DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.01.012

基于梯形分布的一级密封价格拍卖博弈及均衡分析[①]

马国顺，　王　婷

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：针对传统的一级密封价格拍卖博弈模型中条件假设的不足，结合生活中实际拍卖的特点，运用梯形分布的思想，对经典的一级密封价格拍卖博弈模型做了改进. 与改进前的模型相比，改进后的模型结果与现实的吻合性更好，更具有现实指导意义.

关　键　词：梯形分布；一级密封价格拍卖；均衡分析

中图分类号：F224.32　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)01-0078-07

拍卖作为一种典型的交易方式，具有公开、公正、公平的特点. 参与人集中竞争，价高者获得竞拍物品. 通过公开拍卖可以有效避免买者和卖者之间的合谋行为，减少交易过程中的不公正情况的发生[1]. 作为拍卖最常见的形式之一，一级密封价格拍卖受到了众多学者的重视，取得了许多相关研究成果[2-5]，但这些成果基本上集中于常规理论的研究领域. 对一级密封价格理论及应用的研究也较多，如文献[6]是基于一级密封价格的排污权模型的研究，文献[7]阐述了一级密封价格模型在工程投标当中的运用. 在上述研究中，研究者几乎都将拍卖物对投标人的价值限定为(0，1)上的均匀分布. 这一假设可以使问题的讨论得以简化，但却不能很好地反映现实. 因为投标人具备一定的知识理性(或是由于对拍卖物品价值的不确定而产生的从众心理)，在拍卖过程中会表现出明显的集中趋势. 我们曾尝试应用三角形分布建立一级密封价格拍卖博弈模型，能较好地反映一定的现实情况，但参数的取值无法准确量化，具有一定的随意性，对模型的可信度具有较大影响. 运用标准正态分布或偏正态分布能够很好地贴近现实，但在计算和证明时会遇到极大的困难，故本文运用梯形分布来近似代替正态分布建立相关模型，对经典的一级密封价格拍卖博弈模型中一人和多人的情况分别做了改进，并对改进前后的模型结果进行对比. 通过比较得出：改进后的模型结果能更真实地反映现实情况.

1　经典一级密封价格拍卖模型

经典一级密封价格拍卖中，投标人同时(或独立)出价，投标人的出价是非公开的. 拍卖人对所有出价进行评估，按照价格的高低来决定投标人是否中标(根据国际惯例，价格最高的人获得标的物). 因此，投标人是否中标由自己的出价和他人的出价共同决定. 若投标人赢得标的物，则他的支付为他对物品的评价减去他的出价. 反之，他的支付为零. 每个投标人的最优策略都是自己的支付最大化时的出价.

---

① 收稿日期：2015-03-11
基金项目：国家自然科学基金项目(71061012)；甘肃省自然科学基金项目(145RJZA102).
作者简介：马国顺(1964-)，男，甘肃天水人，副教授，理学硕士，主要从事博弈论研究.

1.1　拍卖过程中有两个投标人的情况

让我们首先考虑只有两个投标人参与拍卖的情况，$i=1,2$. 设 $b_i \geqslant 0$ 是投标人 i 的出价，v_i 为拍卖物品对投标人 i 的价值. 假定 v_i 只有投标人 i 自己知道，但两个投标人都知道 v_i 独立地取自定义在区间(0，1)上的均匀分布函数，投标人 i 的支付如下：

$$u_i(b_i, b_j, v_i)=\begin{cases} v_i-b_i & b_i>b_j \\ \dfrac{v_i-b_i}{2} & b_i=b_j \\ 0 & b_i<b_j \end{cases} \tag{1}$$

假定投标人 i 的出价 $b_i(v_i)$ 是其价值 v_i 的严格递增可微函数，因为博弈是对称的，所以我们只需考虑对称的均衡出价战略：$b=b^*(v)$. 对于给定的 v 和 b[1]，投标人 i 的期望支付为：

$$u_i=(v-b)p(b_j<b)=(v-b)p\{b^*(v_j)<b\}=$$
$$(v-b)p\{v_j<b^{*-1}(b)=\varphi(b)\}=(v-b)\varphi(b)$$

其中 $b^{*-1}(b)=\varphi(b)$ 是 b^* 的反函数，投标人 i 需解决的问题是如何使他的期望支付最大化.

$$\max_b u_i=(v-b)p\{b_j<b\}=(v-b)\varphi(b)$$

最优化一阶条件为：

$$-\varphi(b)+(v-b)\varphi'(b)=0$$

注意到若 $b^*(.)$ 是投标人 i 的最优战略，则 $\varphi(b)=v$，所以

$$-v+(v-b)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b}=0$$

解上述微分方程得：

$$b^*=\frac{1}{2}v \tag{2}$$

故该博弈问题的贝叶斯纳什均衡是每个投标人的出价是其实际价值的一半：

$$b^*=\frac{1}{2}v$$

此时虽然找到了博弈的有效均衡，但卖者只得到了买者价值的一半. 比较而言，在完全信息下，买者之间的竞争可以使卖者得到更高的收益. 所以，我们需要考虑多人参与投标的情况.

1.2　拍卖过程中有多个投标人的情况

投标人的出价与实际价值之间的差距随投标人数的增加而递减[1]. 假设有 n 个投标人参与拍卖，每个 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立，但它们都是定义在区间(0，1)上的均匀分布. 如果评价为 v 的投标人 i 出价为 b，则他的期望支付函数为：

$$u_i=(v-b)\Pi_{j\neq i}p\{b_j<b\}=(v-b)\varphi^{n-1}(b)$$

最优化一阶条件为：

$$-\varphi^{n-1}(b)+(v-b)(n-1)\varphi^{n-2}(b)\varphi'(b)=0$$

注意到若 $b^*(.)$ 是投标人 i 的最优战略，则 $\varphi(b)=v$，所以

$$-v^{n-1}+(v-b)(n-1)v^{n-2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b}=0$$

解上述微分方程得：

$$b^*=\frac{n-1}{n}v \tag{3}$$

显然随 n 的增大 $b^*(v)$ 增大，当 $n\to\infty$ 时，$b\to v$. 即投标人越多，投标人的出价越接近于他的真实评价. 所

以，尽可能增加参与竞标的人数，有利于扩大卖者的利益.

上述过程是假定招标的物品对招标人的价值服从区间(0，1)上的均匀分布，但这一假定与实际情况不符，因为在拍卖过程中，买者更清楚招标物品的价值. 也就是说，招标人有能力判断出招标物品的价值在某个区间之内. 因此，我们用梯形分布来代替均匀分布建立模型.

2　基于梯形分布的一级密封价格拍卖模型

若一个随机变量的密度函数可以表示为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{s(t-s+1)} & 0<x\leqslant s\\ \dfrac{2}{t-s+1} & s<x\leqslant t\\ \dfrac{2x-2}{(t-1)(t-s+1)} & t<x<1\end{cases}$$

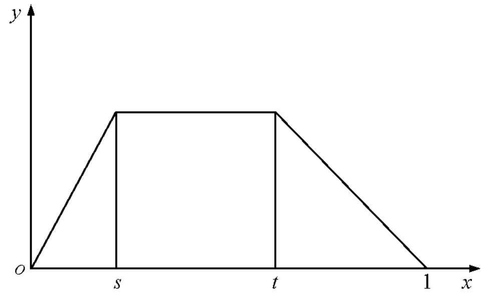

图 1　梯形分布的密度函数

则称该变量在区间(0，1)上服从梯形分布. 其密度函数如图 1 所示.

2.1　博弈过程中有两个投标人的模型

$$u_i=(v-b)p(b_j<b)=(v-b)p\{b^*(v_j)<b\}=(v-b)p\{v_j<b^{*-1}(b)=h(b)\}=$$

$$\begin{cases}(v-b)\displaystyle\int_0^{h(b)}\frac{2x}{s(t-s+1)}\mathrm{d}x & 0<x\leqslant s\\ (v-b)\left[\displaystyle\int_0^s\frac{2x}{s(t-s+1)}\mathrm{d}x+\int_s^{h(b)}\frac{2}{t-s+1}\mathrm{d}x\right] & s<x\leqslant t\\ (v-b)\left[\displaystyle\int_0^s\frac{2x}{s(t-s+1)}\mathrm{d}x+\int_s^t\frac{2}{t-s+1}\mathrm{d}x+\int_t^{h(b)}\frac{2x-2}{(t-1)(t-s+1)}\mathrm{d}x\right] & t<x<1\end{cases}$$

1) 若 $0<h(b)\leqslant s$，则

$$u_i=(v-b)\frac{h^2(b)}{s(t-s+1)}$$

最优化一阶条件为：

$$u_i=-\frac{h^2(b)}{s(t-s+1)}+(v-b)\frac{2h(b)h'(b)}{s(t-s+1)}=0$$

注意到若 $b^*(.)$ 是投标人 i 的最优战略，则 $h(b)=v$，所以

$$-v^2+2v(v-b)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b}=0$$

解上述微分方程得：

$$b^*=\frac{2}{3}v \tag{4}$$

即(4)式为该博弈问题的贝叶斯纳什均衡.

2) 若 $s<h(b)\leqslant t$，则

$$u_i=(v-b)\left[\frac{s}{t-s+1}+\frac{2(h(b)-s)}{t-s+1}\right]$$

最优化一阶条件为：

$$u_i=-\frac{2h(b)-s}{t-s+1}+(v-b)\frac{2h'(b)}{t-s+1}=0$$

注意到若 $b^*(.)$ 是投标人 i 的最优战略，则 $h(b)=v$，所以

$$-(2v-s)+2(v-b)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b}=0$$

解上述微分方程得:

$$b^* = \frac{v^2}{2v-s} \tag{5}$$

即(5)式为该博弈问题的贝叶斯纳什均衡.

3) 若 $t < h(b) < 1$,则

$$u_i = (v-b)\left[\frac{s}{t-s+1} + \frac{2(t-s)}{t-s+1} + \frac{h^2(b) - 2h(b) - b^2 + 2b}{(t-1)(t-s+1)}\right]$$

最优化一阶条件为:

$$u_i = -\left[\frac{2t-s}{t-s+1} + \frac{h^2(b) - 2h(b) - t^2 + 2t}{(t-1)(t-s+1)}\right] + (v-b)\frac{2h(b)h'(b) - 2h'(b)}{t-s+1} = 0$$

注意到若 $b^*(.)$ 是投标人 i 的最优战略,则 $h(b) = v$,所以

$$-[(t-1)(2t-s) + v^2 - 2v - t^2 + 2t] + 2(v-b)(v-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b} = 0$$

解上述微分方程得:

$$b^* = \frac{2v^3 - 3v^2}{3v^2 - 6v + 3s - 3st + 3t^2} \tag{6}$$

即(6)式为该博弈问题的贝叶斯纳什均衡.

2.2 博弈过程中有多个投标人的模型

设拍卖物品对投标人 i 的价值 v_i 服从(0,1)区间上的梯形分布,那么在给定 v 和 b 的情况下,投标人 i 的期望支付为:

$$u_i = (v-b)\Pi_{i\neq j} p(b_j < b) = (v-b)\Pi_{i\neq j} p\{b^*(v_j) < b\} =$$

$$(v-b)\Pi_{i\neq j} p\{v_j < b^{*-1}(b) = h(b)\} =$$

$$\begin{cases} (v-b)\Pi_{i\neq j}\displaystyle\int_0^{h(b)} \frac{2x}{s(t-s+1)}\mathrm{d}x & 0 < x \leqslant s \\ (v-b)\Pi_{i\neq j}\left[\displaystyle\int_0^s \frac{2x}{s(t-s+1)}\mathrm{d}x + \int_s^{h(b)} \frac{2}{t-s+1}\mathrm{d}x\right] & s < x \leqslant t \\ (v-b)\Pi_{i\neq j}\left[\displaystyle\int_0^s \frac{2x}{s(t-s+1)}\mathrm{d}x + \int_s^t \frac{2}{t-s+1}\mathrm{d}x + \int_t^{h(b)} \frac{2x-2}{(t-1)(t-s+1)}\mathrm{d}x\right] & t < x < 1 \end{cases}$$

1) 若 $0 < h(b) \leqslant s$,则

$$u_i = (v-b)\left[\frac{h^2(b)}{s(t-s+1)}\right]^{n-1}$$

最优化一阶条件为:

$$u_i = -\left[\frac{h^2(b)}{s(t-s+1)}\right]^{n-1} + (v-b)(n-1)\left[\frac{h^2(b)}{s(t-s+1)}\right]^{n-2}\frac{2h(b)h'(b)}{a(t-s+1)} = 0$$

注意到若 $b^*(.)$ 是投标人 i 的最优战略,则 $h(b) = v$,所以

$$-v^{2n-2} + 2v^{n-3}(v-b)(n-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b} = 0$$

解上述微分方程得:

$$b^* = \frac{2n-2}{2n-1}v \tag{7}$$

当 $n = 2$ 时(7)式与(4)式相等,与两个投标人的期望支付相符.当 $n > 2$ 时,由(7)式可得 $0 < h(b) \leqslant s$ 时该博弈问题的贝叶斯纳什均衡.

2) 若 $s < h(b) \leqslant t$,则

$$u_i=(v-b)\left[\frac{s}{t-s+1}+\frac{2(h(b)-s)}{t-s+1}\right]^{n-1}$$

最优化一阶条件为：

$$u_i=-\left[\frac{2h(b)-s}{t-s+1}\right]^{n-1}+(v-b)(n-1)\left[\frac{2h(b)-s}{t-s+1}\right]^{n-2}\frac{2h'(b)}{t-s+1}=0$$

注意到若 $b^*(.)$ 是投标人 i 的最优战略，则 $h(b)=v$，所以

$$-(2v-s)^{n-1}+2(n-1)(v-b)(2v-s)^{n-2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b}=0$$

解上述微分方程得：

$$b^*=\frac{2(n-1)\int(2v-s)^{n-2}\,v\mathrm{d}v}{(2v-s)^{n-1}} \tag{8}$$

当 $n=2$ 时(8)式与(5)式相等，与两个投标人的期望支付相符. 当 $n>2$ 时，由(8)式可得 $s<h(b)\leqslant t$ 时该博弈问题的贝叶斯纳什均衡.

3）若 $t<h(b)<1$，则

$$u_i=(v-b)\left[\frac{s}{t-s+1}+\frac{2(t-s)}{t-s+1}+\frac{h^2(b)-2h(b)-t^2+2t}{(t-1)(t-s+1)}\right]^{n-1}$$

最优化一阶条件为：

$$-\left[\frac{s}{t-s+1}+\frac{2(t-s)}{t-s+1}+\frac{h^2(b)-2h(b)-t^2+2t}{(t-1)(t-s+1)}\right]^{n-1}+$$
$$(v-b)(n-1)\left[\frac{s}{t-s+1}+\frac{2(t-s)}{t-s+1}+\frac{h^2(b)-2h(b)-t^2+2t}{(t-1)(t-s+1)}\right]^{n-2}\frac{2h(b)h'(b)-2h'(b)}{(t-1)(t-s+1)}=0$$

注意到若 $b^*(.)$ 是投标人 i 的最优战略，则 $h(b)=v$，所以

$$-(v^2-2v-t^2+4t-s)^{n-1}+2(n-1)(v-b)(v^2-2v-t^2+4t-s)^{n-2}(v-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}b}=0$$

解上述微分方程得：

$$b^*=\frac{2(n-1)\int v(v-1)(v^2-2v+t^2-st+s)^{n-2}\mathrm{d}v}{(v^2-2v+t^2-st+s)^{n-1}} \tag{9}$$

当 $n=2$ 时(9)式与(6)式相等，与两个投标人的期望支付相符. 当 $n>2$ 时，由(9)式可得 $t<h(b)<1$ 时该博弈问题的贝叶斯纳什均衡.

3　均衡结果分析

下面我们对两种模型的均衡结果进行分析.

3.1　拍卖过程中只有两个投标人的均衡结果分析

考虑梯形分布和均匀分布两种情况下卖者的收益之差：用 $F(v)$ 表示梯形分布和均匀分布两种情况下卖者的收益之差.

(i) 当 $0<h(b)\leqslant s$ 时，

$$F_1(v)=\frac{2v}{3}-\frac{v}{2}=\frac{v}{6}>0 \qquad 0<v<s$$

(ii) 当 $s<h(b)\leqslant t$ 时，

$$F_1(v)=\frac{v^2}{2v-s}-\frac{v}{2}=\frac{vs}{4v-2s}>0 \qquad v<s<2v$$

(iii) 当 $t<h(b)<1$ 时，

$$F_1(v)=\frac{2v^3-3v^2}{3v^2-6v+3s-3st+3t^2}-\frac{v}{2} \qquad F'_1(v)>0$$

故

$$F_1(v)=\frac{2v^3-3v^2}{3v^2-6v+3s-3st+3t^2}-\frac{v}{2}>0 \qquad v>\sqrt{3s-3st+3t^2}$$

经过上述比较分析可得，在只有两人参与拍卖的情况下，采用梯形分布代替均匀分布来刻画拍卖物对投标人的价值，卖者能获得相对更高的收益.

3.2 拍卖过程有多个投标人参与时的均衡结果分析

(i) 当 $0<h(b)\leqslant s$ 时，

$$F_2(v)=\frac{2n-2}{2n-1}v-\frac{n-1}{n}v=\frac{(n-1)v}{n(2n-1)}>0 \qquad 0<v<s$$

(ii) 当 $s<h(b)\leqslant t$ 时，

$$F_2(v)=\frac{2(n-1)\int(2v-s)^{n-2}v\mathrm{d}v}{(2v-s)^{n-1}}-\frac{n-1}{n}v \qquad F'_2(v)>0$$

故

$$F_2(v)=\frac{2(n-1)\int(2v-s)^{n-2}v\mathrm{d}v}{(2v-s)^{n-1}}-\frac{n-1}{n}v>0$$

(iii) 当 $t<h(b)<1$ 时，

$$F_2(v)=\frac{2(n-1)\int v(v-1)(v^2-2v+t^2-st+s)^{n-2}\mathrm{d}v}{(v^2-2v+t^2-st+s)^{n-1}}-\frac{n-1}{n}v$$

$$F'_2(v)>0$$

故

$$F_2(v)=\frac{2(n-1)\int v(v-1)(v^2-2v+t^2-st+s)^{n-2}\mathrm{d}v}{(v^2-2v+t^2-st+s)^{n-1}}-\frac{n-1}{n}v>0$$

由上述比较可得，在多人参与拍卖的情况下，采用梯形分布代替均匀分布来刻画拍卖物对投标人的价值，卖者同样能获得相对更高的收益.

综上所述，当招标物品的价值服从梯形分布时，均衡结果与 s 及 t 的选取有关. 在梯形分布下，每个人的出价由 v 和参数 s,t 共同决定，这个出价高于经典一级密封价格拍卖模型的出价，更符合现实情况.

4 结束语

经典的一级密封价格拍卖模型中运用均匀分布来描述不完全信息下投标人的出价，可以相对容易得出均衡解，但是这一假设和现实情况不符，因此本文首次采用梯形分布来模拟正态分布，建立了基于梯形分布的一级密封价格拍卖模型，得到相应的均衡结果，并且将修正后的结果与经典模型的结果进行比较，得出了改进后的模型能够更准确地对拍卖结果进行预测，更好为现实服务的结论.

参考文献：

[1] 张维迎. 博弈论与信息经济学 [M]. 上海：上海人民出版社，2013.

[2] IVANOVA-STENZEL R，SALMON T C. The High/Low Divide：Self-Selection by Values in Auction Choice [J]. Games and Economic Behavior，2011，73(1)：200－214.

[3] 马国顺，冯 华. 基于三角形分布的一级密封竞价风险拍卖排污权的演化博弈分析 [J]. 商业时代，2013(6)：69－70.

[4] 马国顺，杨丽英，孙文文. 基于三角形分布的一级密封价格拍卖博弈及均衡分析 [J]. 工业技术经济，2010(2)：74－76.
[5] 胡建兵. 基于三角形分布的纵向产品差异化模型 [J]. 哈尔滨工程大学学报(自然科学版)，2008，29(4)：425－431.
[6] 陈德湖. 基于一级密封价格拍卖的排污权交易博弈模型 [J]. 工业工程，2006(5)：49－51.
[7] 吕　炜，任玉珑，季玉华. 基于一级密封的工程量清单投标报价的博弈模型 [J]. 管理工程学报，2007(1)：122－126.
[8] 王鹏生. 一级密封价格拍卖理论对高校后勤管理的启示 [J]. 山东轻工业学院学报(自然科学版)，2006，20(3)：82－84.
[9] 谢识予. 经济博弈论 [M]. 上海：复旦大学出版社，2002.
[10] 王高雄，周之铭，朱思铭，等. 常微分方程 [M]. 3 版. 北京：北京高等教育出版社，2004.

First-Price Sealed Auction Price Game and Equilibrium Analysis Based on Trapezoid Distribution

MA Guo-shun，　WANG　Ting
College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou Gansu 730070，China

Abstract：This paper improves the traditional first-price sealed-bid auction model and makes some comparisons between the models by using the idea of trapezoid distribution，which aims at overcoming the shortage of the traditional first-price sealed-bid auction model and combines the characteristics of the actual auction in life. The final results show that compared with the traditional model，the improved model can better reflect the real situation and hence has certain realistic directive significance.
Key words：trapezoid distribution；first-price sealed－bid auction；equilibrium analysis

责任编辑　张　枸