第 37 卷第 11 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2015年11月
Vol. 37　No. 11　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Nov.　2015

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.11.012

基于 cY 函数的 $\mathscr{F}$-弱鞅和条件 N-弱鞅的最大值不等式[①]

冯德成，　刘红蕊，　牛彩莉

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：将现有的基于 cY 函数的弱鞅和 N-弱鞅的一些最大值不等式推广到 $\mathscr{F}$-弱鞅和条件 N-弱鞅的情形下.

关　键　词：$\mathscr{F}$-弱鞅；条件 N-弱鞅；cY 函数；最大值不等式

中图分类号：O212.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2015)11-0077-05

在本文中，$\{S_n, n \geqslant 1\}$ 表示定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的随机变量序列，$S_0 \doteq 0$，$a \vee b = \max(a, b)$，$I(A)$表示集合 A 的示性函数.

设 X 和 Y 是概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的随机变量，且 $EX^2 < \infty$，$EY^2 < \infty$，$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}$的子 σ-代数. 文献[1]定义了随机变量 X 和 Y 关于$\mathscr{F}$的条件协方差($\mathscr{F}$-covariance)：

$$\mathrm{Cov}^{\mathscr{F}}(X, Y) = E^{\mathscr{F}}[(X - E^{\mathscr{F}}X)(Y - E^{\mathscr{F}}Y)]$$

这里 $E^{\mathscr{F}}X$ 表示随机变量 X 关于$\mathscr{F}$的条件期望，即 $E^{\mathscr{F}}X = E[X \mid \mathscr{F}]$.

Christofides 和 Hadjikyriakou 给出了$\mathscr{F}$-弱鞅和条件 N-弱鞅的定义[2-3].

定义 1　如果对任意分量不减的函数 f 和任意的 $1 \leqslant i < j < \infty$，都有

$$E^{\mathscr{F}}[(S_j - S_i)f(S_1, S_2, \cdots, S_i)] \geqslant 0 \text{ a.s.}$$

则称随机变量序列$\{S_n, n \geqslant 1\}$为一个$\mathscr{F}$-弱鞅($\mathscr{F}$-demimartingale).

定义 2　如果对任意分量不减的函数 f 和任意的 $1 \leqslant i < j < \infty$，都有

$$E^{\mathscr{F}}[(S_j - S_i)f(S_1, S_2, \cdots, S_i)] \leqslant 0 \text{ a.s.}$$

则称随机变量序列$\{S_n, n \geqslant 1\}$为一个(关于$\mathscr{F}$的)条件 N-弱鞅(conditional N-demimartingale).

对$\mathscr{F}$-弱鞅和条件 N-弱鞅的研究，已经有一些最新的研究成果，例如：Christofides 和 Hadjikyriakou 在文献[3]中给出了$\mathscr{F}$-弱鞅的最大值不等式和条件 N-弱鞅的 Chow-型不等式和 Azuma-型不等式；Wang 等人在文献[4]中得到了$\mathscr{F}$-弱鞅和条件 N-弱鞅的一些最大值不等式和矩不等式.

设 ϕ 是$(0, \infty)$上的一个右连续减函数，且满足如下条件：

$$\phi(\infty) \doteq \lim_{t \to \infty} \phi(t) = 0$$

假设 ϕ 在任意一个有限区间$(0, x)$上关于 Lebesgue 测度是可积的. 若令

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t \qquad x \geqslant 0$$

则 $\Phi(x)$是一个非负增函数，并且 $\Phi(0) = 0$. 进一步若有 $\Phi(\infty) = \infty$，那么称 $\Phi(x)$为一个 cY 函数(concave

① 收稿日期：2014-09-25
基金项目：国家自然科学基金项目(11461061)；西北师大青年教师科研能力提升计划项目(NWNU-LKQN-11-2).
作者简介：冯德成(1972-)，男，甘肃武威人，博士，副教授，主要从事随机分析及应用概率的研究.

Young function). 这类函数的一个典型例子是 $\Phi(x)=x^p$, $0<p<1$.

文献[5] 给出了基于 cY 函数的非负下鞅的最大值不等式.

受文献[5] 的启发, Christofides 在文献[6] 中证明了基于 cY 函数的半鞅的最大值不等式, 之后 Wang 在文献[7] 中将这些结论推广到弱鞅和 N-弱鞅的情形下. 本文给出了基于 cY 函数的 $\mathscr{F}$-弱鞅和条件 N-弱鞅的最大值不等式.

引理 1[3] 设$\{S_n, n\geqslant 1\}$是一个 $\mathscr{F}$-弱鞅, g 是一个非负凸函数, 且 $g(0)=0$. 令 $A=\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} c_i\, g(S_i)\geqslant \varepsilon\}$, 这里$\{c_n, n\geqslant 1\}$是正的非增 $\mathscr{F}$-可测随机变量序列, ε 是几乎处处非负且 $\mathscr{F}$-可测的随机变量. 则有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A)\leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\, E^{\mathscr{F}}[g(S_i)-g(S_{i-1})]-c_n E^{\mathscr{F}}[g(S_n)I(A^c)]\leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\, E^{\mathscr{F}}[g(S_i)-g(S_{i-1})] \text{ a. s.}$$

定理 1 假设引理 1 的条件成立. 设 $\Phi(x)$ 是一个 cY 函数, 记

$$\xi(x)=\Phi(x)-x\phi(x) \qquad S_n^{\max}=\max_{1\leqslant i\leqslant n} c_i\, g(S_i)$$

$$T_n=\sum_{i=1}^{n} c_i[g(S_i)-g(S_{i-1})]$$

那么

$$E^{\mathscr{F}}\xi(S_n^{\max})\leqslant \inf_{x_0>0}[\xi(x_0)+\phi(x_0)E^{\mathscr{F}}T_n] \text{ a. s.} \tag{1}$$

证 由引理 1 可得

$$xP^{\mathscr{F}}(S_n^{\max}\geqslant x)\leqslant E^{\mathscr{F}}\, T_n \text{ a. s.} \qquad x>0 \tag{2}$$

对任意($x_0>0$), 将(2) 式在$[x_0, \infty)$上关于 $\mathrm{d}(-\phi(x))$ 积分, 则由条件 Fubini 定理得

$$\begin{aligned} E^{\mathscr{F}}\left[\int_{x_0}^{S_n^{\max}\vee x_0} x\,\mathrm{d}(-\phi(x))\right]\leqslant E^{\mathscr{F}}\left[T_n\int_{x_0}^{\infty}\mathrm{d}(-\phi(x))\right]&= \\ E^{\mathscr{F}}T_n[\phi(x_0)-\lim_{t\to\infty}\phi(t)]&= \\ \phi(x_0)E^{\mathscr{F}}T_n \text{ a. s.}& \end{aligned} \tag{3}$$

将(3) 式左端分部积分, 则有

$$\begin{aligned} E^{\mathscr{F}}\left[\int_{x_0}^{S_n^{\max}\vee x_0} x\,\mathrm{d}(-\phi(x))\right]&=x_0\phi(x_0)-E^{\mathscr{F}}(S_n^{\max}\vee x_0)\phi(S_n^{\max}\vee x_0)+E^{\mathscr{F}}\left[\int_{x_0}^{S_n^{\max}\vee x_0}\phi(x)\mathrm{d}x\right]= \\ &x_0\phi(x_0)-E^{\mathscr{F}}(S_n^{\max}\vee x_0)\phi(S_n^{\max}\vee x_0)+E^{\mathscr{F}}\Phi(S_n^{\max}\vee x_0)-\Phi(x_0)= \\ &-\xi(x_0)+E^{\mathscr{F}}\xi(S_n^{\max}\vee x_0) \text{ a. s.} \end{aligned} \tag{4}$$

把(3) 式和(4) 式联立可得

$$E^{\mathscr{F}}\xi(S_n^{\max}\vee x_0)\leqslant \phi(x_0)E^{\mathscr{F}}T_n+\xi(x_0) \text{ a. s.} \tag{5}$$

当 $x>0$ 时, 函数 $\xi(x)=\Phi(x)-x\phi(x)$ 是增函数. 因此, 由(5) 式有

$$E^{\mathscr{F}}\xi(S_n^{\max})\leqslant E^{\mathscr{F}}\xi(S_n^{\max}\vee x_0)\leqslant \phi(x_0)E^{\mathscr{F}}T_n+\xi(x_0) \text{ a. s.} \tag{6}$$

由不等式(6) 可得(1) 式.

推论 1 假设定理 1 的条件成立. 则对于任意的 $0<p<1$, 有

$$E^{\mathscr{F}}(S_n^{\max})^p\leqslant \frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}}T_n)^p \text{ a. s.} \tag{7}$$

证 令 $\Phi(x)=x^p$, $0<p<1$, 则

$$\phi(x)=px^{p-1} \qquad \xi(x)=\Phi(x)-x\phi(x)=(1-p)x^p$$

因此, 由(1) 式得

$$E^{\mathscr{F}}(S_n^{\max})^p\leqslant \inf_{x_0>0}\left({x_0}^p+\frac{p\,{x_0}^{p-1}}{1-p}E^{\mathscr{F}}T_n\right) \text{ a. s.} \tag{8}$$

当 $x_0 = E^F T_n$ 时，(8) 式的右边取得最小值. 因此，把 $x_0 = E^F T_n$ 代入(8) 式可得(7) 式.

推论 2 假设推论 1 的条件成立. 对每一个 $k \geqslant 1$，取 $c_k \equiv 1$. 那么

$$E^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} g(S_k))^p \leqslant \frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}} g(S_n))^p \text{ a. s.}$$

如果在推论 2 中令 $g(x) = |x|$，那么就有下面的推论.

推论 3 设 $\{S_n, n \geqslant 1\}$ 是一个 $\mathscr{F}$-弱鞅. 则对于任意的 $0 < p < 1$，有

$$E^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|)^p \leqslant \frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}} |S_n|)^p \text{ a. s.} \tag{9}$$

注 1 若把 $x_0 = c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n)$ 代入(8) 式，可得

$$E^{\mathscr{F}}(S_n^{\max})^p \leqslant (c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n))^{p-1}\Big[c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n) + \frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{n} c_i E^{\mathscr{F}}(g(S_i) - g(S_{i-1}))\Big] \text{ a. s.}$$

由推论 1 的证明过程又有

$$\begin{aligned}\inf_{x_0>0}\Big(x_0^{\,p} + \frac{p\, x_0^{\,p-1}}{1-p} E^{\mathscr{F}} T_n\Big) = \frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}} T_n)^p \leqslant \\ (c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n))^{p-1}\Big[c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n) + \frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{n} c_i E^{\mathscr{F}}(g(S_i) - g(S_{i-1}))\Big] \text{ a. s.}\end{aligned}$$

如果 $E^{\mathscr{F}} T_n \neq c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n)$a. s.，那么

$$\frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}} T_n)^p < (c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n))^{p-1}\Big[c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n) + \frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{n} c_i E^{\mathscr{F}}(g(S_i) - g(S_{i-1}))\Big] \text{ a. s.}$$

如果$\{S_n, n \geqslant 1\}$ 是一个非负的 $\mathscr{F}$-弱鞅，那么由(7) 式可得

$$E^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k)^p \leqslant \frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}} S_n)^p \text{ a. s.}$$

定理 2 假设引理 1 的条件成立. 记

$$S_n^{\max} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} c_k g(S_k)$$

设 $\Phi(x)$ 是一个 cY 函数，且有

$$\int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = C_\phi < \infty$$

这里 C_ϕ 是一个仅与 ϕ 有关的常数. 那么

$$E^{\mathscr{F}}\Phi(S_n^{\max}) \leqslant \Phi(1) + C_\phi \sum_{i=1}^{n} c_i E^{\mathscr{F}}(g(S_i) - g(S_{i-1})) \text{ a. s.} \tag{10}$$

证 由引理 1 得

$$xP^{\mathscr{F}}(S_n^{\max} \geqslant x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i E^{\mathscr{F}}[g(S_i) - g(S_{i-1})] \text{ a. s.} \tag{11}$$

将(11) 式两端乘以$\dfrac{\phi(x)}{x}$，并在$[1, \infty)$ 上 积分，则由条件 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\int_1^\infty P^{\mathscr{F}}(S_n^{\max} \geqslant x)\phi(x)\mathrm{d}x \leqslant{}& \sum_{i=1}^{n} c_i \int_1^\infty E^{\mathscr{F}}[g(S_i) - g(S_{i-1})]\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x = \\ & \sum_{i=1}^{n} c_i E^{\mathscr{F}}[g(S_i) - g(S_{i-1})]\int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x = \\ & \sum_{i=1}^{n-1}(c_i - c_{i+1})E^{\mathscr{F}}\Big[g(S_i)\int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\Big] + c_n E^{\mathscr{F}}\Big[g(S_n)\int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\Big] \leqslant \\ & C_\phi \sum_{i=1}^{n-1}(c_i - c_{i+1})E^{\mathscr{F}} g(S_i) + C_\phi c_n E^{\mathscr{F}} g(S_n) = \\ & C_\phi \sum_{i=1}^{n} c_i E^{\mathscr{F}}[g(S_i) - g(S_{i-1})] \text{ a. s.}\end{aligned}$$

另一方面，再由条件 Fubini 定理得

$$\int_1^\infty P^{\mathscr{F}}(S_n^{\max} \geqslant x)\phi(x)\mathrm{d}x = E^{\mathscr{F}}\left[\int_1^{S_n^{\max}\vee 1}\phi(x)\mathrm{d}x\right] =$$
$$E^{\mathscr{F}}\Phi(S_n^{\max} \vee 1) - \Phi(1) \geqslant$$
$$E^{\mathscr{F}}\Phi(S_n^{\max}) - \Phi(1) \text{ a. s.}$$

由此就可以得到(10) 式.

注 2 如果在定理 2 中令 $\Phi(x)=x^p$，$0<p<1$，那么有

$$\phi(x)=px^{p-1} \qquad C_\phi = \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{1-p}$$

因此，由(8) 式知

$$E^{\mathscr{F}}(S_n^{\max})^p \leqslant 1 + \frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^n c_i E^{\mathscr{F}}[g(S_i)-g(S_{i-1})] \text{ a. s.}$$

此外，对所有 $k \geqslant 1$，如果令 $c_k \equiv 1$，那么有

$$E^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} g(S_k))^p \leqslant 1 + \frac{p}{1-p}E^{\mathscr{F}}g(S_n) \text{ a. s.}$$

引理 2[3] 设$\{S_n, n\geqslant 1\}$是一个条件 N-弱鞅，$m(\cdot)$是 $\mathbb{R}$ 上非负不减的函数，且 $m(0)=0$，对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 和任意的 $1\leqslant k\leqslant n-1$，函数 $g(\cdot)$ 满足

$$g(0)=0,\ g(x)-g(y)\geqslant (y-x)h(y)$$

若$\{c_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$是 $\mathscr{F}$-可测的正随机变量序列，且有

$$(c_k - c_{k+1})g(S_k) \geqslant 0 \text{ a. s.}$$

则

$$E^{\mathscr{F}}\left(\int_0^{Y_n} u\,\mathrm{d}m(u)\right) \leqslant \sum_{k=1}^n c_k E^{\mathscr{F}}[(g(S_k)-g(S_{k-1}))m(Y_n)] \text{ a. s.}$$

这里 $h(\cdot)$ 是非负不减的函数，

$$Y_n = \max(c_1 g(S_1), \cdots, c_n g(S_n)) \qquad Y_0 \equiv 0$$

特别地，对于任意几乎处处非负且 $\mathscr{F}$-可测的随机变量 ε，有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^n c_k E^{\mathscr{F}}[(g(S_k)-g(S_{k-1}))I(Y_n\geqslant\varepsilon)] \text{ a. s.} \tag{9}$$

定理 3 假设引理 2 的条件成立. 设 $\Phi(x)$ 是一个 cY 函数，记

$$\xi(x) = \Phi(x) - x\phi(x) \qquad S_n^{\max} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} c_i g(S_i)$$

$$T_n = \sum_{i=1}^n c_i[g(S_i)-g(S_{i-1})]$$

那么

$$E^{\mathscr{F}}\xi(S_n^{\max}) \leqslant \inf_{x_0>0}[\xi(x_0)+\phi(x_0)E^{\mathscr{F}}T_n] \text{ a. s.}$$

证 与定理 1 的证明过程相似，在此略去.

推论 4 假设定理 3 的条件成立. 那么对任意的 $0<p<1$，有

$$E^{\mathscr{F}}(S_n^{\max})^p \leqslant \frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}}T_n)^p \text{ a. s.}$$

推论 5 假设推论 4 的条件成立. 对每一个 $k\geqslant 1$，若令 $c_k\equiv 1$，那么

$$E^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} g(S_k))^p \leqslant \frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}}g(S_n))^p \text{ a. s.}$$

注 3 与注 1 类似，设$\{S_n, n\geqslant 1\}$是条件 N-弱鞅，则

$$\inf_{x_0>0}\left(x_0{}^p + \frac{p\,x_0{}^{p-1}}{1-p}E^{\mathscr{F}}T_n\right) = \frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}}T_n)^p \leqslant$$

$$(c_nE^{\mathscr{F}}g(S_n))^{p-1}\left[c_nE^{\mathscr{F}}g(S_n)+\frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{n}c_i\,E^{\mathscr{F}}(g(S_i)-g(S_{i-1}))\right]\text{ a. s.}$$

如果 $E^{\mathscr{F}}T_n\neq c_nE^{\mathscr{F}}g(S_n)$a. s. ，则有

$$\frac{1}{1-p}(E^{\mathscr{F}}T_n)^p<(c_nE^{\mathscr{F}}g(S_n))^{p-1}\left[c_nE^{\mathscr{F}}g(S_n)+\frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{n}c_i\,E^{\mathscr{F}}(g(S_i)-g(S_{i-1}))\right]\text{ a. s.}$$

参考文献：

[1] PRAKASA RAO B L S. Conditional Independengce, Conditional Mixing and Conditional Association [J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 2009, 61(2): 441－460.

[2] HADJIKYRIAKOU M. Probability and Moment Inequalities for Demimartingales and Associted Random Variables [D]. Nicosia: Department of Mathematics and Statistics of University of Cyprus, 2010.

[3] CHRISTOFIDES T C, HADJIKYRIAKOU M. Conditional Demimartingales and Related Results [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 398(1): 380－391.

[4] WANG Xing-hui, WANG Xue-jun. Some Inequalities for Conditional Demimartingales and Conditional N-Demimartingales [J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(7): 700－709.

[5] AGBEKO N K. Concave Function Inequalities for Sub-(Super-) Martingales [J]. Ann Univ Sci Budapest Sect Math, 1986, 29: 9－17.

[6] CHRISTOFIDES T C. Maximal Inequalities for N-Demimartingales [J]. Archives Inequalities and Applications, 2003, 50(1): 397－408.

[7] WANG Xue-jun, PRAKASA RAO B L S, HU Shu-he, et al. On Some Maximal Inequalities for Demimartingales and N-Demimartingales Based on Concave Young Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 396(2): 434－440.

On Some Maximal Inequalities for F-Demimartingales and Conditional *N*-Demimartingales Based on Concave Young Functions

FENG De-cheng,　LIU Hong-rui,　NIU Cai-li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Wang et al. proved some maximal inequalities for demimartingales and N-demimartingales based on concave Young functions. In this paper, we will further extend main results of Wang et al. to the cases of F-demimartingales and conditional N-demimartingales.

Key words: F-demimartingale; conditional N-demimartingale; concave Young function; maximal inequality

责任编辑　张　构