

参数不确定的不同分数阶的 混沌系统的自适应同步^①

李 东¹, 张兴鹏¹, 胡玉婷¹, 杨媛媛²

1. 重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331; 2. 重庆大学 物理学院, 重庆 401331

摘要: 基于追踪器的思想讨论了参数不确定的分数阶混沌系统的自适应同步问题. 应用两种不同的方法来实现同步. 一种方法为构造合适的控制器从而得到和响应系统相同阶的误差系统, 进而应用分数阶系统稳定的理论; 另一种为构造一个新的响应系统, 把分数阶系统转换为整数阶系统, 进而利用 Lyapunov 稳定性理论. 选取 Chen 系统和 Qi 系统进行数值模拟验证结论的有效性. 并与已有的针对不同阶系统同步的 Laplace 变换方法进行比较.

关键词: 不同阶; 参数不确定; 自适应同步; 分数阶混沌系统

中图分类号: O415.5; TP273

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2015)11-0069-08

分数阶微积分与整数阶微积分有几乎相同的历史, 然而由于理论的复杂性及缺乏相应的物理背景, 一直未得到应有的发展^[1]. 直到 1982 年 Mandelbort^[2]指出自然界中存在大量分数维现象以来, 分数阶微积分迅速成为研究热点. 在描述复杂物理力学问题时, 分数阶模型的物理意义更清晰, 表述更简洁; 分数阶控制拓展了控制的自由度且具有记忆功能^[3].

混沌同步因其在工程、生物、信息处理等领域的潜在应用价值而得到人们的广泛研究. 人们相继提出了时滞反馈法^[4]、自适应方法^[5]、脉冲方法^[6-7]和滑模变结构方法^[8]等同步方法. 这些方法也被应用到分数阶混沌系统中, 取得了一定的成果^[9]. 但是由于分数阶的研究起步较晚, 其稳定判断成为了进一步研究的阻碍. 胡建兵^[3, 10]等人提出了判断分数阶混沌系统的稳定性定理, 一定程度上缓解了这一问题. 目前的同步研究针对于同为整数阶或分数阶的混沌系统. 对于不同阶的混沌系统的同步研究, 主要是通过 Laplace 变换的方法将分数阶转换为整数阶再进行同步研究. 还有一种方法为通过追踪器的思想, 让整数阶的输出信号去追踪分数阶的输出信号, 进而实现同步, 如: 文献[11]提出了用追踪器的思想实现了整数阶与分数阶的反馈同步问题; 文献[12-13]用 Laplace 变换的方法实现了分数阶与整数阶混沌系统的同步问题. 但是两个不同阶的分数阶混沌系统的同步研究却很少.

另一方面, 由于建模误差、测量误差、线性近似等原因, 不确定性经常发生在各种系统中. 不确定性通常表现在参数上, 人们提出了神经网络和滑模方法^[14]、脉冲方法^[15]等来研究参数不确定性.

针对这一问题, 本文考虑用两种方法来实现参数不确定的不同阶的分数阶混沌系统的自适应同步问题. 一种方法为追踪器的思想, 让一个分数阶系统的输出变量去追踪另一个分数阶系统的输出变量; 另一

① 收稿日期: 2014-11-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11202249); 中央高校基本科研业务费专项资金(CQDXWL-2013-002).

作者简介: 李 东(1977-), 男, 重庆云阳人, 副教授, 主要从事非线性系统控制与同步研究.

种方法为基于输出变量将其中一个系统重新构造为整数阶系统.

1 定义和引理

定义 1^[1] Riemann-Liouville 分数阶微分定义

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^q}{dt^q} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{q-n+1}} ds \quad (1)$$

式中: n 为正整数; q 为阶数, 且有 $n-1 \leq q < n$; $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数.

引理 1^[3] 对于分数阶系统 $\frac{d^q x(t)}{dt^q} = f(x(t))$, $f(x(t))$ 满足 Lipschitz 条件, 当系统的阶数 $0 < q \leq$

1, 如果对任意的变量 $x(t)$ 都存在一个正定矩阵 $\mathbf{P}$ 使得

$$J = x(t)^T \mathbf{P} \frac{d^q x(t)}{dt^q} \leq 0 \quad (2)$$

恒成立, 则分数阶系统是渐进稳定的.

2 参数不确定的系统同步研究

考虑两个参数不确定的分数阶混沌系统, 其阶数并不相同.

驱动系统和受控响应系统分别为

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{f}(x(t)) + \Delta \mathbf{f}(x(t)) + \mathbf{D}_1(t) \quad (3)$$

$$\frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} = \mathbf{B}y(t) + \mathbf{g}(y(t)) + \Delta \mathbf{g}(y(t)) + \mathbf{D}_2(t) + \mathbf{u}(t) \quad (4)$$

其中: α, β 为系统的阶数; $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}$ 是系统的状态变量; 而 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是系统线性部分的系数矩阵; $\mathbf{f}(x(t)), \mathbf{g}(y(t)): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为非线性项; $\Delta \mathbf{f}(x(t)) = (\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_n)^T$ 和 $\Delta \mathbf{g}(y(t)) = (\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_n)^T$ 是参数不确定的扰动; $\mathbf{D}_1(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t))^T$ 和 $\mathbf{D}_2(t) = (d_{11}(t), d_{22}(t), \dots, d_{nn}(t))^T$ 为系统的额外的噪音. 由于混沌系统的有界性, 则存在常数 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, 使得

$$|\Delta \mathbf{E}_1(t)| = |\Delta \mathbf{f}(x(t) + \mathbf{D}_1(t))| \leq \gamma_1$$

$$|\Delta \mathbf{E}_2(t)| = |\Delta \mathbf{g}(y(t) + \mathbf{D}_2(t))| \leq \gamma_2$$

又 $\mathbf{f}(x(t)), \mathbf{g}(y(t))$ 满足 Lipschitz 条件, 则存在常数 L_1 和 L_2 使得

$$\|\mathbf{f}(y(t)) - \mathbf{f}(x(t))\| \leq L_1 \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| \quad (5)$$

$$\|\mathbf{g}(y(t)) - \mathbf{g}(x(t))\| \leq L_2 \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| \quad (6)$$

令误差为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) = (y_1(t) - x_1(t), \dots, y_n(t) - x_n(t))^T$$

显然由于两个系统的阶数不等, 无法直接得到误差系统, 为此我们寻找基于系统输出变量的方法来得到误差系统.

2.1 追踪器的思想

由追踪器思想, 要实现受控响应系统(4)与驱动系统的同步, 实质上就是要求受控响应系统的输出 $\mathbf{y}(t)$ 跟踪驱动系统的输出 $\mathbf{x}(t)$.

由于我们要实现的是分数阶混沌系统的参考信号的追踪, 将参考信号的分数阶微分设计在补偿器中. 因此控制器 $\mathbf{u}(t)$ 是

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{U}(x) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{v}(t)$ 为将要设计的控制器, 补偿器为

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{d^\beta \mathbf{x}(t)}{dt^\beta} - \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha}$$

将控制器(7)代入受控响应系统(4)得到误差系统

$$\frac{d^\beta \mathbf{e}(t)}{dt^\beta} = \mathbf{B}\mathbf{e}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \Delta \mathbf{E}_2(t) - \Delta \mathbf{E}_1(t) + \mathbf{v}(t) \quad (8)$$

定理 1 对于误差系统(8), 控制器和自适应率分别为

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{K}\mathbf{e}(t) - (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) - (\theta_1 \bar{L}_1 + \theta_2 \bar{L}_2) \mathbf{e}(t) - (\rho_1 \bar{\gamma}_1 + \rho_2 \bar{\gamma}_2) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \quad (9)$$

$$\frac{d^\alpha \bar{L}_1}{dt^\alpha} = \theta_1 \mathbf{e}^\top(t) \mathbf{e}(t) \quad (10)$$

$$\frac{d^\beta \bar{L}_2}{dt^\beta} = \theta_2 \mathbf{e}^\top(t) \mathbf{e}(t) \quad (11)$$

$$\frac{d^\alpha \bar{\gamma}_1}{dt^\alpha} = \rho_1 \mathbf{e}^\top(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \quad (12)$$

$$\frac{d^\beta \bar{\gamma}_2}{dt^\beta} = \rho_2 \mathbf{e}^\top(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \quad (13)$$

当满足以下条件

$$1) \quad |\arg(\text{eig}(\mathbf{B} + \mathbf{K}))| > \frac{\beta\pi}{2};$$

$$2) \quad \rho_1 > 1, \rho_2 > 1 \text{ 和 } \theta_1 > 1, \theta_2 > 1;$$

则误差系统是渐进稳定的, 也就实现了不同阶系统(3)和(4)的同步.

证 将控制器(9)代入到误差系统(8)中, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d^\beta \mathbf{e}(t)}{dt^\beta} &= (\mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{e}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \Delta \mathbf{E}_2(t) - \Delta \mathbf{E}_1(t) - \\ &(\theta_1 \bar{L}_1 + \theta_2 \bar{L}_2) \mathbf{e}(t) - (\rho_1 \bar{\gamma}_1 + \rho_2 \bar{\gamma}_2) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

令

$$\mathbf{q} = (\beta, \beta, \dots, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta)^\top$$

$$\mathbf{E}(t) = (e_1, e_2, \dots, e_n, e_{L_1}, e_{L_2}, e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2})^\top$$

其中 $e_{L_1} = \bar{L}_1 - L_1$, $e_{L_2} = \bar{L}_2 - L_2$, $e_{\gamma_1} = \bar{\gamma}_1 - \gamma_1$, $e_{\gamma_2} = \bar{\gamma}_2 - \gamma_2$, 且 $\mathbf{e}(t) = (e_1, e_2, \dots, e_n)^\top$.

构造以下函数, 且将 $\mathbf{E}(t)$, $\mathbf{q}$ 和式(10),(11),(12),(13),(14)代入

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{E}(t)^\top \mathbf{P} \frac{d^q \mathbf{E}(t)}{dt^q} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t) &= \mathbf{e}^\top(t) \mathbf{P} \frac{d^\beta \mathbf{e}(t)}{dt^\beta} + e_{L_1} \mathbf{P} \frac{d^\alpha e_{L_1}}{dt^\alpha} + e_{L_2} \mathbf{P} \frac{d^\beta e_{L_2}}{dt^\beta} + e_{\gamma_1} \mathbf{P} \frac{d^\alpha e_{\gamma_1}}{dt^\alpha} + e_{\gamma_2} \mathbf{P} \frac{d^\beta e_{\gamma_2}}{dt^\beta} = \\ &\mathbf{e}^\top(t) \mathbf{P} (\mathbf{B} + \mathbf{K}) \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^\top(t) \mathbf{P} (\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) + \mathbf{e}^\top(t) \mathbf{P} (\Delta \mathbf{E}_2(t) - \Delta \mathbf{E}_1(t)) - \\ &\mathbf{e}^\top(t) \mathbf{P} (\theta_1 \bar{L}_1 + \theta_2 \bar{L}_2) \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}^\top(t) \mathbf{P} (\rho_1 \bar{\gamma}_1 + \rho_2 \bar{\gamma}_2) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) + (\bar{L}_1 - L_1) \mathbf{P} \theta_1 \mathbf{e}^\top(t) \mathbf{e}(t) + \\ &(\bar{L}_2 - L_2) \mathbf{P} \theta_2 \mathbf{e}^\top(t) \mathbf{e}(t) + (\bar{\gamma}_1 - \gamma_1) \mathbf{P} \rho_1 \|\mathbf{e}(t)\| \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) + (\bar{\gamma}_2 - \gamma_2) \mathbf{P} \rho_2 \|\mathbf{e}(t)\| \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \end{aligned}$$

整理可得

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\leq (\lambda_{\max} + (1 - \theta_1) L_1 + (1 - \theta_2) L_2) \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{e}(t)\|^2 + \\ &((1 - \rho_1) \gamma_1 + (1 - \rho_2) \gamma_2) \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{e}(t)\| \leq 0 \end{aligned}$$

根据引理 1 可知, $\mathbf{E}(t)$ 是稳定渐进趋于零的, 因此误差系统的变量 $\mathbf{e}(t)$ 是渐进趋于零的. 因此我们实现了两个不同阶的参数不确定的混沌系统的同步.

2.2 重新构造受控响应系统

基于追踪器的思想仍然使系统是分数阶, 在判断稳定性和计算上都比整数阶要相对困难, 为此我们考虑重新构造一个受控的响应系统来实现不同阶混沌系统的同步.

重新构造的整数阶受控响应系统为

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) + \Delta\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{D}_2(t) + \mathbf{u}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{x}) \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{d^a \mathbf{x}(t)}{dt^a}$$

结合式(3), 得到误差系统

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{e}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \Delta\mathbf{E}_2(t) - \Delta\mathbf{E}_1(t) + \mathbf{u}(t) \quad (17)$$

设计控制器 $\mathbf{u}(t)$, 且让不确定参数满足以下自适应率

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & \mathbf{K}\mathbf{e}(t) - (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \\ & (r + \eta_1 \bar{L}_1 + \eta_2 \bar{L}_2) \mathbf{e}(t) - (\rho_1 \bar{\gamma}_1 + \rho_2 \bar{\gamma}_2) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\dot{\bar{L}}_1 = \theta_1 \eta_1 \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \quad (19)$$

$$\dot{\bar{L}}_2 = \theta_2 \eta_2 \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \quad (20)$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_1 = k_1 \rho_1 \mathbf{e}^T(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \quad (21)$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_2 = k_2 \rho_2 \mathbf{e}^T(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \quad (22)$$

控制器(18)代入误差系统(17)中得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) = & (\mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{e}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{E}_2 - \Delta\mathbf{E}_1 - \\ & (r + \eta_1 \bar{L}_1 + \eta_2 \bar{L}_2) \mathbf{e}(t) - (\rho_1 \bar{\gamma}_1 + \rho_2 \bar{\gamma}_2) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \end{aligned} \quad (23)$$

定理 2 对于误差系统(17), 设计控制器 $\mathbf{u}(t)$ 为(18)式, 不确定参数满足自适应率为(19), (20), (21)和(22)式, 令 $\lambda_{\max}$ 是矩阵 $(\mathbf{B} + \mathbf{K})^T + \mathbf{B} + \mathbf{K}$ 的最大特征值,

$$1) \lambda_{\max} - 2r < 0;$$

$$2) \rho_1 > 1, \rho_2 > 1, \eta_1 > 1, \eta_2 > 0;$$

则误差系统是渐进稳定的.

证 选取一个 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2\theta_1} (\bar{L}_1 - L_1)^2 + \frac{1}{2\theta_2} (\bar{L}_2 - L_2)^2 + \frac{1}{2k_1} (\bar{\gamma}_1 - \gamma_1)^2 + \frac{1}{2k_2} (\bar{\gamma}_2 - \gamma_2)^2 \quad (24)$$

对函数两边求导可得

$$\dot{V}(t) = \frac{\dot{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^T(t) \dot{\mathbf{e}}(t)}{2} + \frac{\dot{\bar{L}}_1 (\bar{L}_1 - L_1)}{\theta_1} + \frac{\dot{\bar{L}}_2 (\bar{L}_2 - L_2)}{\theta_2} + \frac{\dot{\bar{\gamma}}_1 (\bar{\gamma}_1 - \gamma_1)}{k_1} + \frac{\dot{\bar{\gamma}}_2 (\bar{\gamma}_2 - \gamma_2)}{k_2}$$

结合式(19), (20), (21), (22) 和(23) 得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} [(\mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{e}(t)]^T \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2} [\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{E}_2 - \Delta\mathbf{E}_1]^T \mathbf{e}(t) + \\ & \frac{1}{2} [-(r + \eta_1 \bar{L}_1 + \eta_2 \bar{L}_2) \mathbf{e}(t) - (\rho_1 \bar{\gamma}_1 + \rho_2 \bar{\gamma}_2) \text{sgn}(\mathbf{e}(t))]^T \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) [(\mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{e}(t)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) [\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{E}_2 - \Delta \mathbf{E}_1] + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) [-(r + \eta_1 \bar{L}_1 + \eta_1 \bar{L}_1) \mathbf{e}(t) - (\rho_1 \bar{\gamma}_1 + \rho_2 \bar{\gamma}_2) \text{sgn}(\mathbf{e}(t))] + \eta_1 \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) (\bar{L}_1 - L_1) + \\ & \eta_2 \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) (\bar{L}_2 - L_2) + \rho_1 \mathbf{e}^T(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) (\bar{\gamma}_1 - \gamma_1) + \rho_2 \mathbf{e}^T(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) (\bar{\gamma}_2 - \gamma_2) \end{aligned}$$

整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) [(\mathbf{B} + \mathbf{K})^T + (\mathbf{B} + \mathbf{K})] \mathbf{e}(t) + (L_1 + L_2) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^T(t) (\gamma_1 + \gamma_2) - r \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - \\ & (\eta_1 \bar{L}_1 + \eta_2 \bar{L}_2) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - (\rho_1 \bar{\gamma}_1 + \rho_2 \bar{\gamma}_2) \mathbf{e}^T(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) + \eta_1 (\bar{L}_1 - L_1) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + \\ & \eta_2 (\bar{L}_2 - L_2) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + \rho_1 (\bar{\gamma}_1 - \gamma_1) \mathbf{e}^T(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) + \rho_2 (\bar{\gamma}_2 - \gamma_2) \mathbf{e}^T(t) \text{sgn}(\mathbf{e}(t)) \leq \\ & \left(\frac{1}{2} \lambda_{\max} - r \right) \|\mathbf{e}(t)\|^2 + ((1 - \eta_1) L_1 + (1 - \eta_2) L_2) \|\mathbf{e}(t)\|^2 + \\ & (\gamma_1 (1 - \rho_1) + \gamma_2 (1 - \rho_2)) \|\mathbf{e}(t)\| \leq 0 \end{aligned}$$

则由 Lyapunov 稳定性定理可知误差系统是稳定的, 即实现了驱动与响应系统的同步.

3 数值模拟

选取 Chen 系统作为驱动系统, 参数 $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$, 阶数为 $\alpha = 0.94$.

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = -ax_1 + ax_2 + \Delta f_1 + D_{11}(t) \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = (c - a)x_1 + cx_2 - x_1x_3 + \Delta f_2 + D_{12}(t) \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} = -bx_3 + x_1x_2 + \Delta f_3 + D_{13}(t) \end{cases} \quad (25)$$

选取 Qi 系统为响应系统, 参数为 $a_1 = 14$, $b_1 = 43$, $c_1 = -1$, $d_1 = 16$, 阶数 $\beta = 0.98$.

$$\begin{cases} \frac{d^\beta y_1}{dt^\beta} = -a_1y_1 + a_1y_2 + 4y_2y_3 + \Delta g_1 + D_{21}(t) \\ \frac{d^\beta y_2}{dt^\beta} = c_1y_1 + d_1y_2 - y_1y_3 + \Delta g_2 + D_{22}(t) \\ \frac{d^\beta y_3}{dt^\beta} = -b_1y_3 + y_1y_2 + \Delta g_3 + D_{23}(t) \end{cases} \quad (26)$$

3.1 对定理的验证

对定理 1 的验证: 选取系数

$$\rho_1 = 2 \quad \rho_2 = 3 \quad \theta = 2$$

和矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -43 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $\mathbf{B} + \mathbf{K}$ 的特征值的幅角为 $|\arg(\mathbf{B} + \mathbf{K})| = 2.4746 > \frac{\beta\pi}{2}$. 进行数值模拟, 得图 1 和图 2.

图 2 中 r_1 和 r_2 分别表示驱动系统和响应系统的参数不确定性; L_1 和 L_2 分别表示表示驱动系统和响应系统非线性部分的 Lipschitz 常数的不确定性;

对定理 2 的验证: 选取系数

$\rho_1=2 \qquad \rho_2=3 \qquad \theta=2$

和矩阵

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}-2 & -28 & -2 \\ 8 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}+\mathbf{K}$ 的特征值的幅角为 $|\arg(\mathbf{B}+\mathbf{K})|=2.155\,7>\frac{\pi}{2}$. 进行数值模拟, 得图 3 和图 4.

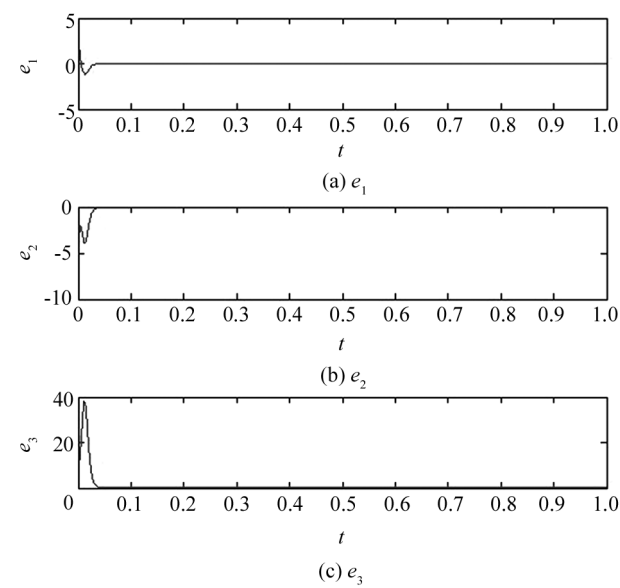


图 1 定理 1 的分数阶系统的误差状态曲线

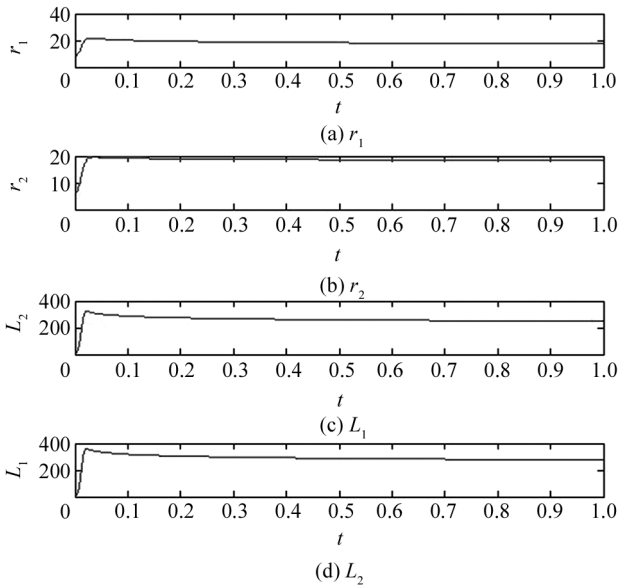


图 2 定理 1 的分数阶系统的参数不确定的状态曲线

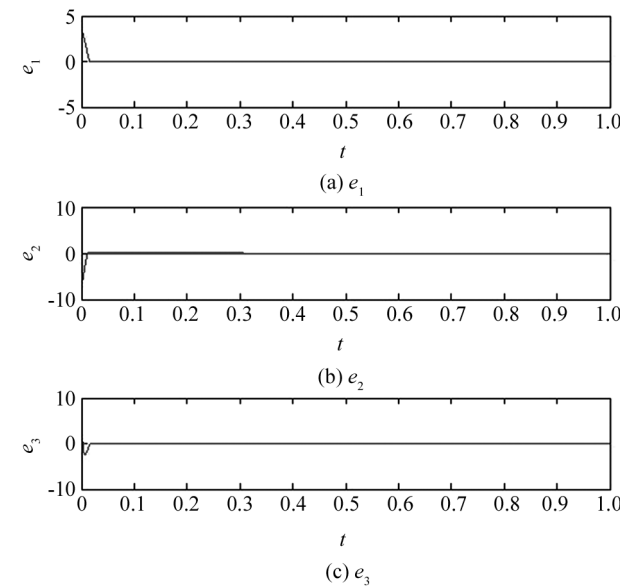


图 3 定理 2 的整数阶系统的误差状态曲线

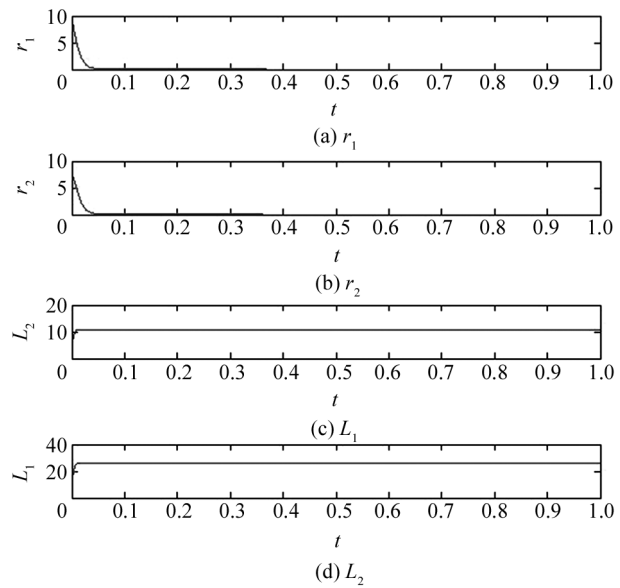


图 4 定理 2 的整数阶系统的参数不确定的状态曲线

图 4 中 r_1 和 r_2 分别表示驱动系统和响应系统的参数不确定性; L_1 和 L_2 分别表示驱动系统和响应系统非线性部分的 Lipschitz 常数的不确定性.

3.2 与其他方法的比较

文献[12—13]中为研究分数阶混沌系统与整数阶混沌系统的同步, 采用 Laplace 变换的方法将分数

阶系统变为整数阶系统. 对于分数阶微分, 其 Laplace 变换为

$$L\{D^q f(t)\} = s^q F(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{q-k-1} f^{(k)}(0) \quad (27)$$

且当阶数 q 满足 $0 < q \leq 1$ 时, 有

$$L\{D^q f(t)\} = s^q F(s) - s^{q-1} f(0)$$

令

$$X(s) = L\{x(t)\}$$

再应用时频域转换法, 从而得到新的一阶微分方程组.

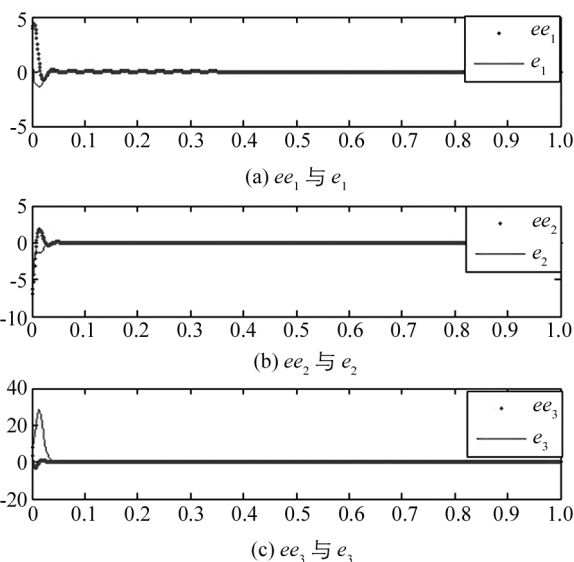
这也是目前实现分数阶与整数阶同步的常用方法, 但是这需要进行 Laplace 变换, 包含大量的计算和数值模拟, 增加了运算的复杂性. 此处我们继续选取分数阶混沌系统 (25) 和 (26), 采用 Laplace 变换的方法进行数值模拟, 与我们的方法比较 (图 5).

4 结 论

数值模拟的结果表明本文方法可以控制和同步不同阶的混沌系统. 文中利用的追踪器思想是实现参数不确定的分数阶混沌系统的自适应同步问题的关键. 第一种方法为利用分数阶稳定性来构造合适的控制器, 进而实现两个系统同步. 另一种方法为构造一个新的响应系统, 把分数阶系统转换为整数阶系统, 进而利用 Lyapunov 稳定性理论来判断稳定性. 此外, 我们可以应用这种方法来实现不同阶混沌系统的其他同步, 如模糊、滑模以及脉冲同步.

参考文献:

- [1] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations [M]. New York: Academic Press, 1999: 62—102.
- [2] MANDELBORT B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. New York: Freeman, 1983: 131.
- [3] 胡建兵, 赵灵冬. 分数阶系统稳定性理论与控制研究 [J]. 物理学报, 2013, 62(24): 35—41.
- [4] 叶志勇, 马文文, 豆中丽, 等. 一类非自治混沌系统的时滞反馈同步 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2012, 34(5): 18—25.
- [5] MA J, ZHANG A H, XIA Y F, et al. Optimize Design of Adaptive Synchronization Controllers and Parameter Observers in Different Hyperchaotic Systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 215(9): 3318—3326.
- [6] LIU J G. A Novel Study on the Impulsive Synchronization of Fractional-Order Chaotic Systems [J]. Chinese Physics B, 2013, 22(6): 289—292.
- [7] 李 东, 杜永霞, 邓良明, 等. 超混沌 Chen 系统和 Rossler 系统的脉冲自适应同步 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2013, 35(9): 1—10.
- [8] LIN T C, LEE T Y, VALENTINA E B. Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control for Synchronization of Uncertain Fractional Order Chaotic Systems [J]. Chaos Solutions & Fractals, 2011, 44(10): 791—801.
- [9] 李 东, 邓良明, 杜永霞, 等. 分数阶超混沌 Chen 系统与分数阶超混沌 Rossler 系统的异结构同步 [J]. 物理学报, 2012, 61(5): 51—59.
- [10] 胡建兵, 韩 焱, 赵灵冬. 一种新的分数阶系统稳定理论及在 Back-Stepping 方法同步分数阶混沌系统中的应用 [J]. 物理学报, 2009, 58(4): 2235—2239.



ee_i 表示 Laplace 变换方法得到的误差曲线,
 e_i 表示定理 1 系统的误差曲线.

图 5 Laplace 变换方法与定理 1 的比较

- [11] 周 平, 邝 菲. 分数阶混沌系统与整数阶混沌系统之间的同步 [J]. 物理学报, 2010, 59(10): 6851—6858.
- [12] SI G Q, SUN Z Y, ZHANG Y B. A General Method for Synchronizing an Integer Order Chaotic System and a Fractional Order Chaotic System [J]. Chinese Physics B, 2011, 20(8): 110—116.
- [13] JIA L X, DAI H, HUI M. Nonlinear Feedback Synchronization Control Between Fractional Order and Integer Order Chaotic Systems [J]. Chinese Physics B, 2010, 19(11): 198—203.
- [14] 李华青, 廖晓峰, 黄宏宇. 基于神经网络和滑模控制的不确定混沌系统同步 [J]. 物理学报, 2011, 60(2): 147—151.
- [15] 罗永健, 于 茜, 张卫东. 参数不确定时延超混沌系统的脉冲同步方法研究 [J]. 物理学报, 2011, 60(11): 106—113.

Adaptive Synchronization Between Two Fractional-Order Chaotic Systems with Uncertain Parameters

LI Dong¹, ZHANG Xing-peng¹, HU Yu-ting¹, YANG Yuan-yuan²

1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China;

2. College of Physics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: Adaptive synchronization between two fractional-order chaotic systems with uncertain parameters are discussed based on the tracking thought. Two methods are used to realize the synchronization. One is to construct an appropriate controller to let the error system have the same order with the response system. Then the stability theory of fractional order is applied. The other is to construct a new response system whose order is an integer. Next, the Lyapunov stability theory is applied. Then Chen system and Qi system are selected to verify the effectiveness of the conclusions obtained from the two methods. Finally, a comparison is made between the method of Laplace transformation, which has been used to solve the synchronization of systems with different orders, and the methods proposed in our study.

Key words: different order; parameter uncertainty; adaptive synchronization; fractional order chaotic system

责任编辑 张 构

