DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.10.011

半群 $\mathscr{OI}_n$ 的偏度秩[①]

吴金艳，　赵　平，　游泰杰

贵州师范大学 数学与计算机科学学院，贵阳 550004

摘要：设 $\mathscr{OI}_n$ 是$[n]$上的保序严格部分一一变换半群. 首次引入半群 $\mathscr{OI}_n$ 的 m -偏度秩的概念. 对任意 $1 \leqslant m \leqslant n-1$，证明了半群 $\mathscr{OI}_n$ 的 m -偏度秩存在的充要条件是 m 与 n 互素，并得到了半群 $\mathscr{OI}_n$ 的 m -偏度秩均为 n.

关　键　词：变换半群；保序；秩；幂零元秩；m -偏度秩

中图分类号：O152.7　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2015)10-0067-05

设$[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$，并赋予自然序，I_n 和 $\mathscr{S}_n$ 分别是$[n]$上的对称逆半群和对称群. 设 $\alpha \in I_n$，若对任意 $x, y \in \mathrm{dom}(\alpha)$，$x \leqslant y$ 可推出 $x\alpha \leqslant y\alpha$，则称 α 是保序的. 设 $\mathscr{OI}_n$ 为严格对称逆半群 $I_n \backslash \mathscr{S}_n$ 中的所有保序变换之集，则 $\mathscr{OI}_n$ 是 I_n 的逆子半群，称 $\mathscr{OI}_n$ 为保序严格部分一一变换半群.

通常，一个有限半群 S 的秩定义为：

$$\mathrm{rank}\ S = \min\{|A| : A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$$

如果 S 由它的幂零元集 N 生成，那么 S 的幂零元秩定义为：

$$\mathrm{Ndrank}\ S = \min\{|A| : A \subseteq N, \langle A \rangle = S\}$$

文献[1] 考虑了对称逆半群 I_n 的子半群

$$\mathscr{SP}_n = \{\alpha \in \mathscr{I}_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leqslant n-1\}$$

得到半群 $\mathscr{SP}_n$ 的秩为 $n+1$. 文献[2] 考虑了半群 $\mathscr{I}(n, r) = \{\alpha \in \mathscr{I}_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leqslant r\}$ 的秩和幂零元秩. 文献[3] 研究了半群 $\mathscr{OI}_n$ 的表示和秩，得到了半群 $\mathscr{OI}_n$ 的秩为 n. 最近，文献[4] 考虑了半群 $\mathscr{OI}_n$ 的理想 $\mathscr{OI}(n, r) = \{\alpha \in \mathscr{OI}_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leqslant r\}$ 的生成集的特征和秩，得到了半群 $\mathscr{OI}(n, r)$ 的秩为 C_n^r. 值得注意的是，有限半群 S 的幂零元秩和幂等元秩分别是考虑有限半群 S 的幂零元生成集和幂等元生成集的最小基数. 因此，我们可以考虑对有限半群 S 的生成集附加某种性质，定义半群 S 的具有某种性质的秩. 本文将在半群 $\mathscr{OI}_n$ 中首次引入元素的偏度概念，研究半群 $\mathscr{OI}_n$ 的偏度秩.

设 S 是半群，对任意 $a \in S$，通常用 R_a, L_a, H_a 分别表示 a 所在的 $\mathscr{R}$-类、$\mathscr{L}$-类、$\mathscr{H}$-类. 本文未定义的术语及记法参见文献[5].

据文献[3] 的结果，$\mathscr{OI}_n$ 中的 Green 关系有如下刻划：

$$\alpha \mathscr{L} \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$$

$$\alpha \mathscr{R} \beta \Leftrightarrow \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$$

$$\alpha \mathscr{D} \beta \Leftrightarrow |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$$

且 $\mathscr{OI}_n$ 是 $\mathscr{H}$ 平凡的，即对任意 $\alpha \in \mathscr{OI}_n$，有 $|H_\alpha| = 1$，其中 H_α 是 α 所在的 $\mathscr{H}$-类. 对 $0 \leqslant r \leqslant n-1$，记

① 收稿日期：2014-12-06
基金项目：国家自然科学基金项目(11461014)；贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字[2013]2225 号).
作者简介：吴金艳(1988-)，女，贵州六盘水人，硕士研究生，主要从事半群理论的研究.

$$D_r=\{\alpha\in\mathcal{O}\mathcal{I}_n:|\operatorname{im}(\alpha)|=r\}$$

则 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 有 n 个 $\mathcal{D}$-类：$D_0,D_1,\cdots,D_{n-1}$，并且 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n=\bigcup\limits_{r=0}^{n-1}D_r$. 下面我们考察 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 的顶端 $\mathcal{D}$-类 D_{n-1}. 设

$$R_{(i)}=\{\alpha\in D_{n-1}:\operatorname{dom}(\alpha)=[n]\backslash\{i\}\}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$L_{(j)}=\{\alpha\in D_{n-1}:\operatorname{im}(\alpha)=[n]\backslash\{j\}\}\qquad j=1,2,\cdots,n$$

$$H_{(j)}^{(i)}=R_{(i)}\cap L_{(j)}$$

则 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 的顶端 $\mathcal{D}$-类 D_{n-1} 有 n 个 $\mathcal{R}$-类：$R_{(1)},R_{(2)},\cdots,R_{(n)}$，$n$ 个 $\mathcal{L}$-类：$L_{(1)}$，$L_{(2)}$，$\cdots$，$L_{(n)}$ 以及 n^2 个 $\mathcal{H}$-类 $H_{(j)}^{(i)}(i,j\in[n])$. 注意到：

$$R_{(i)}=\bigcup_{k=1}^{n}H_{(k)}^{(i)}\qquad L_{(j)}=\bigcup_{k=1}^{n}H_{(j)}^{(k)}$$

$$D_{n-1}=\bigcup_{k=1}^{n}R_{(k)}=\bigcup_{k=1}^{n}L_{(k)}=\bigcup_{i,j=1}^{n}H_{(j)}^{(i)}$$

注意到 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 是 $\mathcal{H}$ 平凡的，显然 $|H_{(j)}^{(i)}|=1$. 为方便起见，我们用符号 μ_j^i 表示 $\mathcal{H}$-类 $H_{(j)}^{(i)}$ 中的唯一元素，即 $H_{(j)}^{(i)}=\{\mu_j^i\}$. 事实上，由 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 的保序性可知：

$$\mu_j^i=\begin{pmatrix}1&\cdots&i-1&i+1&\cdots&j&j+1&\cdots&n\\1&\cdots&i-1&i&\cdots&j-1&j+1&\cdots&n\end{pmatrix}\qquad i<j$$

$$\mu_j^i=\begin{pmatrix}1&\cdots&j-1&j&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n\\1&\cdots&j-1&j+1&\cdots&i&i+1&\cdots&n\end{pmatrix}\qquad i>j$$

$$\mu_j^i=\begin{pmatrix}1&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n\\1&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n\end{pmatrix}\qquad i=j$$

设 $\alpha\in\mathcal{O}\mathcal{I}_n$，定义

$$\omega(\alpha)=\sum_{i\in\operatorname{dom}(\alpha)}(i-i\alpha)$$

任意取 $i,j\in[n]$，若 $i=j$，则 $\omega(\mu_j^i)=0$；若 $i<j$，则

$$\omega(\mu_j^i)=\sum_{k=1}^{j-i}[(i+k)-(i+k-1)]=j-i$$

若 $i>j$，则

$$\omega(\mu_j^i)=\sum_{k=1}^{i-j}[(j+k-1)-(j+k)]=j-i$$

因此，对任意 $i,j\in[n]$，有 $\omega(\mu_j^i)=j-i$. 显然 $|\omega(\mu_j^i)|=|j-i|\leqslant n-1$.

注意到

$$D_{n-1}=\bigcup_{i,j=1}^{n}H_{(j)}^{(i)}=\bigcup_{i,j=1}^{n}\{\mu_j^i\}$$

考虑 $\mathcal{D}$-类 D_{n-1} 中的典型元 μ_j^i，令

$$\lambda_{\mu_j^i}=\begin{cases}\omega(\mu_j^i)&i\leqslant j\\n+\omega(\mu_j^i)&i>j\end{cases}$$

称 $\lambda_{\mu_j^i}$ 为元素 μ_j^i 的偏度. 为方便起见，我们用 G^m 表示 D_{n-1} 中偏度为 $m(0\leqslant m\leqslant n-1)$ 的元素构成的集合. 如果半群 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 是由 G^m 的子集合生成，那么半群 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 的 m-偏度秩定义为：

$$\mathcal{S}\operatorname{rank}_m\mathcal{O}\mathcal{I}_n=\min\{|A|:A\subseteq G^m,\langle A\rangle=\mathcal{O}\mathcal{I}_n\}$$

显然 $\operatorname{rank}\mathcal{O}\mathcal{I}_n\leqslant\mathcal{S}\operatorname{rank}_m\mathcal{O}\mathcal{I}_n$.

注 1 设 $\mu_j^i\in D_{n-1}$，则显然 $\lambda_{\mu_j^i}=0$ 的充要条件是 $i=j$，即 μ_j^i 是幂等元(μ_j^i 是 $\operatorname{dom}(\mu_j^i)$ 上的恒等变换). 因此，G^0 表示 D_{n-1} 中的所有幂等元之集. 众所周知，半群 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 不是幂等元生成的，故半群 $\mathcal{O}\mathcal{I}_n$ 的 0-偏度秩不存在.

本文的主要结论为：

定理 1　设 $n\geqslant 3$ 且 $1\leqslant m\leqslant n-1$，则半群 $\mathcal{OI}_n$ 由集合 G^m 生成的充要条件是 n 与 m 互素. 当 n 与 m 互素时，$\mathscr{S}\operatorname{rank}_m\ \mathcal{OI}_n=n$.

注 2　首先，为方便起见，在本文中，凡是整数的加法运算，均是在模 n 的剩余类环中进行的. 例如，$\mu_{j+n}^{i+n}=\mu_{j+n}^{i}=\mu_{j}^{i}$，$\mu_{0}^{i}=\mu_{n}^{i}$ 等.

由 μ_j^i 的定义易得以下引理：

引理 1　设 $n\geqslant 3$，则：

(ⅰ) $\mu_l^i\mu_j^k=\mu_j^i$ 当且仅当 $l=k(\mathrm{mod}\ n)$；

(ⅱ) $\mu_l^i\mu_j^k\in\mathcal{OI}(n,n-2)(=\bigcup\limits_{k=0}^{n-2}D_k)$ 当且仅当 $l\neq k(\mathrm{mod}\ n)$.

引理 2　设 $n\geqslant 3$ 且 $1\leqslant m\leqslant n-1$，则 $G^m=\{\mu_{i+m}^i: i\in[n]\}$.

证　记 $P_m=\{\mu_{i+m}^i: i\in[n]\}$. 注意 G^m 表示 D_{n-1} 中偏度为 $m(1\leqslant m\leqslant n-1)$ 的元素构成的集合，且

$$D_{n-1}=\bigcup_{i,j=1}^{n}H_{(j)}^{(i)}=\bigcup_{i,j=1}^{n}\{\mu_j^i\}$$

任意取 $\alpha\in G^m\subseteq D_{n-1}$，则存在 $i,j\in[n]$，使得 $\alpha=\mu_j^i$. 由前面所述可知，$\omega(\mu_j^i)=j-i$，从而由偏度的定义可得：当 $i\leqslant j$ 时，$\lambda_{\mu_j^i}=j-i$；当 $i>j$ 时，$\lambda_{\mu_j^i}=n+(j-i)$. 假设 $\lambda_{\mu_j^i}=m$.

(ⅰ) 若 $i\leqslant j$，则 $j=i+m$，从而 $\alpha=\mu_j^i=\mu_{i+m}^i\in P_m$；

(ⅱ) 若 $i>j$，则 $j=i+m-n$，于是 $j\equiv i+m(\mathrm{mod}\ n)$，从而由注 2 可得，$\alpha=\mu_j^i=\mu_{i+m}^i\in P_m$.

再由 α 的任意性可得 $G^m\subseteq P_m$.

任意取 $\alpha\in P_m$，则存在 $i\in[n]$，使得 $\alpha=\mu_{i+m}^i$. 由 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 且 $1\leqslant i\leqslant n$ 可得，$2\leqslant i+m\leqslant 2n-1$.

(ⅰ) 若 $2\leqslant i+m\leqslant n$，则 $\lambda_\alpha=\lambda_{\mu_{i+m}^i}=(i+m)-i=m$，从而由 G^m 的定义可知，$\alpha\in G^m$，注意到 $m<n$；

(ⅱ) 若 $n<i+m\leqslant 2n-1$，则存在 $k_i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $i+m=n+k_i$，于是由注 2 可得 $\alpha=\mu_{i+m}^i=\mu_{n+k_i}^i=\mu_{k_i}^i$，从而 $\lambda_\alpha=\lambda_{\mu_{k_i}}^i=n+(k_i-i)=(n+k_i)-i=m$，进而由 G^m 的定义可知，$\alpha\in G^m$.

再由 α 的任意性可得 $P_m\subseteq G^m$.

引理 3　设 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 且 $1\leqslant i\leqslant n$，令

$$R_i^m=\langle G^m\rangle\cap R_{(i)}$$

则

$$R_i^m=\{\mu_{i+km}^i: k\in\mathbb{N}\}$$

证　注意到

$$R_{(i)}=\bigcup_{k=1}^{n}H_{(k)}^{(i)}=\bigcup_{k=1}^{n}\{\mu_k^i\}$$

设 $D_i^m=\{\mu_{i+km}^i: k\in\mathbb{N}\}$，则显然 $D_i^m\subseteq R_{(i)}$. 任意取 $\alpha\in D_i^m$，则存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $\alpha=\mu_{i+km}^i$.

(ⅰ) 若 $k=1$，则由引理 2 可得

$$\alpha=\mu_{i+m}^i\in G^m\cap R_{(i)}\subseteq\langle G^m\rangle\cap R_{(i)}=R_i^m$$

(ⅱ) 若 $k\geqslant 2$，则对任意 $s\in\{1,2,\cdots,k-1\}$，存在 $i_s\in[n]$，使 $i_s\equiv i+sm(\mathrm{mod}\ n)$，从而由引理 2 及注 2 可得

$$\mu_{i+m}^i\in G^m\qquad \mu_{[i+sm]+m}^{i+sm}=\mu_{i_s+m}^{i_s}\in G^m$$

再由引理 1 及注 2 可得

$$\mu_{i+m}^i\mu_{i_1+m}^{i_1}\mu_{i_2+m}^{i_2}\cdots\mu_{i_{k-1}+m}^{i_{k-1}}=\mu_{i+m}^i\mu_{(i+m)+m}^{i+m}\mu_{(i+2m)+m}^{i+2m}\cdots\mu_{[i+(k-1)m]+m}^{i+(k-1)m}=\mu_{i+km}^i=\alpha$$

从而 $\alpha\in\langle G^m\rangle\cap R_{(i)}=R_i^m$.

再由 α 的任意性可得 $D_i^m\subseteq R_i^m$.

任意取 $\alpha \in R_i^m \subseteq \langle G^m \rangle$，则由引理 2 可知，存在 $i_1, i_2, \cdots, i_s \in [n]$，使得

$$\alpha = \mu_{i_1+m}^{i_1}\mu_{i_2+m}^{i_2}\cdots\mu_{i_s+m}^{i_s}$$

其中 $\mu_{i_1+m}^{i_1}, \mu_{i_2+m}^{i_2}, \cdots, \mu_{i_s+m}^{i_s} \in G^m$. 注意到 $R_{(i)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} H_{(k)}^{(i)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{\mu_k^i\}$ 且 $R_\alpha = R_{(i)}$(因 $R_i^m \subseteq R_{(i)}$). 由引理 2 可得

$$G^m \cap R_\alpha = G^m \cap R_{(i)} = \{\mu_{i+m}^i\}$$

再由 $\alpha \in R_i^m \subseteq R_{(i)} \subseteq D_{n-1}$ 及 $G^m \subseteq D_{n-1}$ 可得 $\alpha \mathscr{R} \mu_{i_1+m}^{i_1}$，于是

$$\mu_{i_1+m}^{i_1} \in G^m \cap R_\alpha = \{\mu_{i+m}^i\}$$

从而 $\mu_{i_1+m}^{i_1} = \mu_{i+m}^i$. 进而 $i_1 = i \pmod n$.

(i) 若 $s = 1$，则由注 2 可得，$\alpha = \mu_{i_1+m}^{i_1} = \mu_{i+m}^i \in D_i^m$；

(ii) 若 $s \geqslant 2$，则由 $\alpha \in R_i^m \subseteq R_{(i)} \subseteq D_{n-1}$ 易知

$$\mu_{i_1+m}^{i_1}\mu_{i_2+m}^{i_2},\ \mu_{i_2+m}^{i_2}\mu_{i_3+m}^{i_3},\ \cdots,\ \mu_{i_{s-1}+m}^{i_{s-1}}\mu_{i_s+m}^{i_s} \in D_{n-1}$$

于是由引理 1 可得

$$i_2 = i_1 + m \pmod n$$
$$i_3 = i_2 + m \pmod n$$
$$\vdots$$
$$i_s = i_{s-1} + m \pmod n$$

从而由 $i_1 = i \pmod n$ 可得

$$i_k = i + (k-1)m \pmod n \qquad 2 \leqslant k \leqslant s$$

进而，由引理 1 及注 2 可得

$$\alpha = \mu_{i_1+m}^{i_1}\mu_{i_2+m}^{i_2}\cdots\mu_{i_s+m}^{i_s} = \mu_{i+m}^{i}\mu_{i+2m}^{i+m}\cdots\mu_{i+sm}^{i+(s-1)m} = \mu_{i+sm}^{i} \in D_i^m$$

再由 α 的任意性可得 $R_i^m \subseteq D_i^m$.

引理 4 设 a, b 是两个不全为 0 的整数，则 a 和 b 互素的充要条件是存在 $s, t \in \mathbb{Z}$，使得 $sa + tb = 1$.

证 见文献[6]的定理 13.

引理 5 设 $n \geqslant 3$，则 $\mathscr{O}\mathscr{I}_n = \langle D_{n-1} \rangle$ 且 $\operatorname{rank}\mathscr{O}\mathscr{I}_n = n$.

证 见文献[3]的引理 2.7 及命题 2.8.

定理 1 的证明 对 $1 \leqslant m \leqslant n-1$ 且 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $R_i^m = \langle G^m \rangle \cap R_{(i)}$. 若 G^m 是半群 $\mathscr{O}\mathscr{I}_n$ 的生成集，即 $\mathscr{O}\mathscr{I}_n = \langle G^m \rangle$，则

$$R_i^m = \langle G^m \rangle \cap R_{(i)} = \mathscr{O}\mathscr{I}_n \cap R_{(i)} = R_{(i)}$$

从而由引理 3 可得

$$R_{(i)} = R_i^m = \{\mu_{i+km}^i : k \in \mathbb{N}\}$$

再由 $R_{(i)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} H_{(k)}^{(i)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{\mu_k^i\}$ 及注 2 可知

$$\mu_{i+1}^i \in R_{(i)} = \{\mu_{i+km}^i : k \in \mathbb{N}\}$$

于是存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\mu_{i+1}^i = \mu_{i+k_0m}^i$，从而 $i+1 \equiv i + k_0 m \pmod n$，即 $k_0 m \equiv 1 \pmod n$. 进而，存在 $t \in \mathbb{Z}$，使 $k_0 m - 1 = -tn$，即 $k_0 m + tn = 1$. 再由引理 4 可得 $(n, m) = 1$，即 n 和 m 互素.

由 $R_{(i)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} H_{(k)}^{(i)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{\mu_k^i\}$ 及注 2 可得

$$R_{(i)} = \{\mu_{i+1}^i,\ \mu_{i+2}^i,\ \cdots,\ \mu_{i+n}^i\}$$

若 n 和 m 互素，则由引理 4 知，存在 $k_0, t \in \mathbb{Z}$，使 $k_0 m + tn = 1$，从而 $k_0 m \equiv 1 \pmod n$. 现在，取自然数 s，使得 $sn + k_0 \in \mathbb{N}$. 由 $k_0 m \equiv 1 \pmod n$ 可得

$$(pms)n + pk_0 m \equiv p \pmod n \qquad 1 \leqslant p \leqslant n$$

于是

$$i+p(sn+k_0)m \equiv i+p \pmod n \qquad 1 \leqslant p, i \leqslant n$$

从而由注 2 可得

$$\mu^{i}_{i+p(sn+k_0)m} = \mu^{i}_{i+p} \qquad 1 \leqslant p, i \leqslant n$$

显然 $p(sn+k_0) \in \mathbb{N}$. 由引理 3 可知 $R_i^m = \{\mu^i_{i+km} : k \in \mathbb{N}\}$，于是 $\mu^i_{i+p} = \mu^i_{i+p(sn+k_0)m} \in R_i^m$，从而

$$R_{(i)} = \{\mu^i_{i+1}, \mu^i_{i+2}, \cdots, \mu^i_{i+n}\} \subseteq R_i^m = \langle G^m \rangle \cap R_{(i)} \subseteq \langle G^m \rangle$$

进而，$D_{n-1} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R_{(i)} \subseteq \langle G^m \rangle$. 再由引理 5 可得 $\mathscr{OI}_n = \langle G^m \rangle$，即 G^m 是半群 $\mathscr{OI}_n$ 的生成集.

综上所述，半群 $\mathscr{OI}_n$ 由集合 G^m 生成的充要条件是 n 与 m 互素. 若 n 与 m 互素，则 $\mathscr{OI}_n = \langle G^m \rangle$，从而

$$\operatorname{rank} \mathscr{OI}_n \leqslant |G^m|$$

由引理 2 可得

$$G^m = \{\mu^i_{i+m} : i \in [n]\}$$

于是 $|G^m| = n$，从而 $\operatorname{rank} \mathscr{OI}_n \leqslant |G^m| = n$. 注意到 $\operatorname{rank} \mathscr{OI}_n \leqslant \mathscr{S}\operatorname{rank}_m \mathscr{OI}_n$. 由引理 5 可知，$\operatorname{rank} \mathscr{OI}_n = n$，从而 $\mathscr{S}\operatorname{rank}_m \mathscr{OI}_n \geqslant \operatorname{rank} \mathscr{OI}_n = n$. 因此，$\mathscr{S}\operatorname{rank}_m \mathscr{OI}_n = n$.

参考文献：

[1] GOMES G M S, HOWIE J M. On the Ranks of Certain Finite Semigroups of Transformations [J]. Math Proc Cambridge Phil Soc，1987，101(3)：395－403.

[2] GARBA G U. Idempotents in Partial Transformation Semigroups [J]. Proc Roy Soc Edinburgh，1990，116(3－4)：359－366.

[3] FERNANDES V H. The Monoid of All Injective Order-Preserving Partial Transformations on a Finite Chain [J]. Semigroup Forum，2001，62(2)：178－204.

[4] 罗永贵，游泰杰，高荣海. 关于 $\mathscr{OI}_n$ 和 $\mathscr{DOI}_n$ 的理想的生成集及其秩 [J]. 贵州师范大学学报：自然科学版，2012，30(2)：54－58.

[5] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. London：Clarendon Press，1995：1－364.

[6] 潘承洞，潘承彪. 初等数论 [M]. 北京：北京大学出版社，1992：1－630.

On the Skewness Rank of the Semigroup $\mathscr{OI}_n$

WU Jing-yan，　ZHAO　Ping，　YOU Tai-jie

School of Mathematics and Computer Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550004，China

Abstract：Let $\mathscr{OI}_n$ be the order-preserving injective partial transformation semigroup on $[n]$. The concept of m-skewness rank of the semigroup $\mathscr{OI}_n$ is introduced for the first time. For an arbitrary integer m such that $1 \leqslant m \leqslant n-1$，the authors prove that the necessary and sufficient condition for the existence of m-skewness rank of the semigroup $\mathscr{OI}_n$ is that m and n are coprime，and obtain that the m-skewness rank of the semigroup $\mathscr{OI}_n$ is n.

Key words：transformation semigroup；order-preserving；rank；nilpotent rank；m-skewness rank

责任编辑　廖　坤