应用数学，1998，11(2)：90－93.

[7]　李红玉，陈汝栋，李红智. 集值非扩张映象不动点存在与收敛性 [J]. 数学的实践与认识，2009，39(2)：135－139.

[8]　张晓华，任必军. 集值非扩张映象不动点存在与收敛性 [J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2009，37(2)：141－142.

[9]　宋传静，吴健荣. 两族集值渐近非扩张映射的不动点收敛定理 [J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2013(1)：41－46.

Convergence of the Fixed Points of Multi-Valued Nonexpansive Mappings and the Ishikawa Iteration Sequences with Errors

CHEN Qing-ming，　OU Zeng-qi

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper discusses the convergence of the Ishikawa iteration sequences with errors for multi-valued nonexpansive mappings. Under some suitable conditions，the existence of fixed points for multivalued nonexpansive mappings is obtained.Some of the results extend and improve the corresponding known results.

Key words：multi-valued nonexpansive mapping；Ishikawa iteration sequence with errors；fixed point

责任编辑　廖　坤