第 38 卷第 1 期　西南大学学报(自然科学版)　2016 年 1 月
Vol. 38 No. 1　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Jan. 2016

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.01.013

对数伽马分布的尾部性质[①]

杜玲玲，　陈守全

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究了对数伽马分布的 Mills 不等式及 Mills 比率，并在此基础上得到了对数伽马分布的尾部表示、服从该分布的独立随机变量序列最大值的极限分布、相应的规范常数和点点收敛速度.

关　键　词： 对数伽马分布；最大值；尾部特征；收敛速度

中图分类号： O211.4　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1673-9868(2016)01-0085-05

设 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 为独立同分布随机变量序列(简记为 i.i.d. 序列)，其共同分布函数为 $F(x)$. 若对非退化的分布函数 $G(x)$，存在常数 $a_n>0$，$b_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\leqslant a_nx+b_n)=G(x)\tag{1}$$

其中

$$M_n=\max\{X_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

则由文献[1] 知 $G(x)$ 只能是以下 3 种经典极值类型：

$$\Phi_\alpha(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \exp(-x^{-\alpha}) & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Psi_\alpha(x)=\begin{cases}\exp\left(-(-x)^{\alpha}\right) & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Lambda(x)=\exp\left(-\exp(-x)\right)$$

其中 $\alpha>0$. 若(1) 成立，则称 $F(x)$ 属于 G 吸引场，记为 $F\in D(G)$. a_n,b_n 称为规范常数.

由文献[1] 知，$F\in D(G)$ 由 $1-F$ 的特征决定. 因此，研究给定分布的尾部性质是有意义的. 如文献[2-3] 就分别研究了对数广义误差分布(logGED) 和对数偏正态分布(LSN) 的尾部特征. 本文研究对数伽马分布(LGD) 的尾部特征.

文献[4] 引入了伽马分布. 随机变量 X 服从参数为 $\alpha>0$，$\beta>0$ 的伽马分布，其概率密度函数为：

$$g(x;\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)\qquad x>0\tag{2}$$

本文在此基础上，引入对数伽马分布的密度函数.

定义 1　给定 ξ 为服从标准伽马分布的随机变量且 $\xi>0$，参数 $\alpha>0$，$\beta>0$. 若 $\eta=\exp(\xi)$，则称 η 服从参数为 α,β 的对数伽马分布，记作 $\eta\sim$ LGD.

由(2) 式和定义 1 易得 LGD 的密度函数：

---

① 收稿日期：2014-12-30
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071199，11171275).
作者简介：杜玲玲(1990-)，女，四川达州人，硕士研究生，主要从事极值理论的研究.
通信作者：陈守全，副教授，硕士研究生导师.

$$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{-\beta-1}(\log x)^{\alpha-1} \qquad x>1 \tag{3}$$

其中参数 $\alpha>0$，$\beta>0$. 本文在建立 LGD 的 Mills 不等式及 Mills 比率的基础上，推导出 $1-F(x)$ 的具体表达式，研究服从 LGD 的独立随机变量序列最大值的极限分布、相应的规范常数和收敛速度.

1 LGD 的 Mills 不等式及 Mills 比率

定理 1 设 $F(x)$ 为 LGD 的分布函数，则

(i) 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 或 $\alpha\geqslant 2$ 时，对 $x>\exp\left(\frac{((\alpha-1)(\alpha-2))^{\frac{1}{2}}}{\beta}\right)$，有

$$\frac{x}{\beta}\left(1+\frac{\alpha-1}{\beta}(\log x)^{-1}\right)<\frac{1-F(x)}{f(x)}<\frac{x}{\beta}\left(1+\frac{\alpha-1}{\beta}(\log x)^{-1}\right)\left(1-\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^{2}}(\log x)^{-2}\right)^{-1} \tag{4}$$

(ii) 当 $1<\alpha<2$ 时，对 $x>1$，有

$$\frac{x}{\beta}\left(1+\frac{\alpha-1}{\beta}(\log x)^{-1}\right)\left(1-\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^{2}}(\log x)^{-2}\right)^{-1}<\frac{1-F(x)}{f(x)}<\frac{x}{\beta}\left(1+\frac{\alpha-1}{\beta}(\log x)^{-1}\right) \tag{5}$$

证 当 $x>1$ 时，

$$\begin{aligned}1-F(x)=&\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}y^{-\beta-1}(\log y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y=\\&\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(\log x)^{\alpha-1}x^{-\beta}+\frac{(\alpha-1)\beta^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}(\log x)^{\alpha-2}x^{-\beta}+\\&\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha-2}\int_{x}^{\infty}y^{-\beta-1}(\log y)^{\alpha-3}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

即

$$1-F(x)=\frac{x}{\beta}f(x)+\frac{(\alpha-1)x}{\beta^{2}}(\log x)^{-1}f(x)+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^{2}}\int_{x}^{\infty}f(y)(\log y)^{-2}\mathrm{d}y$$

所以，当 $0<\alpha\leqslant 1$ 或 $\alpha\geqslant 2$ 时，

$$1-F(x)<\frac{x}{\beta}f(x)\left(1+\frac{(\alpha-1)}{\beta}(\log x)^{-1}\right)+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^{2}}(\log x)^{-2}\int_{x}^{\infty}f(y)\mathrm{d}y$$

且

$$1-F(x)>\frac{x}{\beta}f(x)\left(1+\frac{(\alpha-1)}{\beta}(\log x)^{-1}\right)$$

因此，当 $x>\exp\left(\frac{((\alpha-1)(\alpha-2))^{\frac{1}{2}}}{\beta}\right)$ 时，(4) 式成立.

同理，当 $1<\alpha<2$ 时，对 $x>1$，有

$$1-F(x)<\frac{x}{\beta}f(x)\left(1+\frac{(\alpha-1)}{\beta}(\log x)^{-1}\right)$$

且

$$1-F(x)>\frac{x}{\beta}f(x)\left(1+\frac{(\alpha-1)}{\beta}(\log x)^{-1}\right)+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^{2}}(\log x)^{-2}\int_{x}^{\infty}f(y)\mathrm{d}y$$

所以(5) 式成立. 定理 1 证毕.

应用定理 1 可得到 LGD 的 Mills 比率如下.

推论 1 由定理 1，当 $n\rightarrow\infty$ 时，有

$$\frac{1-F(x)}{f(x)}\sim\frac{x}{\beta} \tag{6}$$

运用推论 1 可得到 $1-F(x)$ 的具体表达式.

推论 2　对 $x>1$，有

$$1-F(x)=c(x)\exp\left(-\int_{e}^{x}\frac{\beta(t)}{t}\mathrm{d}t\right)$$

其中 x 充分大时，

$$c(x)\to\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\beta)\qquad \beta(t)\to\beta$$

证　由推论 1，对充分大的 x，有

$$\begin{aligned}1-F(x)=&\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x^{-\beta}(\log x)^{\alpha-1}(1+\theta_1(x))=\\&\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\beta)(1+\theta_1(x))\exp\left(-\int_{e}^{x}\frac{\beta}{t}\left(1+\frac{1-\alpha}{\beta\log t}\right)\mathrm{d}t\right)=\\&c(x)\exp\left(-\int_{e}^{x}\frac{\beta(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

其中当 $x\to\infty$ 时，$\theta_1(x)\to0$，且

$$c(x)=\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\beta)(1+\theta_1(x))\to\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\beta)$$

$$\beta(x)=\beta\left(1+\frac{1-\alpha}{\beta\log x}\right)\to\beta$$

推论 2 证毕.

2　极限分布

定理 2　设$\{X_n, n\geqslant1\}$为服从 LGD 的独立随机变量序列，令

$$M_n=\max\{X_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\leqslant\alpha_n x)=\exp(-x^{-\beta})$$

其中规范常数

$$\alpha_n=\left(\frac{n(\log n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

证　由推论 2 和文献[1]中命题 1.11 知，$F(x)\in D(\Phi_\beta(x))$，且 $F(x)$ 在 $x>1$ 上连续. 因此存在 $t_n>1$，使 $n(1-F(t_n))=1$. 由推论 1 知，当 $n\to\infty$ 时，$n\beta^{-1}f(t_n)t_n\to1$，即当 $n\to\infty$ 时，

$$n\frac{t_n^{-\beta}\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(\log t_n)^{\alpha-1}\to1$$

两边同时取对数，当 $n\to\infty$ 时，

$$\log n-\beta\log t_n+(\alpha-1)\log\beta-\log\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\log\log t_n\to0\tag{7}$$

从而

$$\frac{\beta\log t_n}{\log n}\to1$$

两边同时取对数，有

$$\log\log t_n=\log\log n-\log\beta+o(1)\tag{8}$$

将(8)式代入(7)式，得

$$\log t_n=\frac{1}{\beta}(\log n+(\alpha-1)\log\log n-\log\Gamma(\alpha))(1+o(1))$$

即

$$t_n=\left(\frac{n(\log n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{\beta}}(1+o(1))$$

令

$$\alpha_n=\left(\frac{n(\log n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

则

$$\frac{\alpha_n}{t_n}\to 1\qquad n\to\infty$$

由 Leadbetter 中的 Khintchine 定理，结论成立.

定理 2 证毕.

3　收敛速度

定理 3　设 $F(x)$ 为 LGD 的分布函数，$F(x)\in D(\Phi_\beta(x))$，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$F^n(\alpha_n x)-\Phi_\beta(x)\sim-\Phi_\beta(x)x^{-\beta}\frac{(\alpha-1)^2\log\log n}{\log n}\tag{9}$$

其中，由定理 2，规范常数 $\alpha_n=\left(\frac{n(\log n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

证　令

$$\nu_n=\alpha_n x\qquad\tau_n=n(1-F(\nu_n))$$

则

$$\nu_n^{-\beta}=n^{-1}(\log n)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)x^{-\beta}$$

且

$$\begin{aligned}\log\nu_n=&\frac{1}{\beta}(\log n+(\alpha-1)\log\log n-\log\Gamma(\alpha))+\log x=\\&\frac{\log n}{\beta}\left(1+\frac{\beta\log x}{\log n}+\frac{(\alpha-1)\log\log n-\log\Gamma(\alpha)}{\log n}\right)\end{aligned}$$

因此

$$(\log\nu_n)^{\alpha-1}=\beta^{1-\alpha}(\log n)^{\alpha-1}\left(1+\frac{(\alpha-1)^2\log\log n}{\log n}(1+o(1))\right)$$

运用(6)式，有

$$\begin{aligned}\tau_n=&n\frac{\nu_n}{\beta}f(\nu_n)(1+o(1))=\\&n\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\nu_n^{-\beta}(\log\nu_n)^{\alpha-1}(1+o(1))=\\&x^{-\beta}\left(1+\frac{(\alpha-1)^2\log\log n}{\log n}(1+o(1))\right)\end{aligned}$$

取 $\tau(x)=x^{-\beta}$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}\tau(x)-\tau_n(x)=&-x^{-\beta}\frac{(\alpha-1)^2\log\log n}{\log n}(1+o(1))\sim\\&-x^{-\beta}\frac{(\alpha-1)^2\log\log n}{\log n}\end{aligned}$$

因此，由文献[5]中的定理 2.4.2 知，(9)式成立.

定理 3 证毕.

参考文献：

[1] RESNICK S I. Extreme Values，Regular Variation and Point Processes [M]. New York：Springer，1987：46.

[2] LIAO Xin，PENG Zuo-xiang，NADARAJAH S. Tail Behavior and Limit Distribution of Maximum of Logarithmic General Error Distribution [J]. Communication in Statistics-Theory and Methods，2014，43(24)：5276－5289.

[3] LIAO Xin，PENG Zuo-xiang，NADARAJAH S. Tail Properties and Asymptotic Expansions for the Maximum of the Logarithmic Skew-Normal Distribution [J]. Journal of Applied Probability，2013，50(3)：900－907.

[4] STACY E W. A Generalization of the Gamma Distribution [J]. Annals of Mathematical Statistics，1962，33(3)：1187－1192.

[5] LEADBETTER M R，LINDGREN G，ROOTZEN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes [M]. New York：Springer，1982.

Tail Behavior of Logarithmic Gamma Distribution

DU Ling-ling，　CHEN Shou-quan

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the Mills inequality and Mills ratio of logarithmic gamma distribution (LGD) are derived，from which we obtain its tail representation，the asymptotic distribution of maximum of independent random variables with the given distribution and the normalizing constants，and we also establish the pointwise convergence rate of maximum of LGD.

Key words：logarithmic gamma distribution；maximum；tail behavior；convergence rate

责任编辑　张　枸