DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.01.011

具有非线性边界流的多孔介质方程解的爆破时间的下界估计①

周　军

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了一类具有非线性边界流的多孔介质方程. 利用能量函数研究了该模型解的爆破时间的下界估计，推广了已有研究结果.

关　键　词：多孔介质方程；非线性边界流；爆破时间

中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)01-0073-05

本文研究如下一类非线性抛物方程：

$$\begin{cases} u_t = \sum_{i,j=1}^{n} [a^{ij}(x)(u^m)_{x_i}]_{x_j} - f(u) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)(u^m)_{x_i}\nu_j = g(u) & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：$m > 1$ 是常数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geqslant 3)$ 是一个凸的具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向，$u_0(x)$ 是初值. 假设存在常数 $\tilde{\theta} > 0$ 使得对 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ 下式成立：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\eta_i\eta_j \geqslant \tilde{\theta} \mid \eta \mid^2 \tag{2}$$

f 和 g 满足

$$f(\tau) \geqslant \gamma_1 \tau^p,\ g(\tau) \leqslant \gamma_2 \tau^q,\ \tau \geqslant 0 \tag{3}$$

其中：$p > 1, q > 1, \gamma_1$ 和 γ_2 是正常数. 模型(1)被称为燃烧模型，文献[1-3]描述了其物理背景.

问题(1)的一种特殊情况是如下方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - f(u) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \partial_\nu u = g(u) & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{4}$$

在 f 和 g 满足(3)式的条件下，文献[4]研究了(4)式解的整体存在和爆破条件，证明了(4)式的解在 $2q <$

---

① 收稿日期：2014-12-17

基金项目：国家自然科学基金项目(11201380)；中国博士后基金项目(2014M550453，2015T80948)；中央高校基本科研业务费项目(XDJK2015A16).

作者简介：周　军(1981-)，男，四川成都人，副教授，主要从事偏微分方程和动力系统的研究.

$p+1$ 的条件下不会在有限时间内爆破，并在对 f 和 g 的一些合理的假设下，证明了解在有限时间内爆破，进一步，在一些更为严格的假设下研究了爆破时间的下界估计.

在 $m=1$，$a^{ij}(x)$ 满足(2)式及 f 和 g 满足(3)式的条件下，文献[5-6]研究了(1)式. 文献[5]研究了其整体存在和爆破条件. 文献[6]研究了爆破时间的下界估计，结果如下：

定理1 假设 $u(x,t)$ 是(1)式的非负解，f 和 g 满足(3)式并且 $2q\geqslant p+1$，$u_0\in L^{2k}(\Omega)$，

$$k>\max\left\{2(n-2)(q-1),\ \frac{q}{2}-1,\ 1\right\} \tag{5}$$

如果 $u(x,t)$ 在有限时刻 T 爆破，则 T 满足估计：

$$T\geqslant\int_{\Phi(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{k_2+k_1\xi+k_6\xi^{\frac{3(n-2)}{3n-8}}} \tag{6}$$

其中

$$\Phi(0)=\int_\Omega u_0^{2k}\mathrm{d}x$$

k_1,k_2,k_6 是正常数，其定义参见文献[6].

模型(1)的另一种特殊情形为

$$\begin{cases} u_t=\Delta u^m-f(u) & x\in\Omega,\ t>0\\ \partial_\nu u^m=g(u), & x\in\partial\Omega,\ t>0\\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0 & x\in\Omega \end{cases} \tag{7}$$

文献[7]证明了(7)式的解的整体存在的条件是(3)式成立且 $2m<2q<m+p$，在对 f 和 g 的一些合理的假设下，证明了解在有限时间内爆破.

受上述文献的启发，本文研究问题(1)的爆破时间的下界估计. 类似于文献[7]，我们可以证明(1)式的解整体存在如果(3)式成立并且 $2m<2q<m+p$. 所以为了研究爆破时间的下界估计，假设(3)式成立并且 $2q\geqslant m+p$. 本文的主要结果如下：

定理2 假设 $u(x,t)$ 是(1)式的非负经典解，$u_0\in L^{4(n-2)(q-1)}(\Omega)$，$f$ 和 g 满足(3)式并且 $2q\geqslant m+p$. 如果 $u(x,t)$ 在有限时刻 T 爆破，则 T 满足估计：

$$T\geqslant\int_{\Psi(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{c_1\xi+\tilde{c}_3\xi^{\frac{3(n-2)}{3n-8}}} \tag{8}$$

其中：$\Psi(0)=\int_\Omega u_0^{4(n-2)(q-1)}(x)\mathrm{d}x$，$c_1$ 和 $\tilde{c}_3$ 是将在证明中给出的正常数.

证 我们定义如下辅助函数：

$$\Psi(t)=\int_\Omega u^{2k}(x,t)\mathrm{d}x,\ k=2(n-2)(q-1) \tag{9}$$

利用(1),(2),(3)式和散度定理，我们有

$$\begin{aligned}\Psi'(t)&\leqslant 2k\int_{\partial\Omega}u^{2k-1}g(u)\mathrm{d}s-2mk(2k-1)\tilde{\theta}\int_\Omega u^{m-1}u^{2k-2}\,|\nabla u|^2\mathrm{d}x-2k\int_\Omega u^{2k-1}f(u)\mathrm{d}x\leqslant\\ &2k\gamma_2\int_{\partial\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}}\mathrm{d}s-\frac{2\theta(2k-1)}{k}\int_\Omega|\nabla u^k|^2\mathrm{d}x-2k\gamma_1\int_\Omega u^{2k+p-1}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\theta=\tilde{\theta}mM$，M 是 u^{m-1} 的下界. 令

$$\rho_0=\min_{x\in\partial\Omega}(x\cdot\boldsymbol{\nu})>0$$

$$d=\max_{x\in\bar{\Omega}}|x|>0$$

则有

$$\int_{\Omega}\nabla\cdot(xu^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}})\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}}x\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}s\geqslant\rho_0\int_{\partial\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}}\,\mathrm{d}s \tag{11}$$

$$\int_{\Omega}\nabla\cdot(xu^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}})\,\mathrm{d}x\leqslant n\int_{\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}}\,\mathrm{d}x+\frac{(4n-7)kd}{2n-4}\int_{\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}-1}\,|\nabla u|\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

利用(11)和(12)式，我们可以得到

$$\int_{\partial\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}}\,\mathrm{d}s\leqslant\frac{n}{\rho_0}\int_{\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}}\,\mathrm{d}x+\frac{(4n-7)kd}{(2n-4)\rho_0}\int_{\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}-1}\,|\nabla u|\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

从而由(10)和(13)式可知

$$\Psi'(t)\leqslant 2k\gamma_2\left[\frac{n}{\rho_0}\int_{\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}}\,\mathrm{d}x+\frac{(4n-7)kd}{(2n-4)\rho_0}\int_{\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}-1}\,|\nabla u|\,\mathrm{d}x\right]-$$
$$\frac{2\theta(2k-1)}{k}\int_{\Omega}|\nabla u^k|^2\,\mathrm{d}x-2k\gamma_1\int_{\Omega}u^{2k+p-1}\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

另一方面，利用 Hölder 不等式和 Young 不等式可知

$$\int_{\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}}\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}u^k u^{\frac{(2n-3)k}{2n-4}}\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\Omega}u^{\frac{(2n-3)k}{n-2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}u^{2k}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}u^{\frac{(2n-3)k}{n-2}}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\Omega}u^{2k}\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

$$\int_{\Omega}u^{\frac{(4n-7)k}{2n-4}-1}\,|\nabla u|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{k}\left(\int_{\Omega}u^{\frac{(2n-3)k}{n-2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u^k|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\frac{1}{2\mu}\int_{\Omega}u^{\frac{(2n-3)k}{n-2}}\,\mathrm{d}x+\frac{\mu}{2k^2}\int_{\Omega}|\nabla u^k|^2\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

其中 μ 是任意的正常数，并且

$$\int_{\Omega}u^{2k+p-1}\geqslant|\Omega|^{\frac{1-p}{2k}}\Psi^{1+\frac{p-1}{2k}} \tag{17}$$

其中 $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度. 将(15)－(17)式代入(14)式可知

$$\Psi'(t)\leqslant\frac{nk\gamma_2}{\rho_0}\Psi+\frac{k\gamma_2}{\rho_0}\left(n+\frac{k(4n-7)\mathrm{d}}{(2n-4)\mu}\right)\int_{\Omega}u^{\frac{(2n-3)k}{n-2}}\,\mathrm{d}x+$$
$$\left(\frac{\gamma_2(4n-7)\mathrm{d}\mu}{(2n-4)\rho_0}-\frac{2(2k-1)\theta}{k}\right)\int_{\Omega}|\nabla u^k|^2\,\mathrm{d}x-2k\gamma_1\,|\Omega|^{\frac{1-p}{2k}}\Psi^{1+\frac{p-1}{2k}} \tag{18}$$

现在利用 Hölder 不等式可得

$$\int_{\Omega}u^{\frac{(2n-3)k}{n-2}}\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\Omega}u^{2k}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}(u^k u^{\frac{nk}{n-2}}\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_{\Omega}u^{2k}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{4}}(u^{\frac{2nk}{n-2}}\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{4}} \tag{19}$$

利用 Sobolev 不等式[8]，对 $n\geqslant 3$，我们有

$$\left(\int_{\Omega}u^{\frac{2nk}{n-2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}\leqslant(c_s)^{\frac{n}{2(n-2)}}u^k{}^{\frac{n}{2(n-2)}}_{W^{1,2}(\Omega)}\leqslant c(\|\nabla u^k\|^{\frac{n}{2(n-2)}}_{L^2(\Omega)}+\|u^k\|^{\frac{n}{2(n-2)}}_{L^2(\Omega)}) \tag{20}$$

其中 c_s 是和 Ω 及 n 有关的常数. c 的定义如下：当 $n=3$ 时为 $2^{\frac{1}{2}}(c_s)^{\frac{3}{2}}$；当 $n>3$ 时为 $(c_s)^{\frac{n}{2(n-2)}}$. 结合(19)，(20)式以及 Young 不等式可知

$$\int_{\Omega}u^{\frac{(2n-3)k}{n-2}}\,\mathrm{d}x\leqslant c\left[\Psi^{\frac{2n-3}{2(n-2)}}+\frac{3n-8}{4(n-2)}\lambda^{-\frac{n}{3n-8}}\Psi^{\frac{3(n-2)}{3n-8}}+\frac{n\lambda}{4(n-2)}\int_{\Omega}|\nabla u^k|^2\,\mathrm{d}x\right] \tag{21}$$

其中 λ 是任意的正常数. 结合(18)和(21)式，我们有

$$\Psi'(t)\leqslant c_1\Psi+c_2\Psi^{\frac{2n-3}{2(n-2)}}+c_3\Psi^{\frac{3(n-2)}{3n-8}}+c_4\int_{\Omega}|\nabla u^k|^2\,\mathrm{d}x-2k\gamma_1\,|\Omega|^{\frac{1-p}{2k}}\Psi^{1+\frac{p-1}{2k}} \tag{22}$$

其中：

$$c_1=\frac{nk\gamma_2}{\rho_0}$$

$$c_2=\frac{kc\gamma_2}{\rho_0}\left(n+\frac{k(4n-7)d}{(2n-4)\mu}\right)$$

$$c_3=\frac{kc\gamma_2(3n-8)}{4\rho_0(n-2)}\left(n+\frac{k(4n-7)d}{(2n-4)\mu}\right)\lambda^{-\frac{n}{3n-8}}$$

$$c_4=\frac{knc\lambda\gamma_2}{4\rho_0(n-2)}\left(n+\frac{k(4n-7)d}{(2n-4)\mu}\right)+\frac{\gamma_2(4n-7)\mathrm{d}\mu}{(2n-4)\rho_0}-\frac{2(2k-1)\theta}{k}$$

选取 μ 充分小使得：

$$c_2\geqslant 2k\gamma_1\mid\Omega\mid^{\frac{1-p}{2k}}$$

$$\frac{\gamma_2(4n-7)\mathrm{d}\mu}{(2n-4)\rho_0}<\frac{2(2k-1)\theta}{k}$$

接着我们可选取 λ 使得 $c_4=0$. 所以从(22)式可知

$$\Psi'(t)\leqslant c_1\Psi+c_2\Psi^{\frac{2n-3}{2(n-2)}}+c_3\Psi^{\frac{3(n-2)}{3n-8}}-2k\gamma_1\mid\Omega\mid^{\frac{1-p}{2k}}\Psi^{1+\frac{p-1}{2k}}\tag{23}$$

由条件

$$2q\geqslant p+m>p+1$$

可知

$$k>(n-2)(p-1)$$

所以

$$a=\frac{nk}{(n-2)(4k-(p-1)(3n-8))}\in(0,1)$$

$$1-a=\frac{(3n-8)(k-(n-2)(p-1))}{(n-2)(4k-(p-1)(3n-8))}\in(0,1)$$

因为

$$\frac{2n-3}{2(n-2)}=\left(1+\frac{p-1}{2k}\right)a+\frac{3(n-2)}{3n-8}(1-a)$$

利用 Young 不等式，我们有不等式

$$\Psi^{\frac{2n-3}{2(n-2)}}=(\varepsilon\Psi^{1+\frac{p-1}{2k}})^{a}(\varepsilon^{-\frac{a}{1-a}}\Psi^{\frac{3(n-2)}{3n-8}})^{1-a}\leqslant a\varepsilon\Psi^{1+\frac{p-1}{2k}}+(1-a)\varepsilon^{-\frac{a}{1-a}}\Psi^{\frac{3(n-2)}{3n-8}}\tag{24}$$

对任意的 $\varepsilon>0$ 成立. 通过取

$$\varepsilon=\frac{2k\gamma_1}{ac_2}\mid\Omega\mid^{\frac{1-p}{2k}}$$

我们从(23)式可推知

$$\Psi'(t)\leqslant c_1\Psi+\tilde{c}_3\Psi^{\frac{3(n-2)}{3n-8}}$$

$$\tilde{c}_3=c_3+c_2(1-a)\varepsilon^{-\frac{a}{1-a}}\tag{25}$$

由(25)式可知爆破时间 T 满足估计(8).

注 1 由定理1可知初值 $u_0\in L^{2k}(\Omega)$ 并且 k 满足(5)式. 利用本文的证明方法我们在更弱的条件 $u_0\in L^{4(n-2)(q-1)}(\Omega)$ 下就能得到类似于定理1的爆破时间的下界估计.

参考文献：

[1] BEBERNES J，EBERLY D. Mathematical Problems from Combustion Theory [M]. Berlin：Springer，1989.

[2] VAZQUEZ J L. The Porous Medium Equation：Mathematical Theory [M]. Oxford：Oxford University Press，2006.

[3] WU Z，ZHAO J，YIN J，et al. Nonlinear Diffusion Equations [M]. Singarpone：World Scientific，2001.

[4] PAYNE L，PHILIPPIN G，PIRO S V. Blow-up Phenomena for a Semilinear Heat Equation with Nonlinear Boundary Condition，I [J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik，2010，61(6)：999－1007.

[5] BAGHAEI K，HESAARAKI M. Lower Bounds for the Blow-up Time in the Higher-Dimensional Nonlinear Divergence form Parabolic Equations [J]. Comptes Rendus Mathematique，2013，351(19)：731－735.

[6] LI F，LI J. Global Existence and Blow-up Phenomena for Nonlinear Divergence form Parabolic Equations with Inhomogeneous Neumann Boundary Conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2012，385(2)：1005－1014.

[7] HU Y，LI J，WANG L. Blow-up Phenomena for Porous Medium Equation with Nonlinear Flux on the Boundary [J/OL]. Journal of Applied Mathematics.（2013/11/01）[2013/11/20]. http：//www. hindawi. com/journals/jam/2013/952126.

[8] BREZIS H. Functional Analysis，Sobolev Spaces and Partial Differential Equations [M]. Berlin：Springer，2011.

Lower Bound of Blow-Up Time of Solutions to a Porous Medium Equation with Nonlinear Flux on the Boundary

ZHOU　Jun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper deals with a porous medium equation with nonlinear flux on the boundary. The lower bound the blow-up time of solutions to the model is obtained by using energy functions. The results of this paper generalize the related results in early references.

Key words：porous medium equation；nonlinear boundary flux；blow-up time

责任编辑　张　枸