第 37 卷第 10 期 西 南 大 学 学 报 (自然科学版) 2015年10月
Vol. 37 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2015

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.10.015

非循环子群的共轭类个数为 7 的有限幂零群①

赵 冲， 吕 恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设 G 是有限群，用 $\delta(G)$ 表示有限群 G 的非循环子群的共轭类个数. $\delta(G)$ 对群 G 的结构有较强的影响，研究了非循环子群共轭类数是 7 的有限幂零群的分类.

关 键 词：有限幂零群；p -群；Sylow 子群

中图分类号：O152 **文献标志码**：A **文章编号**：1673－9868(2015)10－0089－04

在群论中，常常借助子群的性质去研究大群的结构和性质. 在本文中，我们用 G 表示有限群，$\delta(G)$ 表示有限群 G 的非循环子群的共轭类个数. 众所周知，$\delta(G)=0$ 当且仅当 G 循环. 文献[1]证明了：$\delta(G)=1$ 当且仅当 G 内循环，并给出了分类. 文献[2－3]分别研究了当 $\delta(G)=2$，$\delta(G)=3$ 时的可解群，并给出了分类，这两类群分别有 9 类和 14 类，在此不一一列举. 符合条件的可解群的分类数随着 $\delta(G)$ 的增大而增多. 对于可解群的讨论也变得越来越复杂. 文献[2]证明了：$\delta(G)\leqslant 4$ 时，有限群 G 是可解的，所以 $\delta(G)>4$，在不好判定可解性的情况下，幂零性又比可解性相对特殊，就只讨论有限幂零群的分类情况了. 所以文献[4－6]相继讨论的是 $\delta(G)=4$，$\delta(G)=5$，$\delta(G)=6$ 时的有限幂零群的情况，并给出了完全分类. 文献[7－9]也研究了具有某些特殊子群的有限群. 在本文中，$n(G)$ 表示 G 的子群个数，Q_n 表示 n 阶广义四元数群，D_n 表示 n 阶广义二面体群，Z_n 表示 n 阶循环群. 其它术语和符号都是标准的，参见文献[10].

引理 1[10] 设 $|G|=p^n$，$0\leqslant k\leqslant n$，则 $s_k(G)\equiv 1 \pmod p$.

引理 2[10] 设 $|G|=p^n$，$1<m<n$，若 $s_m(G)=1$，则 G 循环.

引理 3[5] 设 G 为循环群，$|G|=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$，其中 $p_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是互不相同的素数，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是正整数，则 $n(G)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_t+1)$.

定理 1 设 G 是有限幂零群，且 $|\pi(G)|\geqslant 2$，$\delta(G)=7$，则 G 有且只有 1 个非循环的 Sylow 子群.

证 若 G 的 Sylow 子群均循环，因 G 是幂零群，则 G 是循环群，与 $\delta(G)=7$ 矛盾. 假设 G 至少有 2 个非循环的 Sylow 子群，我们将推出这一假设也与 $\delta(G)=7$ 矛盾，从而 G 有且只有 1 个非循环的 Sylow 子群.

由 G 是幂零群，则

$$G=P_1\times P_2\times P_3\times\cdots\times P_t$$

其中 P_i 是 G 的 Sylow-p_i 子群，$|P_i|=p_i^{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,t)$，不妨设 $p_1<p_2$. 不失一般性，假设此时 P_1，P_2 均为非循环群，则

$$|P_1|=p_1^{\alpha_1} \qquad \alpha_1\geqslant 2$$

① 收稿日期：2014－12－12
基金项目：国家自然科学基金项目(11271301，11471226).
作者简介：赵 冲(1989－)，女，湖北武汉人，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：吕 恒，教授.

$$|P_2| = p_2^{\alpha_2} \qquad \alpha_2 \geqslant 2$$

下面对 P_1, P_2 的阶分情况讨论：

当 $|P_1| = p_1^2$，$|P_2| = p_2^2$ 时，有：

$$G \cong Z_{p_1} \times Z_{p_1} \times Z_{p_2} \times Z_{p_2} \times P_3 \times \cdots \times P_t$$

$$n(Z_{p_2} \times Z_{p_2}) = 1 + p_2 + 1 + 1 \geqslant 6$$

则这些子群与 P_1 作直积，生成的群都是包含 P_1 的非循环子群，且均正规于 G，从而 G 中包含 P_1 的非循环子群共轭类个数不小于 6. 同理

$$n(Z_{p_1} \times Z_{p_1}) = 1 + p_1 + 1 + 1 \geqslant 5$$

则 G 中包含 P_2 的非循环子群共轭类个数不小于 5. 从而 $\delta(G) \geqslant 6 + 5 - 1 = 10$，与 $\delta(G) = 7$ 矛盾.

当 $|P_1| = p_1^2$，$|P_2| = p_2^{\alpha_2}(\alpha_2 \geqslant 3)$ 时，P_2 的不同阶子群的个数不小于 4，同理 G 中包含 P_1 的非循环子群共轭类个数不小于 4. 又因 $|P_1| = p_1^2$，且 P_1 非循环，则 $P_1 \cong Z_{p_1} \times Z_{p_1}$，则

$$G \cong Z_{p_1} \times Z_{p_1} \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_t$$

又因

$$n(Z_{p_1} \times Z_{p_1}) = 1 + p_1 + 1 + 1 \geqslant 5$$

则 G 中包含 P_2 的非循环子群共轭类个数不小于 5. 从而 $\delta(G) \geqslant 4 + 5 - 1 = 8$，与 $\delta(G) = 7$ 矛盾.

当 $|P_1| = p_1^{\alpha_1}(\alpha_1 \geqslant 3)$，$|P_2| = p_2^{\alpha_2}(\alpha_2 \geqslant 3)$ 时，由文献[10]中内循环群的分类，P_1, P_2 不能全为内循环群. 不妨设 P_2 为非内循环群，则存在真子群 $H \leqslant P_2$，且 H 非循环. 又因 P_1 的不同阶子群的个数不小于 4，设其子群为 $M_1, M_2, \cdots, M_i(i \geqslant 4)$，则 G 中包含非循环子群的共轭类至少有 $P_2 \times M_i$，$H \times M_i$，则 $\delta(G) \geqslant 8$，与 $\delta(G) = 7$ 矛盾.

综上所述，假设"G 至少有 2 个非循环的 Sylow 子群"不成立，则 G 有且只有 1 个非循环的 Sylow 子群.

定理 2 设 G 是有限幂零群，且 $|\pi(G)| \geqslant 2$，$\delta(G) = 7$，则 G 同构于下列群之一：

(i) $G \cong Z_{p_1} \times Z_{p_1} \times Z_{p_2^6}$；

(ii) $G \cong Q_8 \times Z_{p_2^6}$.

证 因 G 是幂零群，则 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t$，其中 $P_i(i = 1, 2, \cdots, t)$ 是 G 的 Sylow-p_i 子群，且 $t \geqslant 2$. 因 $\delta(G) = 7$，由定理 1 知 G 有且只有 1 个非循环的 Sylow 子群，不妨设为 P_1，则 $G = P_1 \times K$，那么 K 为循环群. 又因$(|P_1|, |K|) = 1$，$|K| > 1$，由于 K 中任意阶子群有且只有 1 个，故 K 中任意子群与 P_1 作直积都是非循环不共轭的. 因 $\delta(G) = 7$，则只能是 $\delta(P_1) = 1$，$n(K) = 7$. 由文献[1]知 $P_1 \cong Z_{p_1} \times Z_{p_1}, Q_8$. 由引理 3 知 $K \cong Z_{p_2^6}$. 从而

$$G \cong Z_{p_1} \times Z_{p_1} \times Z_{p_2^6}$$

或者

$$G \cong Q_8 \times Z_{p_2^6}$$

定理 3 设 G 是 p-群，且 $\delta(G) = 7$，则 G 同构于下列群之一：

(i) $G \cong \langle a, b, c \mid a^5 = b^5 = c^5 = 1, [a, b] = c, [a, c] = 1, [b, c] = 1 \rangle$；

(ii) $G \cong Z_{p^7} \times Z_p$；

(iii) $G \cong \langle a, b \mid a^{p^7} = 1, b^p = 1, a^b = a^{1+p^6} \rangle$，$p \neq 2$；

(iv) $G \cong \langle a, b \mid a^{2^4} = 1, b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle = D_{2^5}$；

(v) $G \cong \langle a, b \mid a^{2^5} = 1, b^2 = a^{2^4}, a^b = a^{-1} \rangle = Q_{2^6}$；

(vi) $G \cong \langle a, b \mid a^{2^7} = 1, b^2 = 1, a^b = a^{1+2^6} \rangle$.

证 因为 p-群的每个极大子群都正规，所以 G 的每个极大子群自成一个共轭类. 设 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 是

G 的所有极大子群. 若 $s=1$，由引理 2，G 是循环群. 又由引理 1 知，p -群不可能恰含 2 个极大子群，所以 $s\geqslant 3$. 下面分两种情况讨论：

情形 1　若 G 的极大子群皆为非循环群. 由 $\delta(G)=7$，则 $3\leqslant s\leqslant 6$.

当 $s=3$ 时. 不失一般性，设有：

(a) $\delta(M_1)=\delta(M_2)=1$，$\delta(M_3)=4$；

(b) $\delta(M_1)=1$，$\delta(M_2)=2$，$\delta(M_3)=3$；

(c) $\delta(M_i)=2(i=1,2,3)$.

由于有 3 个极大子群的 p -群必为二元生成的 2 -群，所以 $p=2$.

若为(a)，由文献[1]，$M_1,M_2\cong Z_2\times Z_2,Q_8$. 若 $M_1,M_2\cong Z_2\times Z_2$，由于 p -群的极大子群的阶相同，则 $|M_3|=4$，而由文献[4]，这样的 M_3 是不存在的. 若 $M_1,M_2\cong Q_8$，同理 $|M_3|=8$，而由文献[4]，这样的 M_3 也是不存在的.

若为(b)，由文献[1]，$M_1\cong Z_2\times Z_2,Q_8$. 若 $M_1\cong Z_2\times Z_2$，同上，因极大子群的阶相同，这样的 M_3 是不存在的. 若 $M_1\cong Q_8$，同理 $|M_2|=|M_3|=8$，而由文献[2－3]，$M_2\cong Z_4\times Z_2$，$M_3\cong D_8$. 又由于 G 为二元生成的 16 阶群，考虑 G/G'，由于 G 是 p -群，且无循环极大子群，则 $|G/G'|\geqslant 4$. 若 $|G'|=4$，则 G 为极大类 2 -群，从而存在循环极大子群，矛盾. 若 $|G'|=2$，则 G 为内交换群，与 D_8 不交换矛盾.

若为(c)，由文献[2]，$M_i\cong Z_4\times Z_2(i=1,2,3)$，则 G 为二元生成的 16 阶群，同样去考虑 G/G'，则 G 必为内交换群，所以可以确定

$$G\cong\langle a,b\mid a^4=b^4=1,a^b=a^{-1}\rangle$$

而此时 G 的极大子群为 3 个，但这 3 个极大子群有交，则 $\delta(G)=5$，故也不成立. 则 $s\neq 3$.

假设 $s=4$. 不失一般性，设有：(a) $\delta(M_1)=\delta(M_2)=\delta(M_3)=1$，$\delta(M_4)=3$；

(b) $\delta(M_1)=\delta(M_2)=1$，$\delta(M_3)=\delta(M_4)=2$.

由于有 4 个极大子群的 p -群必为 3 -群，所以 $p=3$. 由文献[1]，$M_1\cong Z_3\times Z_3$，故 $|G|=3^3$，则 G 的极大子群的阶为 9，9 阶群或为循环群，或为初等交换群，显然矛盾. 则 $s\neq 4$.

假设 $s=5$. 不失一般性，设 $\delta(M_1)=\delta(M_2)=\delta(M_3)=\delta(M_4)=1$，$\delta(M_5)=2$. 由于有 5 个极大子群的 p -群必为 2 -群，所以 $p=2$. 若为(a)，由文献[1]，$M_i\cong Z_2\times Z_2,Q_8(i=1,2,3,4)$. 若 $M_i\cong Z_2\times Z_2$，这样的 M_5 是不存在的. 若 $M_i\cong Q_8$，又由于 G 为 16 阶群，类似地考虑 G/G'，则 G 必为内交换群，与 Q_8 不交换矛盾. 则 $s\neq 5$.

假设 $s=6$. 不失一般性，设 $\delta(M_i)=1(i=1,2,3,4,5,6)$. 由于有 6 个极大子群的 p -群必为 5 -群，所以 $p=5$. 由文献[1]，$M_i\cong Z_5\times Z_5(i=1,2,3,4,5,6)$，故 $|G|=5^3$，且无循环极大子群. 由文献[10]，

$$G\cong Z_5\times Z_5\times Z_5$$

或者

$$G\cong\langle a,b,c\mid a^5=b^5=c^5=1,[a,b]=c,[a,c]=1,[b,c]=1\rangle$$

对于前一种，极大子群个数 $1+p+p^2=31>6$，矛盾. 对于后一种，考虑 $|G/\Phi(G)|=|G/G'|=5^2$，则极大子群个数为 $1+p=6$. 则 $G\cong\langle a,b,c\mid a^5=b^5=c^5=1,[a,b]=c,[a,c]=1,[b,c]=1\rangle$.

情形 2　若 G 存在循环极大子群，因 G 不为循环群，又由文献[6]，知 G 只能同构于下列群之一：

(i) $G\cong Z_{p^7}\times Z_p$；

(ii) $G\cong\langle a,b\mid a^{p^7}=1,b^p=1,a^b=a^{1+p^6}\rangle$，$p\neq 2$；

(iii) $G\cong\langle a,b\mid a^{2^5}=1,b^2=1,a^b=a^{-1}\rangle=D_{2^5}$；

(iv) $G\cong\langle a,b\mid a^{2^5}=1,b^2=a^{2^4},a^b=a^{-1}\rangle=Q_{2^6}$；

(v) $G\cong\langle a,b\mid a^{2^7}=1,b^2=1,a^b=a^{1+2^6}\rangle$.

参考文献:

[1] MILLER G A, MORENO H C. Non-Abelian Groups in Which Every Subgroups is Abelian [J]. Trans Amer Math Soc, 1903(4): 398-404.

[2] LI Shi-rong, ZHAO Xu-bo. Finite Groups with Few Non-Cyclic Subgroups [J]. Journal of Group Theory, 2007, 10: 225-233.

[3] MENG Wei, LU Jia-kuan, LI Shi-rong. Finite Groups with Few Non-Cyclic Subgroups Ⅱ [J]. Algebra Colloquium, 2013, 20(1): 81-88.

[4] 孟 伟, 卢家宽, 李世荣. 恰有 4 个非循环子群共轭类的有限幂零群 [J]. 广西大学学报: 自然科学版, 2009, 34(6): 845-848.

[5] 郭凯艳, 曹洪平, 陈贵云. 非循环子群共轭类个数为 5 的有限幂零群 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2012, 37(4): 12-15.

[6] 王同洲, 黎先华. 非循环子群共轭类个数为 6 的有限幂零群 [D]. 苏州: 苏州大学, 2013.

[7] 郭凯艳, 陈贵云, 周 伟. 某些特殊子群的个数对有限群结构的影响 [D]. 重庆: 西南大学, 2012.

[8] 蔡 一, 吕 恒, 陈贵云. 含有 CC-子群的有限群 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2011, 36(3): 4-6.

[9] 郭纪莲, 李金宝, 陈贵云. 有限群的几乎 s-半置换子群 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2013, 38(4): 12-15.

[10] 徐明曜. 有限群导引: 上册 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2001.

[11] 江维硕, 陈贵云. 自同构群的阶为 $8p_1p_2\cdots p_n$ 的一类群 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2013, 35(12): 53-58.

[12] 张 钰, 吕 恒. 有限交换群的直积分解 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2014, 36(12): 61-64.

Finite Nilpotent Groups with 7 Conjugate Classes of Non-cyclic Subgroups

ZHAO Chong, LÜ Heng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let G be a finite group and $\delta(G)$ denote the number of conjugate classes of the non-cyclic subgroups of G. It is quite clear that $\delta(G)$ gives a lot of information of G. In this paper, we discuss the structure of finite nilpotent group G with 7 conjugate classes of non-cyclic subgroups.

Key words: finite nilpotent group; p-group; Sylow subgroup

责任编辑 廖 坤