DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.10.013

两平面常宽等腰梯形的对称混合等周亏格估计[①]

张　洪[1]，　罗　淼[2,3]

1. 凯里学院 数学科学学院，贵州 凯里 556011；2. 贵州师范大学 数学与计算机科学学院，贵阳 550001；
3. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了平面上两常宽等腰梯形的对称混合等周亏格，得到了两平面常宽等腰梯形对称混合等周亏格的上界估计. 当两平面凸集 K_0，K_1 均为 Reuleaux 三角形时，其对称混合等周亏格达到最大值.

关 键 词：等周不等式；常宽凸集；常宽等腰梯形；对称混合等周亏格

中图分类号：O186.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2015)10－0079－05

设 K 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点集，如果对于任意的 $A\in K$ 和 $B\in K$，连接 A 和 B 两点的线段也属于 K，则称 K 为凸集. 凸集 K 的边界记为 ∂K，∂K 的长度称为凸集 K 的周长.

欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中，面积为 A 周长为 L 的域 K 的经典等周不等式为

$$L^2-4\pi A\geqslant 0 \tag{1}$$

等号成立的充分必要条件是 K 为圆盘.

可以定义域 K 的等周亏格为

$$\Delta(K)=L^2-4\pi A \tag{2}$$

$\Delta(K)$ 刻画了面积为 A 周长为 L 的域 K 与一半径为 $\frac{L}{2\pi}$ 的圆的差别程度. 20 世纪 20 年代，Bonnesen 发现了一系列形如

$$L^2-4\pi A\geqslant B_k \tag{3}$$

的不等式，其中的 B_k 是与 K 有关的几何不变量，B_k 非负，且当 K 为圆盘时 B_k 为 0. 这些不等式是等周不等式的加强，称为 Bonnesen 型不等式.

同样，可以考虑如下逆 Bonnesen 型不等式：

$$\Delta(K)=L^2-4\pi A\leqslant U_k \tag{4}$$

其中 U_k 为非负的几何不变量.

文献[1－5]中定义欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中两凸域 K_0，K_1 的对称混合等周亏格为等周亏格的推广，并利用积分几何方法得到了欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中两凸域 K_0，K_1 的对称混合等周不等式及 Bonnesen 型对称混合等周不等式，同时给出了对称混合等周亏格的上界与下界估计.

定义 1　设 K_0，K_1 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积分别为 A_0，A_1，周长分别为 L_0，L_1 的凸域，则 K_0，K_1 的对称混合等周亏格定义为

$$\Delta_2(K_0,K_1)=L_0^2L_1^2-16\pi^2A_0A_1 \tag{5}$$

如果存在与 K_0，K_1 有关的几何不变量 $B_{K_0K_1}$，使得

---

① 收稿日期：2014－11－23
基金项目：贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字 LKK[2013]29)；贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字 LKS[2011]16).
作者简介：张　洪(1966－)，男，贵州凯里人，副教授，主要从事积分几何与几何不等式的研究.
通信作者：罗　淼，副教授.

$$\Delta_2(K_0, K_1) \geqslant B_{K_0K_1} \tag{6}$$

其中 $B_{K_0K_1}$ 非负，且当 K_0, K_1 为圆盘时 $B_{K_0K_1}$ 为0. 形如(6)式的不等式称为 Bonnesen 型对称混合等周不等式.

引理1[2-5] 设 K_0, K_1 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积分别为 A_0, A_1，周长分别为 L_0, L_1 的凸域，则

$$L_0^2 L_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geqslant 0 \tag{7}$$

等号成立的充分必要条件是 K_0, K_1 为圆盘.

同样可以考虑：是否存在一个几何不变量 $U_{K_0K_1}$，使得

$$\Delta_2(K_0, K_1) \leqslant U_{K_0K_1} \tag{8}$$

关于凸域 K_0，K_1 的对称混合等周亏格的上界，周家足、任德麟等最近取得了一些进展：

引理2[4] 设 $K_i(i=0,1)$ 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积分别为 A_i，周长分别为 L_i 的凸域，K_i 的最大内接圆半径和最小外接圆半径分别为 $r_i(i=0,1)$ 和 $R_i(i=0,1)$，则有

$$\Delta_2(K_0, K_1) \leqslant 4\pi^2 L_0 L_1 (R_0 R_1 - r_0 r_1)$$

$$\Delta_2(K_0, K_1) \leqslant 16\pi^4 L_0 L_1 (R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2)$$

$$\Delta_2(K_0, K_1) \leqslant \frac{\pi^2 L_0^2 L_1^2}{A_0 A_1}(R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2)$$

其中每一个不等式的等号成立的充分必要条件是 K_0, K_1 均为圆盘.

本文中，我们研究文献[6]中最近得到的常宽等腰梯形，得到两平面常宽等腰梯形对称混合等周亏格的上界估计，即当两平面凸集 K_0, K_1 均为 Reuleaux 三角形时其对称混合等周亏格达到最大值.

1 预备知识

在平面直角坐标系 XOY 中，任意一条直线 G 可用原点到它的距离 p 和从 X 正半轴与它法线的夹角 φ 来确定，这样 G 的方程为

$$G(p, \varphi): x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \qquad 0 \leqslant p < +\infty, 0 \leqslant \varphi < 2\pi \tag{9}$$

当直线 G 过原点时 $p=0$.

设 K 为凸集，它沿 φ 方向的支持函数定义为

$$p = \sup\{p_1: G_1(p_1, \varphi) \cap K \neq \varnothing\} \tag{10}$$

(10)式中 p 相应的直线 $G(p, \varphi)$ 称为 K 沿 φ 方向的支持线，支持线把平面分成两个部分，使 K 完全包含在其中的一个半平面内.

支持函数在积分几何与凸几何中占有非常重要的地位，凸集的一些基本量能用它来表示，平面凸集的周长 L 和面积 A 可表示为[7]：

$$L = \int_0^{2\pi} p(\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{11}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\varphi)\mathrm{d}\varphi + p''(\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{12}$$

凸集 K 的宽度函数定义为

$$\omega(\varphi) = p(\varphi) + p(\varphi + \pi) \tag{13}$$

由(13)式可见，$\omega(\varphi)$ 是对应于方向 φ 和 $\varphi+\pi$ 的两平行支持线间的距离，称之为凸集 K 沿 φ 方向的宽度. 由(11)式可得

$$L = \int_0^{\pi} \omega(\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{14}$$

若 $\omega(\varphi) = d$(常数)，则称 K 为常宽凸集，其边界曲线 ∂K 称为常宽曲线.

关于常宽凸集的研究，有很长的历史和丰富的内容[7-8]. 显然，圆是常宽凸集. 德国工程师 Reuleaux 于1876年构造出非圆的常宽凸集，即 Reuleaux 三角形，其构造为：等边三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，分别以 A_1, A_2, A_3 为圆心，A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 为半径作弧 $\overset{\frown}{A_1A_2}$，$\overset{\frown}{A_2A_3}$，$\overset{\frown}{A_3A_1}$，由这3段圆弧围成的凸域是非圆的常宽凸集.

在所有的常宽曲线中，Barbier 于 1860 年首次证明了[9]：所有宽度为 d 的平面常宽曲线的周长都等于直径为 $\omega(\varphi)=d$ 的圆的周长，即 πd.

由等周不等式可得，平面常宽凸集中圆所围成的面积最大. 而 Blaschke 和 Lebesgue [10-13]分别独立证明了如下著名的 Blaschke-Lebesgue 定理：

引理 3　在所有宽度为 d 的平面常宽凸集中，Reuleaux 三角形的面积最小，为$\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{2}d^2$.

2　平面两常宽凸集的对称混合等周亏格的上界估计

文献[6] 由对角线等于底边长的一类等腰梯形构造了一类新的常宽凸集 —— 常宽等腰梯形(如图 1)：

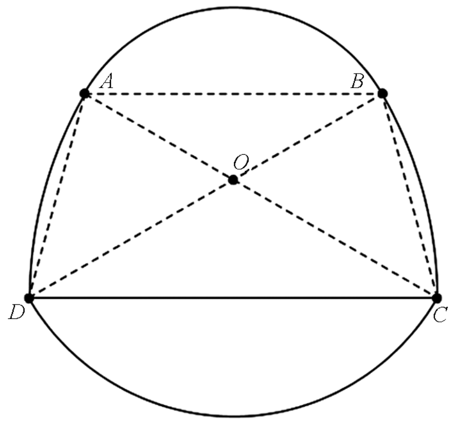

图 1　常宽等腰梯形

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 中，$AC=BD=CD=d$，AC 与 BD 相交于点 O，以 O 为圆心，分别以 OA 为半径作弧$\overset{\frown}{AB}$，以 OC 为半径作弧$\overset{\frown}{CD}$；以 C 为圆心，以 d 为半径作弧$\overset{\frown}{AD}$；以 D 为圆心，以 d 为半径作弧$\overset{\frown}{BC}$. 由以上 4 段圆弧组成的曲线是宽度为 d 的常宽曲线，所围凸体为常宽凸集，即常宽等腰梯形. 这类常宽等腰梯形的面积由两对角线的夹角 $\theta=\angle COD$ 及宽度 d 决定，即：

引理 4[6]　宽度为 d 的常宽等腰梯形的面积为

$$A(\theta)=\frac{d^2}{2}\left(\frac{\theta-2\theta\sin\dfrac{\theta}{2}-\sin\theta}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}+\pi\right)\qquad \frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{15}$$

由定义 1 及引理 4，我们得到平面两常宽等腰梯形的对称混合等周亏格的上界.

定理 1　设 K_0,K_1 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积分别为 A_0,A_1，宽度分别为 d_0,d_1 的常宽等腰梯形，则 K_0，K_1 的对称混合等周亏格 $\Delta_2(K_0,K_1)$ 满足不等式

$$\Delta_2(K_0,K_1)\leqslant\pi^2(3\pi-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)d_0^2d_1^2 \tag{16}$$

等号成立的充要条件是 K_0,K_1 均为 Reuleaux 三角形.

证　由引理 4 知，宽度分别为 d_0,d_1 的常宽等腰梯形的面积分别为：

$$A_0=A(\theta_0)=\frac{d_0^2}{2}\left(\frac{\theta_0-2\theta_0\sin\dfrac{\theta_0}{2}-\sin\theta_0}{2\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}}+\pi\right)\qquad \frac{\pi}{3}\leqslant\theta_0\leqslant\pi$$

与

$$A_1=A(\theta_1)=\frac{d_1^2}{2}\left(\frac{\theta_1-2\theta_1\sin\dfrac{\theta_1}{2}-\sin\theta_1}{2\sin^2\dfrac{\theta_1}{2}}+\pi\right)\qquad \frac{\pi}{3}\leqslant\theta_1\leqslant\pi$$

由定义 1 及引理 4，它们的对称混合等周亏格为

$$\Delta_2(K_0,K_1)=\pi^4 d_0^2 d_1^2-16\pi^2\frac{d_0^2}{2}\left(\frac{\theta_0-2\theta_0\sin\frac{\theta_0}{2}-\sin\theta_0}{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}}+\pi\right)\frac{d_1^2}{2}\left(\frac{\theta_1-2\theta_1\sin\frac{\theta_1}{2}-\sin\theta_1}{2\sin^2\frac{\theta_1}{2}}+\pi\right)=$$

$$\pi^2 d_0^2 d_1^2\left(\pi^2-4\left(\frac{\theta_0-2\theta_0\sin\frac{\theta_0}{2}-\sin\theta_0}{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}}+\pi\right)\left(\frac{\theta_1-2\theta_1\sin\frac{\theta_1}{2}-\sin\theta_1}{2\sin^2\frac{\theta_1}{2}}+\pi\right)\right)$$

记

$$f(\theta_0,\theta_1)=\left(\frac{\theta_0-2\theta_0\sin\frac{\theta_0}{2}-\sin\theta_0}{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}}+\pi\right)\left(\frac{\theta_1-2\theta_1\sin\frac{\theta_1}{2}-\sin\theta_1}{2\sin^2\frac{\theta_1}{2}}+\pi\right)$$

当$\frac{\pi}{3}\leqslant\theta_0\leqslant\pi$时，有

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_0}=\frac{\left(1-\sin\frac{\theta_0}{2}\right)}{\sin^3\frac{\theta_0}{2}}\left(\tan\frac{\theta_0}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)\left(\frac{\theta_1-2\theta_1\sin\frac{\theta_1}{2}-\sin\theta_1}{2\sin^2\frac{\theta_1}{2}}+\pi\right)\geqslant 0$$

当$\frac{\pi}{3}\leqslant\theta_1\leqslant\pi$时，有

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_1}=\frac{\left(1-\sin\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin^3\frac{\theta_1}{2}}\left(\tan\frac{\theta_1}{2}-\frac{\theta_1}{2}\right)\left(\frac{\theta_0-2\theta_0\sin\frac{\theta_0}{2}-\sin\theta_0}{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}}+\pi\right)\geqslant 0$$

当 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$ 时，可得

$$f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\leqslant f\left(\theta_0,\frac{\pi}{3}\right)\leqslant f\left(\pi,\frac{\pi}{3}\right)$$

当 $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ 时，可得

$$f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\leqslant f\left(\frac{\pi}{3},\theta_1\right)\leqslant f\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$$

由此知 $f(\theta_0,\theta_1)$ 在 $\theta_0=\theta_1=\frac{\pi}{3}$，即 K_0,K_1 均为 Reuleaux 三角形时取得最小值，所以 $\Delta_2(K_0,K_1)$ 在 $\theta_0=\theta_1=\frac{\pi}{3}$ 时取得最大值，由此得到

$$\Delta_2(K_0,K_1)\leqslant\pi^2(3\pi-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)d_0^2 d_1^2$$

由定义 1、引理 4 及定理 1，我们立即得到如下对称混合等周亏格的另外 2 个上界：

推论 1 设 K_0,K_1 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积分别为 A_0,A_1，宽度分别为 d_0,d_1 的常宽等腰梯形，则有

$$\Delta_2(K_0,K_1)\leqslant\frac{4\pi^2(3\pi-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)}{(\pi-\sqrt{3})^2}A_0A_1\tag{17}$$

等号成立的充要条件是 K_0,K_1 均为 Reuleaux 三角形.

推论 2 设 K_0,K_1 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积分别为 A_0,A_1，周长分别为 L_0,L_1 的常宽等腰梯形，则有

$$\Delta_2(K_0,K_1)\leqslant\frac{(3\pi-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)}{\pi^2}L_0^2L_1^2\tag{18}$$

等号成立的充要条件是 K_0,K_1 均为 Reuleaux 三角形.

参考文献：

[1] BONNESEN T，FENCHEL W. Theorie Der Konvexen Koeper [M]. New York：Springer-Verlag，1974.

[2] 周传婷，周家足. 关于平面 Bonnesen 型不等式与第 2 类完全椭圆积分的注记 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(4)：145－147.

[3] MA Lei，MA Fang，ZHOU Jia-zu. Bonnesen-Style Inequalities for Non-Simple Closed Plane Curve [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(3)：45－47.

[4] 周家足，任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式 [J]. 数学物理学报，2010，30A(5)：1322－1339.

[5] 曾春娜，周家足，岳双珊. 两平面凸域的对称混合等周不等式 [J]. 数学学报，2012，55(2)：355－362.

[6] 徐文学，周家足，陈方维. 一类常宽“等腰梯形”[J]. 中国科学：数学，2011，41(10)：855－860.

[7] REN De-lin. Topics in Integral Geometry [M]. Sigapore：World Scientific，1994.

[8] SANTAL ACUTEO L. Integral Geometry and Geometric Probability [M]. Canada：Addison-Wesley Publishing Company，1976.

[9] BARBIER E. Note Le Probleme De Laiguille Et Lejeudu Joint Couvert [J]. J de Math Pures Appel，1860(5)：273－286.

[10] BLASCHKE W. Konvexe Bereiche Gegebener Konstanter Breite und Kleinsten Inhalts [J]. Math Ann，1915，76：504－513.

[11] LEBESGUE H. Sur Le Probleme Des Isoperimetres Et Sur Les Domaines De Largeur Constante [J]. Bull Soc Math，1914(7)：72－76.

[12] BESICOVICH A. Minimum Area of a Set of Constant Width [J]. Proc Symp Pure Math，1963(7)：13－14.

[13] HARRELL E. A Direct Proof of a Theorem of Blaschke and Lebesgue [J]. J Geom Analysis，2002，12(1)：81－88.

Remarks on the Symmetric Mixed Isoperimetric Deficit of Two Planar Isosceles Trapezoids of Constant Width

ZHANG Hong[1]，LUO Miao[2,3]

1. *School of Mathematical Sciences，Kaili University，Kaili Guizhou 556011，China；*
2. *School of Mathematics and Computer Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550001，China；*
3. *School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China*

Abstract：In this paper，we investigate the symmetric mixed isoperimetric deficit for two isosceles trapezoids of constant width，and then we obtain the upper bound estimation of the symmetric mixed isoperimetric deficit，that is，the symmetric mixed isoperimetric deficit of the isosceles trapezoids of constant width attains the maximum for *Reuleaux* triangle.

Key words：isoperimetric inequality；convex set of constant width；isosceles trapezoid of constant width；symmetric mixed isoperimetric deficit

责任编辑　廖　坤