

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.11.013

基于 AHP 和灰色关联分析法的 亚洲地区小学数学教材难度研究

——以中、新、韩、日四国为例^①

张廷艳

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 教材难易度是课程难度的物化表征形式, 也是衡量教材质量的一个重要指标. 针对评价教材难度的 5 个主要因素, 利用层次分析法确定各指标权重, 并运用灰色系统理论, 建立灰色关联分析法模型, 对亚洲中、新、韩、日四国的小学数学教材难度进行分析和评价, 得到教材难度评价由难到易的排序结果为: 中国、韩国、日本、新加坡.

关键词: 小学数学; 教材难度; 层次分析法; 灰色关联分析法

中图分类号: O141.4

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2015)11-0082-06

近年来, 新加坡的数学教育连续 3 次在国际数学与科学教育调查中位居前列, 韩国和日本的课程改革也成效显著, 研究亚洲地区的基础教育尤其是数学教育已经成为西方发达国家教育界关注的焦点. 因此, 对亚洲中、新、韩、日四国的数学教材难易度进行研究对于我国数学课程改革乃至对国际数学教育研究都具有重要意义.

教材难度研究是一个受多因素影响而信息量少的复杂问题, 目前国内的许多研究大多都是从不同板块对教材难度进行定性对比分析^[1-2], 定量研究较少. 对数学教材的定量研究还没有成熟和公认的研究模型和分析工具. 黄甫全从社会发展的要求与可能、个人发展的要求与可能、人类知识的发展及其体系结构 3 方面入手, 用灰色系统理论建立了课程难度模型系统; 鲍建生以影响数学题综合难度的 5 因素(背景、运算、知识含量、推理和探究)为基础, 建立了数学题的综合难度模型^[3]; 史宁中等提出影响课程难度的基本要素至少包含课程深度、课程广度和课程时间, 并由此建立了课程难度的模型^[4]. 这些研究在开发数学课程和数学习题难度的定量研究模型方面都作了有益的探索.

2013 年, 宋乃庆教授领衔的西南大学研究团队从教材的内容广度、内容深度、习题难度 3 个维度构建了小学数学教材难度研究的分析指标体系和数学评价模型^[5]. 本研究是在西南大学专家团队研究的基础上建立的一种将定性分析和定量研究相结合的评价模型与方法: 首先将评价小学数学教材难度的主要因素作为评价指标, 基于层次分析法 AHP 建立教材难度评价指标的层次关系及权重向量, 并赋予合理的权重; 然后构建灰色关联分析法模型, 找到虚拟的最难教材, 并计算各教材与它的灰色加权关联度; 最后, 根据关联度值的大小进行教材难度和相关指标排序, 从而得到中、新、韩、日小学数学教材难度评价结果和影响因素分析. 该方法采用多因素的多级处理来确定影响教材难度的各因素权重, 解决了数据量少、信息不

① 收稿日期: 2015-09-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(11226228); 重庆市社会科学规划项目(2012YBJY066).

作者简介: 张廷艳(1968-), 女, 重庆人, 研究员, 硕士研究生导师, 主要从事教学论与数学建模的研究.

完全情形下的测度问题,避免了研究者的主观性.此外,其评价结果不仅仅是一个简单的得分排序,而且能从中得到比较综合完整的信息,帮助评价对象找出其优、劣势所在^[6].

1 确定评价指标体系权重的层次分析模型

1.1 构建教材难度评价指标体系

影响教材难度的因素复杂繁多,本文采用西南大学国家社科基金教育学重点项目“中小学理科教材国际比较研究”(小学数学)课题组提出的 5 个主要影响因素:内容广度、内容呈现方式、内容认知要求、习题水平和习题背景作为评价指标.内容广度指的是知识点的数量;内容的呈现方式分为直观、描述(归纳)、抽象;内容认知要求分为了解、理解、掌握运用;习题水平分为模仿、迁移、探究;习题背景分为无背景、生活背景和科学情景^[5].

1.2 构造成对比较矩阵

构造成对比较矩阵的原则见表 1.

表 1 1-9 标度含义

标 度	含 义
1	表示 2 个元素相比具有同样重要性
3	表示 2 个元素相比,前者比后者稍重要
5	表示 2 个元素相比,前者比后者明显重要
7	表示 2 个元素相比,前者比后者强烈重要
9	表示 2 个元素相比,前者比后者极端重要
2, 4, 6, 8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若元素 i 与元素 j 的重要性之比为 a_{ij} , 那么元素 j 与元素 i 重要性之比为 $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$.

构造出 5 个评价指标,即内容广度 X_1 、内容呈现方式 X_2 、内容认知要求 X_3 、习题水平 X_4 和习题背景 X_5 的成对比较矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 2 & 3 \\ \frac{5}{3} & 1 & 1 & 3 & 5 \\ \frac{5}{4} & 1 & 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

计算得出其最大特征根和对应的特征向量分别为:

$$\lambda_{\max} = 5.0185 \quad \omega_{\max} = (0.4195, 0.6457, 0.5848, 0.2193, 0.1306)$$

将特征向量归一化后得:

$$\omega = (0.21, 0.32, 0.29, 0.11, 0.07)$$

1.3 成对比较矩阵的一致性检验

计算一致性指标得:

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{5.0185 - 5}{5 - 1} = 0.004625$$

经查表 $R.I = 1.12$, 计算一致性比例得:

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.} = \frac{0.004\ 625}{1.12} = 0.004\ 13 < 0.1$$

显然通过一致性检验,所以,影响教材难度的 5 个指标即内容广度、内容呈现方式、内容认知要求、习题水平和习题背景的权重分别为: 0.21, 0.32, 0.29, 0.11, 0.07. 影响教材难度的 5 个指标的权重从高到低的排序为: 内容呈现方式、内容认知要求、内容广度、习题水平、习题背景. 平均随机一致性指标 $R.I.$ 见表 2.

表 2 平均随机一致性指标 $R.I.$

矩阵阶数	1	2	3	4	5	6	7	8
$R.I.$	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41
矩阵阶数	9	10	11	12	13	14	15	
$R.I.$	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59	

2 基于灰色关联分析的教材难度评价模型

2.1 数据标准化

数据标准化处理方式有很多种,但必须将不同类型的指标作不同的处理,以保证评价结果与指标数据关系的一致性^[7]. 在本文中将指标分为成本型和效益型,不难发现,影响教材难度的 5 个主要评价指标均属于效益型指标,因而数据标准化处理时采用

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{\min}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}$$

其中: a_{ij} 表示第 i 个评价对象的第 j 项指标的数据; a_j^{\min} , a_j^{\max} 分别表示第 j 项指标的最小值和最大值.

本文从西南大学国家社科基金教育学重点项目“中小学理科教材国际比较研究”(小学数学)课题组的研究报告中采集到所需原始数据见表 3.

表 3 原始数据表

国家	分 值				
	内容广度	内容呈现方式	内容认知要求	习题水平	习题背景
中国	0.417 0	1.854 2	2.250 0	1.842 1	1.473 7
新加坡	0.382 6	1.886 4	2.159 1	1.671 8	1.220 5
韩国	0.417 0	1.896 0	2.375 0	1.518 0	1.216 0
日本	0.417 4	1.638 9	2.583 3	1.654 6	1.132 5

对上述数据进行标准化处理后得表 4.

表 4 无量纲数据表

国家	分 值				
	内容广度	内容呈现方式	内容认知要求	习题水平	习题背景
中国	0.988 5	0.837 4	0.214 3	1.000 0	1.000 0
新加坡	0	0.962 7	0	0.474 5	0.257 9
韩国	0.988 5	1.000 0	0.509 0	0	0.244 7
日本	1.000 0	0	1.000 0	0.421 5	0

2.2 确定比较序列和参考序列

依次提取每一项指标的最大值记为:

$$x_0(j) = b_j^{\max} \{j = 1, 2, \dots, m\}$$

得到参考序列为:

$$x_0 = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\}$$

并将各比较序列记为:

$$x_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

根据表 4 可得表 5.

表 5 比较和参考序列表

国家	分 值				
	内容广度	内容呈现方式	内容认知要求	习题水平	习题背景
中国	0.988 5	0.837 4	0.214 3	1.000 0	1.000 0
新加坡	0	0.962 7	0	0.474 5	0.257 9
韩国	0.988 5	1.000 0	0.509	0	0.244 7
日本	1.000 0	0	1.000 0	0.421 5	0
参考序列	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0

2.3 确定灰色关联系数

通过以下公式

$$\xi_i(j) = \frac{\min_i \min_j |x_0(j) - x_i(j)| + \rho \max_i \max_j |x_0(j) - x_i(j)|}{|x_0(j) - x_i(j)| + \rho \max_i \max_j |x_0(j) - x_i(j)|}$$

得到关联系数矩阵:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.977 5 & 0.333 3 & 0.977 5 & 1.000 0 \\ 0.754 6 & 0.930 5 & 1.000 0 & 0.333 3 \\ 0.388 9 & 0.333 3 & 0.504 5 & 1.000 0 \\ 1.000 0 & 0.487 6 & 0.333 3 & 0.463 6 \\ 1.000 0 & 0.402 5 & 0.398 3 & 0.333 3 \end{pmatrix}$$

其中: $\xi_i(j)$ 表示比较序列 x_i 对参考序列 x_0 在第 j 项指标上的关联系数; $\rho \in [0, 1]$ 为分辨系数. 分辨系数 ρ 越大, 分辨率越大, ρ 越小, 分辨率越小, 一般取 $\rho = 0.5$; 称 $\min_i \min_j |x_0(j) - x_i(j)|$, $\max_i \max_j |x_0(j) - x_i(j)|$ 分别为两极最小差及两极最大差.

2.4 确定灰色加权关联度

通过以下公式

$$r_i = \sum_{j=1}^n \omega_j \xi_i(j)$$

得关联度向量:

$$\mathbf{r} = (0.739 5, 0.546 2, 0.736 1, 0.681 0)$$

其中: ω_j 为各指标权重, r_i 为第 i 个评价对象对虚拟最优对象(最难教材)的灰色加权关联度.

2.5 排 序

根据灰色关联度的大小进行排序, r_i 越大, 则说明第 i 个评价对象与虚拟最优对象(最难教材)越接近, 也即是该评价教材越难; 反之, r_i 越小, 则说明第 i 个评价对象与虚拟最优对象(最难教材)越远, 也即是该评价教材越易. 由灰色加权关联度 $r_1 > r_3 > r_4 > r_2$ 可知各国教材难度由高到低的顺序为: 中国、韩国、日本、新加坡.

3 讨论与结论

3.1 讨 论

本文通过建立基于层次分析的灰色关联分析法模型, 对亚洲中、新、韩、日四国的小学数学教材难度进行了研究, 研究结果表明: 中国的小学数学教材难度值最大, 新加坡难度值最小, 韩国和日本居中.

对表 5 进行数据处理后得到表 6，各项比较因素以 1 为参考序列值，越接近 1 则表明这一因素上的难度越大。

表 6 国间相同因素比较

因素	数值排序	对应的国家排序
内容呈现方式	$1 > 0.9627 > 0.8374 > 0$	韩国、新加坡、中国、日本
内容认知要求	$1 > 0.5090 > 0.2143 > 0$	日本、韩国、中国、新加坡
内容广度	$1 > 0.9885 = 0.9885 > 0$	日本、中国、韩国、新加坡
习题水平	$1 > 0.4745 > 0.4215 > 0$	中国、新加坡、日本、韩国
习题背景	$1 > 0.2579 > 0.2447 > 0$	中国、新加坡、韩国、日本

从横向来看，就教材的内容广度而言，日本在数学教材编写上涉及知识点最多，新加坡的知识点最少，中国和韩国知识点相较而言居于中间；就内容呈现方式这一因素来看，韩、新、中三国在教材内容的呈现方式上都偏抽象，而日本则最为直观；在内容认知要求方面，日本对小学生知识点认知上的要求是要掌握运用，而韩国则更注重对知识点的理解，中国与新加坡则更侧重对知识点的了解；在习题水平上，中国更注重知识点的探究，而新加坡和韩国则倾向于知识点的迁移和模仿，韩国较注重知识点的模仿；在教材习题编写的背景设置上，除中国注重以科学背景做为习题背景，其他三个国家都更倾向于以生活背景甚至无背景的教材习题编写。由此可见，中国的小学数学教材难度主要来自于习题水平、习题背景、内容广度这三个指标上。

同理，由表 5 可得表 7。

表 7 国内不同因素比较

国家	因素分值排序	对应因素排序
中国	$1 = 1 > 0.9885 > 0.8374 > 0.2143$	习题背景(习题水平)、内容广度、内容呈现方式、内容认知要求
韩国	$1 > 0.9885 > 0.509 > 0.2447 > 0$	内容呈现方式、内容广度、内容认知要求、习题背景、习题水平
日本	$1 = 1 > 0.42106 > 0 = 0$	内容广度(内容认知要求)、习题水平、内容呈现方式(习题背景)
新加坡	$0.9627 > 0.4745 > 0.2579 > 0 = 0$	内容呈现方式、习题水平、习题背景、内容广度(内容认知要求)

注：括号内表示并列因素。

从纵向来看，在中国的小学数学教材编写中，知识点呈现较为抽象，以理解和了解为主，探究性学习较多并以多元背景编写习题；在新加坡的教材编写中更侧重内容呈现方式的抽象化、知识点的迁移、习题背景的生活化等，而在内容广度和内容认知上只需要做到了解较少的知识点即可；韩国在教材编写中注重以抽象的方式，为学生呈现较多的知识点以期达到理解的目的，但在习题上却以生活背景编写以期做到模仿使用的程度；日本小学数学教材中呈现出以直观的方式呈现大量的知识点并要求掌握运用，但在习题编写时则在没有背景的情况下希望学生能够学会知识点的迁移使用。

3.2 结 论

笔者基于 AHP 和灰色关联分析法构建模型，对中、韩、日、新四个国家的教材难度进行比较分析得出：无论是从纵向国家内部比较还是横向国家间比较，中国的小学数学教材难度确实大于其他几个国家，而且难度的影响因素主要体现在习题水平、习题背景和内容广度上。因此，在不考虑各国学生的数学基础及智力因素等群体特性因素的情况下，仅就教材本身来看，在中国小学数学教材改革和教材编写、修订中：在内容方面，可适当减少知识点数量，提高内容认知要求，以学生理解和掌握运用知识点为目的；在习题编写方面，适当减少习题数量，降低习题难度，结合生活背景出题，让学生能够学以致用，在生活中思考和学习，辩证吸收国外先进教育教学理念，实现“减负提质”的教改目标。

参考文献:

- [1] 应求上. 中美小学数学“图形与几何”内容比较 [J]. 绍兴文理学院学报, 2014, 34(8): 106—111.
- [2] 胥华美. 中一新小学数学教材“实践与综合应用”领域的比较研究 [D]. 宁波: 宁波大学, 2012.
- [3] 鲍建生. 中英两国初中数学课程综合难度的比较研究 [D]. 上海: 华东师范大学, 2002.
- [4] 史宁中, 孔凡哲, 李淑文. 课程难度模型: 我国义务教育几何课程难度的对比 [J]. 东北师大学报: 哲学社会科学版, 2005(6): 151—155.
- [5] 蔡庆有, 邝孔秀, 宋乃庆. 小学数学教材难度模型研究 [J]. 教育学报, 2013, 9(5): 97—105.
- [6] 邓聚龙. 灰色系统基本方法 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1987.
- [7] 陈冀生, 邓磊. 物资采购中供货商的最优选法 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2011, 36(5): 79—82.

Study of the Difficulty Degree of Primary Mathematics Textbooks in Asian Countries Based on AHP and Grey Relational Analysis

——A Case Study of China, Singapore, South Korea and Japan

ZHANG Ting-yan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: AHP (analytic hierarchy process) is applied in this paper to determine the weights of 5 indexes in the evaluation of the difficulty degree of primary mathematics textbooks. A grey relational analysis model is established on the basis of the theory of grey system so as to analyze and evaluate the difficulty degrees of primary mathematics textbooks in China, Singapore, South Korea and Japan. Based on the results of the evaluation, the difficulty of primary mathematics textbooks in the four countries is in the order of China > South Korea > Japan > Singapore.

Key words: primary mathematics; difficulty degree of a textbook; AHP; grey relational analysis

责任编辑 张 枸

