

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.10.016

周期 Gilpin-Ayala 脉冲收获系统的最优控制策略^①

郭海叶, 窦家维, 赵 莲

陕西师范大学 数学与信息科学学院, 西安 710062

摘要: 研究一类由周期 Gilpin-Ayala 模型描述的脉冲收获系统的优化控制问题. 在固定时刻对种群实施脉冲收获, 在周期环境下, 考虑收获成本因素, 以最大经济净收益为管理目标, 研究不同的收获努力量对经济收益的影响, 并获得最优的收获策略. 首先研究了该系统周期解的存在唯一性和全局渐近稳定性, 进一步利用脉冲微分方程的极值原理和一些分析技巧, 得到了最优收获策略满足的数值方程组, 最后在一种特殊情况下得到了最优控制策略的具体表达式, 验证了所得到的主要结果. 其研究结果推广改进了一些现有文献的相关结论.

关键词: 周期 Gilpin-Ayala 系统; 脉冲收获; 极值原理; 最大经济净收益

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2015)10-0093-06

可再生资源优化管理问题的研究和资源的可持续发展密切相关, 近年来如何利用有限的可再生资源, 实现其可持续开发和利用的相关问题, 受到广泛的关注. 对于生物资源的优化控制问题, 许多学者对其研究并取得了一些重要结果. 在文献[1-2]中, 作者系统地阐述了可再生资源优化管理的基本理论和方法. 文献[3]讨论了脉冲泛函微分方程周期解的存在性, 文献[4-7]讨论了 logistic 模型的连续收获及脉冲收获问题, 文献[8-11]研究了 Gompertz 模型的脉冲收获问题. 目前所研究的脉冲收获系统大部分都以最大持续产量或周期末的最大储量为管理目标^[6-7, 9, 11], 没有考虑收获成本, 但在实际种群收获过程中的成本花费是必不可少的, 本文所研究的性能指标函数中考虑了收获成本因素, 且假设收获成本与收获努力量成正比, 这类优化问题更具实际意义.

1 模型描述

Gilpin-Ayala 模型是 logistic 模型的推广, 模型更加符合实际, 由于模型本身的特点, 研究起来也变得比较困难. 文献[12]讨论了一类时滞 Gilpin-Ayala 系统周期解的存在性, 文献[13]研究了自治 Gilpin-Ayala 模型的最优连续收获问题. 目前关于 Gilpin-Ayala 模型的脉冲优化控制问题的研究结果还较少, 本文主要讨论由周期 Gilpin-Ayala 模型描述的脉冲收获系统的优化控制问题. 在给定时刻对种群实施脉冲收获, 考虑收获成本因素, 以最大经济净收益为管理目标, 研究不同的收获努力量对经济收益的影响, 并确定最优的收获策略. 文献[7]对周期 logistic 脉冲收获系统的最优控制策略进行了研究, 本文的研究结果推广改进了文献[7]的相关结论.

所要研究的模型由下面脉冲微分系统描述:

① 收稿日期: 2014-06-09
基金项目: 国家自然科学基金项目(61272435).
作者简介: 郭海叶(1989-), 女, 山西大同人, 硕士研究生, 主要从事微分方程的研究.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) - m(t)x^{\theta+1}(t) & t \neq t_i \\ x(t_i^+) = (1 - E_i)x(t_i) & i \in N^+ \end{cases} \quad (1)$$

系统(1)中的第一式为描述种群增长的 Gilpin-Ayala 模型, $x(t)$ 为 t 时刻的种群数量, $r(t)$ 表示种群的内在增长率, θ 为正常数, $m(t) > 0$, $m(t)x^{\theta+1}(t)$ 项描述种群生长的密度制约因素, $r(t)$, $m(t)$ 都是连续的 T -周期函数; 第二式描述了在 $t_i (i \in N^+ = \{1, 2, \dots\})$ 时刻对种群以努力量 E_i 进行比例收获, 并且假设存在一个 $q \in N^+$, 对所有 $i \in N^+$, 使得 $t_{i+q} = t_i + T$, $E_{i+q} = E_i$, 其中 $x(t_i^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_i + h)$. 为了保证可持续发展, 主要研究系统在保持周期变化的前提下的最优控制问题, 所以要求系统的解具有周期性.

$$x(t) = x(t + T) \quad (2)$$

如果当 $t \neq t_i$ 时 $x(t)$ 连续可微, 在 $t = t_i$ 处 $x(t)$ 左连续, $x(t_i^+)$ 存在, 并且 $x(t)$ 满足(1)式中各式及(2), 则称 $x(t)$ 是(1)式的一个周期解.

本文选取收获努力量 $E = (E_1, \dots, E_q)$ 作为控制变量, 定义允许集为

$$D = \{E = (E_1, \dots, E_q), 0 \leq E_k < 1, k = 1, \dots, q, \text{且系统(1)存在唯一正周期解}\}$$

性能指标函数定义为每个周期内的经济净收益, 即为

$$J(E) = \sum_{i=1}^q [Kx(t_i)E_i - LE_i] \quad (3)$$

其中 K 和 L 为正常数, 分别表示种群的单价以及单位努力收获成本. $x = x(t)$ 表示在控制变量 $E = (E_1, \dots, E_q)$ 之下(1)式对应的正周期解. $K \sum_{i=1}^q x(t_i)E_i$ 表示总收益, $L \sum_{i=1}^q E_i$ 表示收获总成本.

如果存在 $E^* \in D$, 使得

$$J(E^*) = \sup_{E \in D} J(E) \quad (4)$$

则称 E^* 为一个最优控制策略, 并以 $x^*(t)$ 表示相应的解曲线.

2 系统正周期解的存在性及稳定性

定理 2.1 如果条件

$$\prod_{i=1}^q (1 - E_i) e^{\int_0^T r(t) dt} > 1 \quad (5)$$

成立, 则系统(1)存在唯一的正 T -周期解, 并且是全局渐近稳定的.

证 对(1)式作变换 $u(t) = x^{-\theta}(t)$, 得到下面非齐次线性脉冲系统:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = -\theta r(t)u(t) + \theta m(t) & t \neq t_i \\ u(t_i^+) = (1 - E_i)^{-\theta} u(t_i) & i = 1, \dots, q \end{cases} \quad (6)$$

直接求解, 可得到系统(6)满足初值条件 $t = 0$ 时 $u = u(0)$ 的唯一解为

$$u(t) = u(0) \prod_{0 < t_i < t} (1 - E_i)^{-\theta} e^{-\theta \int_0^t r(s) ds} + \theta \int_0^t \prod_{0 < s < t_i < t} (1 - E_i)^{-\theta} e^{-\theta \int_s^t r(\sigma) d\sigma} m(s) ds$$

由(2)式得, $u(0) = u(T)$, 在条件(5)之下, 由上式可得

$$u(0) = [1 - \prod_{i=1}^q (1 - E_i)^{-\theta} e^{-\theta \int_0^T r(s) ds}]^{-1} \theta \int_0^T \prod_{0 < s < t_i < T} (1 - E_i)^{-\theta} e^{-\theta \int_s^T r(\sigma) d\sigma} m(s) ds > 0$$

由上式易知, 当 $u(0) > 0$ 时, 则对所有的 $t \in R$, 有 $u(t) > 0$, 因此得到系统(6)的唯一正周期解. 如果记该周期解为 $u_p(t)$, 则 $x_p(t) = [u_p(t)]^{-1/\theta}$ 为系统(1)的唯一正周期解.

下面证明在定理的条件下, 周期解 $x_p(t)$ 是全局渐近稳定的.

设 $x = x(t)$ 为系统(1)的具有任意正初值 $x(0) = x_0 > 0$ 的解, 则 $u(t) = x^{-\theta}(t)$ 为系统(6)的具有初

值 $u(0) = u_0 = 1/x_0^\theta > 0$ 的解.

由于

$$d(u) = \inf_{t \geq 0} u(t) > 0, \quad d(u_p) = \inf_{t \geq 0} u_p(t) > 0$$

得到

$$\begin{aligned} |x(t) - x_p(t)| &= |u^{-1/\theta}(t) - u_p^{-1/\theta}(t)| = \\ &= \left| \frac{u_p^{1/\theta}(t) - u^{1/\theta}(t)}{u_p^{1/\theta}(t)u^{1/\theta}(t)} \right| \leq \frac{|u_p^{1/\theta}(t) - u^{1/\theta}(t)|}{[d(u)d(u_p)]^{1/\theta}} \end{aligned}$$

由于条件(5)保证了系统(6)的解是全局渐近稳定的, 由上式可知系统(1)的解也是全局渐近稳定的. 证毕.

注 2.1 从上面的证明过程可知, 当条件(5)成立时, 系统(1)存在唯一的正周期解, 而当条件(5)反向成立时, 系统(1)不存在正周期解. 因此可得允许集的表示式为

$$D = \{E = (E_1, \dots, E_q), 0 \leq E_k < 1, k = 1, \dots, q, \text{ 且满足 } \prod_{i=1}^q (1 - E_i) > e^{-\int_0^T r(t)dt}\}$$

3 优化问题求解

本文所要研究的控制问题(1)–(4)是一个脉冲优化控制问题, 文献[14–15]给出了脉冲微分系统的极值原理, 为了直接利用文献[14–15]中的极值原理研究此问题, 需将问题转化为 $(-J)(E) = \sum_{i=1}^q [LE_i - Kx(t_i)E_i]$ 的极小值问题, 即寻求 $E^* \in D$, 使得

$$(-J)(E^*) = \inf_{E \in D} (-J)(E) \quad (7)$$

按照文献[14]的记号, 有

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \quad g_0 = LE_i - Kx(t_i)E_i \\ f_1 &= r(t)x(t) - m(t)x^{\theta+1}(t), \quad g_1 = -E_ix(t_i) \end{aligned}$$

首先容易证明优化控制问题满足脉冲优化控制问题极值原理所需要的必要条件(参照文献[14]).

若用 H 表示“连续”Hamilton 函数, H_c 表示“脉冲”Hamilton 函数, 则有

$$\begin{aligned} H(\lambda, x) &= \lambda[r(t)x(t) - m(t)x^{\theta+1}(t)] \\ H_c &= LE_i - Kx(t_i)E_i - \lambda(t_i^+)E_ix(t_i) \end{aligned}$$

其中 $\lambda = \lambda(t)$ 为协态变量.

由文献[14]中的极值原理知, 如果 $E = (E_1, \dots, E_q) \in D$ 是一个优化控制策略, 并且 $x = x(t)$ 是该最优收获策略 E 对应的解曲线, 则一定存在协态变量 $\lambda(t)$, 满足协态方程:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda[(\theta+1)m(t)x^\theta(t) - r(t)] & t \neq t_i \\ \lambda(t_i) = \lambda(t_i^+) + \frac{\partial H_c}{\partial x} = (1 - E_i)\lambda(t_i^+) - KE_i & i = 1, 2, \dots, q \\ \lambda(t) = \lambda(t+T) \end{cases} \quad (8)$$

如果最优控制策略 E 在 $\text{int } D$ 取得, 则 H_c 在 E 处取得极值, 此时最优控制策略 E 应满足下面的奇异条件:

$$\frac{\partial H_c}{\partial E} = L - Kx(t_i) - \lambda(t_i^+)x(t_i) = 0 \quad (9)$$

下面, 结合式(1)–式(2), 式(8)–式(9)求解最优策略.

首先, 求得系统(1)满足初值条件 $x(t_0^+) = x_0$ 的解为

$$x(t) = [x_0^{-\theta} \prod_{t_0 < t_i < t} (1 - E_i)^{-\theta} e^{-\theta \int_{t_0}^t r(s)ds} + \theta \int_{t_0}^t \prod_{s < t_i < t} (1 - E_i)^{-\theta} e^{-\theta \int_s^t r(\sigma)d\sigma} m(s)ds]^{-1/\theta}$$

特别地, 当 $t = t_{i+1}$ 时, 有

$$x(t_{i+1}) = \{[(1 - E_i)x(t_i)]^{-\theta} D_{i+1} + B_{i+1}\}^{-1/\theta} \quad (10)$$

其中

$$D_{i+1} = e^{-\theta \int_{t_i}^{t_{i+1}} r(s) ds}$$

$$B_{i+1} = \theta \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\theta \int_s^{t_{i+1}} r(\sigma) d\sigma} m(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

(10) 式为状态方程(1) 的频闪映射, 同时也是优化策略 $E = (E_1, \dots, E_q)$ 和对应的解 $x(t)$ 应满足的一组条件.

另一方面, 在 $(t_i, t_{i+1}]$ 上分别积分状态方程(1) 和协态方程(8) 中的微分方程, 得到

$$x(t_{i+1}) = x(t_i^+) e^{\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(t) - m(t)x^\theta(t) dt} \quad (11)$$

$$\lambda(t_{i+1}) = \lambda(t_i^+) e^{\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\theta + 1)m(t)x^\theta(t) - r(t) dt} \quad (12)$$

将(11) 式代入(12) 式, 得到

$$\lambda(t_{i+1}) = \frac{\lambda(t_i^+)}{D_{i+1}} \left[\frac{x(t_i^+)}{x(t_{i+1})} \right]^{\theta+1} \quad (13)$$

再将奇异条件(9) 和频闪映射(10) 代入(13) 式, 得到

$$\lambda(t_{i+1}) = \left[\frac{L}{x(t_i)} - K \right] D_{i+1}^{\frac{1}{\theta}} [1 - B_{i+1}x^\theta(t_{i+1})]^{\frac{\theta+1}{-\theta}} \quad (14)$$

进一步, 结合奇异条件(9) 和协态方程(8) 中的脉冲条件, 得到

$$\lambda(t_{i+1}) = (1 - E_{i+1}) \left(\frac{L}{x(t_{i+1})} - K \right) - KE_{i+1} \quad (15)$$

由(14) 式和(15) 式可得到优化策略 E 和对应的解 $x(t)$ 应满足的另一组关系式:

$$\left[\frac{L}{x(t_i)} - K \right] D_{i+1}^{\frac{1}{\theta}} [1 - B_{i+1}x^\theta(t_{i+1})]^{\frac{\theta+1}{-\theta}} = (1 - E_{i+1}) \left(\frac{L}{x(t_{i+1})} - K \right) - KE_{i+1} \quad (16)$$

在(10) 式和(16) 式中取 $i = 1, \dots, q$, 则由(10) 式和(16) 式共得到 $2q$ 个方程, 又注意到周期条件 $t_{i+q} = t_i + T$, $E_{i+q} = E_i$ ($i \in N^+$), 因此(10) 式和(16) 式恰好包含 $2q$ 个末知数 E_i , $x(t_i)$, $i = 1, \dots, q$. 关系式(10) 和(16) 构成了优化问题(1) - (4) 的优化控制策略和其解曲线所应满足的优化系统. 优化系统是一个数值方程组, 一般情况下可以用数值方法求解. 如果求得优化系统的解属于允许集 D , 则其为最优解.

4 一种特殊情况

这一部分考虑 Gilpin-Ayala 模型的一种特殊情形, 当 $\theta = 1$ 时, 得到了 logistic 模型系统, 同时令 $L = 0$, 即不考虑成本因素.

这时系统(1) 变为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) - m(t)x^2(t) & t \neq t_i \\ x(t_i^+) = (1 - E_i)x(t_i) & i \in N^+ \end{cases} \quad (17)$$

性能指标函数为

$$J(E) = \sum_{i=1}^q Kx(t_i)E_i \quad (18)$$

下面不妨取 $K = 1$ (这样假设不会影响优化策略的研究结果).

由关系式(10) 和(16), 对 $i = 1, \dots, q$, 得到

$$x(t_i) = \frac{1 - \sqrt{D_i}}{B_i}$$

$$E_i = 1 - \frac{\sqrt{D_{i+1}}(1 - \sqrt{D_{i+1}})}{1 - \sqrt{D_i}} \frac{B_i}{B_{i+1}}$$

因此, 如果下面条件成立:

$$\frac{\sqrt{D_{i+1}}(1 - \sqrt{D_{i+1}})}{1 - \sqrt{D_i}} \frac{B_i}{B_{i+1}} < 1$$

可获得当 $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, q$ 时, 系统对应的最优种群水平为:

$$x_p(t) = [e^{-\int_{t_i}^t r(\sigma) d\sigma} B_{i+1} [\sqrt{D_{i+1}} - D_{i+1}]^{-1} + \int_{t_i}^t m(s) e^{-\int_s^t r(\sigma) d\sigma} ds]^{-1}$$

以及一个周期内的最大收益:

$$J(E) = \sum_{i=1}^q x(t_i) E_i = \sum_{i=1}^q \left[\frac{1 - \sqrt{D_i}}{B_i} - \frac{\sqrt{D_{i+1}}(1 - \sqrt{D_{i+1}})}{B_{i+1}} \right]$$

由于 $B_{q+1} = B_1$, $D_{q+1} = D_1$, 因此

$$J(E) = \sum_{i=1}^q \frac{(1 - \sqrt{D_i})^2}{B_i}$$

这与文献[7]所得到的相关结果完全一致.

5 总 结

本文利用脉冲微分方程的极值原理和一些分析技巧, 研究了周期 Gilpin-Ayala 模型描述的脉冲收获系统的优化控制问题. 在比例收获的条件下, 考虑如何选择收获策略使经济净收益达到最大, 在定理 2.1 的条件成立时获得了正周期解的存在唯一性和渐近稳定性, 并得到了最优收获策略满足的数值方程组. 本文所用的研究方法和所获得的结论为资源管理者制定优化管理决策提供了理论依据, 具有重要的实际意义.

参考文献:

- [1] CLARK C W. Mathematical Bioeconomics, the Optimal Management of Renewable Resources [M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1990.
- [2] 陈兰荪, 孟新柱, 焦建军. 生物动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [3] WANG Ying, LEI Yan, WANG Guang-quan. Existence of Three Positive Periodic Solutions to Functional Differential Equations with Impulses [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2010, 32(8): 123—128.
- [4] TANG San-yi, CHEKE R A, XIAO Yan-ni. Optimal Impulsive Harvesting on Non-Autonomous Beverton-Holt Difference Equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications, 2006, 65(12): 2311—2341.
- [5] XU C L, BOYCE M S, DALEY D J, et al. Harvesting in Seasonal Environments [J]. J Math Biol, 2005, 50(6): 663—682.
- [6] ZHANG Xiao-ying, SHUAI Zhi-sheng, WANG Ke. Optimal Impulsive Harvesting Policy for Single Population [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2003, 4(4): 639—651.
- [7] XIAO Yan-ni, CHENG Dai-zhan, Qin Hua-su. Optimal Impulsive Control in Periodic Ecosystem [J]. Systems Control Lett, 2006, 55(7): 558—565.
- [8] ZHANG Yu-juan, XIU Zhi-long, CHEN Lan-sun. Optimal Impulsive Harvesting of a Single-Species with Gompertz Law of Growth [J]. Journal of Biological Systems, 2006, 14(2): 303—314.
- [9] DONG Ling-zhen, CHEN Lan-sun, SUN Li-hua. Optimal Harvesting Policies for Periodic Gompertz Systems [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2007, 8(2): 572—578.

- [10] 杨 娜, 窦家维. 具有脉冲收获的 Gompertz 模型的最大存储量问题 [J]. 陕西科技大学学报, 2013, 31(3): 161—166.
- [11] 王丽敏, 谭远顺. 周期 Gompertz 生态系统中的最优脉冲控制收获策略 [J]. 系统科学与数学, 2007, 27(4): 520—528.
- [12] 胡 猛, 王 健. 一类时滞 Gilpin-Ayala 系统的概周期解的存在性 [J]. 兰州理工大学学报, 2013, 39(1): 142—146.
- [13] 张晓颖, 李晚霞. 单种群生物资源的最优开发 [J]. 长春大学学报, 2001, 11(6): 20—22.
- [14] BLAQUIERE A. Differential Games with Piece-Wise Continuous Trajectories [J]. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer Verlag, 1977(3): 34—69.
- [15] REMPALA R, ZABCZYK J. On the Maximum Principle for Deterministic Impulse Control Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, 59(2): 281—288.

Optimal Control Strategy for the Periodic Gilpin-Ayala Impulsive Harvesting System

GUO Hai-ye, DOU Jia-wei, ZHAO Lian

College of Mathematics and Information Science, ShaanXi Normal University, Xi'an 710062, China

Abstract: In this paper, we investigate the optimal control of a class of the impulsive harvesting system described by the periodic Gilpin-Ayala model. The species is harvested at fixed moments for economic profit under the periodicity condition. The main purpose is to research the influence of different impulsive harvesting efforts on the system and obtain the optimal harvesting policy which maximizes the profit. We assume that profit is the difference between economic revenue and cost and the cost is proportional to the control variable. Firstly, it is shown that the system has a unique positive periodic solution which is globally asymptotically stable under the appropriate conditions. Further, the optimal control strategy is characterized by the numerical equations by the maximum principle of the impulsive differential system and some analysis techniques. Finally, the precise optimal control strategy is achieved for a special case.

Key words: periodic Gilpin-Ayala system; impulsive harvesting; maximum principle; maximum economic net revenue

责任编辑 汤振金

