

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.01.015

# 变分不等式的解与非光滑向量 优化问题拟近似解的关系<sup>①</sup>

岳瑞雪, 陈荣波, 高英

重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331

**摘要:** 在一定的广义凸性条件下研究了变分不等式的解与非光滑向量优化问题的拟近似解之间的关系, 并在拟近似伪凸的条件下, 证明了向量优化问题的临界点和拟近似弱有效解与变分不等式的解之间的等价性.

**关键词:** 非光滑向量优化; 变分不等式; 拟近似伪凸

**中图分类号:** O221.6

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2016)01-0098-05

在向量优化问题中, 有效解是一个被广泛应用的概念. 但是, 由于在非紧的情况下, 有效解(弱有效解)往往不一定存在, 而近似解在很弱的情况下都可能存在(Ekelend 变分原理). 因此, 研究近似解不仅有理论价值而且有实际意义. 文献[1]首次提出了数值优化问题  $\epsilon$ -近似解的概念. 文献[2]在文献[1]的基础上, 介绍了一般多目标优化问题的  $\epsilon$ -有效解的概念, 并研究了  $\epsilon$ -有效解的一些性质. 文献[3]给出了多目标优化问题  $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -拟近似(弱, 真)有效解的概念. 关于近似解的理论研究有很多, 如最优性条件、对偶理论以及与向量变分不等式的关系<sup>[4-8]</sup>.

变分不等式问题是解决向量优化问题的一个有效工具. 近年来, 一些学者在研究向量优化问题时发现多目标优化问题的最优性条件可以通过变分不等式进行刻画<sup>[5-8]</sup>. 文献[6]研究了儿种向量变分不等式问题和非光滑向量优化问题的联系. 文献[7]研究了一个点是向量变分不等式问题近似解的充分和必要条件. 文献[8]研究了向量变分不等式的解和向量优化问题拟有效解的关系.

受文献[8]的启发, 本文在一定的广义凸性条件下研究了变分不等式的解与非光滑向量优化问题拟近似有效解的关系, 在拟近似伪凸的条件下, 证明了向量优化问题的临界点和拟近似弱有效解与弱变分不等式的解之间的等价性.

## 1 预备知识

设  $\mathbb{R}^n$  是  $n$  维欧几里得空间,  $\mathbb{R}_+^n$  是  $\mathbb{R}^n$  的非负象限.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示欧几里得内积,  $\| \cdot \|$  表示欧几里得范数,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  是非空闭凸集.

在本文中, 我们给出以下符号: 对任意的  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} x = y &\Leftrightarrow x_i = y_i & \forall i = 1, \dots, n \\ x > y &\Leftrightarrow x_i > y_i & \forall i = 1, \dots, n \\ x \geq y &\Leftrightarrow x_i \geq y_i & \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

① 收稿日期: 2014-12-11

基金项目: 国家自然科学基金(11201511); 重庆市教委项目(KJ1500309, KJ1400519); 重庆市科委项目(cstc2015jcyjA0483).

作者简介: 岳瑞雪(1990-), 女, 山东菏泽人, 硕士研究生, 主要从事向量优化研究.

通信作者: 高英, 博士, 副教授.

$$x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ 且 } x \neq y$$

**定义 1**<sup>[9]</sup> 函数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  称为在  $x \in X$  附近的 Lipschitz 函数, 如果存在一个正常数  $K$  和一个  $x$  的邻域  $N$ , 使得对于任意的  $y, z \in N$ , 有

$$|f(y) - f(z)| \leq K \|y - z\|$$

如果对于任意的  $x \in X$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  是在  $x$  附近的 Lipschitz 函数, 则称函数  $f$  是在  $X$  上的局部 Lipschitz 函数.

**定义 2**<sup>[9]</sup> 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  是在  $X$  上的局部 Lipschitz 函数.  $f$  在  $x \in X$  处沿方向  $v \in \mathbb{R}^n$  的 Clarke 广义方向导数记为  $f^\circ(x; v)$ , 定义为

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{y \rightarrow x, \lambda \downarrow 0} \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}$$

**定义 3**<sup>[9]</sup> 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  是在  $X$  上的局部 Lipschitz 函数.  $f$  在  $x \in X$  处的 Clarke 广义次微分记为  $\partial^c f(x)$ , 定义为

$$\partial^c f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in \mathbb{R}^n\}$$

这些定义和性质可以推广到局部 Lipschitz 的向量值函数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$ .  $f_i (i = 1, \dots, p)$  为  $f$  的分量.  $f$  在  $x \in X$  处的 Clarke 广义次微分为

$$\partial^c f(x) = \partial^c f_1(x) \times \partial^c f_2(x) \times \dots \times \partial^c f_p(x)$$

**定义 4**<sup>[10]</sup> 集合  $O \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$  为凸集, 如果

$$x + \lambda(y - x) \in X, \forall x, y \in X, \lambda \in [0, 1]$$

文献[8]给出了近似凸、严格近似凸和近似伪凸的定义. 为了研究变分不等式的解与向量优化问题的拟近似(弱)有效解的关系, 我们给出了拟近似凸、严格拟近似凸和拟近似伪凸的定义.

**定义 5** 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$  是在  $X$  上的局部 Lipschitz 函数.  $f$  称为是在  $y \in X$  处的拟近似凸函数, 如果对于任意的  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$f(x) \geq f(y) + \langle \xi, x - y \rangle - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}, \forall x \in B(y, \delta), \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

称  $f$  为  $X$  上的拟近似凸函数, 如果对于任意的  $y \in X$ ,  $f$  在  $y \in X$  处是拟近似凸函数.

**定义 6** 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$  是在  $X$  上的局部 Lipschitz 函数.  $f$  称为是在  $y \in X$  处的严格拟近似凸函数, 如果对于任意的  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$f(x) > f(y) + \langle \xi, x - y \rangle - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}, \forall x \in B(y, \delta), x \neq y, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

称  $f$  为  $X$  上的严格拟近似凸函数, 如果对于任意的  $y \in X$ ,  $f$  在  $y \in X$  处是严格拟近似凸函数.

**定义 7** 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$  是在  $X$  上的局部 Lipschitz 函数.  $f$  称为是在  $y \in X$  处的拟近似伪凸函数, 如果对于任意的  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $\forall x \in B(y, \delta)$

$$\langle \xi, x - y \rangle \geq 0, \exists \xi \in \partial^c f(y) \Rightarrow f(x) \geq f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}$$

或者

$$f(x) < f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha} \Rightarrow \langle \xi, x - y \rangle < 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

称  $f$  为  $X$  上的拟近似伪凸函数, 如果对于任意的  $y \in X$ ,  $f$  在  $y \in X$  处是拟近似伪凸函数.

我们考虑如下的非光滑向量优化问题

$$\begin{aligned} \text{(NVOP)} \quad \min f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ x &\in X \end{aligned}$$

其中:  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, p$  是  $X$  上的局部 Lipschitz 函数.

**定义 8**<sup>[3]</sup> 1) 称  $y \in X$  是(NVOP)的拟近似有效解, 如果存在  $\alpha \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p), \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 对于任意的  $x \in X$ , 下面不等式不成立

$$f(x) \leq f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}$$

2) 称  $y \in X$  是(NVOP)的拟近似弱有效解, 如果存在  $\alpha \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p), \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 对于任意的  $x \in X$ , 下面不等式不成立

$$f(x) < f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}$$

我们考虑如下的变分不等式问题<sup>[8]</sup>:

(VVIP) 寻找  $y \in X$ , 使得不存在  $x \in X$  满足

$$\langle \xi, x - y \rangle \leq 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

(WVIP) 寻找  $y \in X$ , 使得不存在  $x \in X$  满足

$$\langle \xi, x - y \rangle < 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

## 2 向量变分不等式问题与非光滑向量优化问题之间的联系

本文接下来在一定的广义凸性条件下研究了向量变分不等式的解与非光滑向量优化问题的拟近似(弱)有效解的关系, 并在拟近似伪凸的条件下, 证明了向量优化问题的临界点和拟近似弱有效解与变分不等式的解之间的等价性.

**定理 1** 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  在  $y \in X$  处是拟近似凸的. 若  $y$  是(VVIP)的解, 则  $y$  是(NVOP)的拟近似有效解.

**证** 若  $y$  不是(NVOP)的拟近似有效解, 则对于任意的  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ , 存在  $x \in X$ , 使得

$$f(x) \leq f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}$$

因为  $f$  在  $X$  上是拟近似凸的, 即对于任意的  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$f(x) \geq f(y) + \langle \xi, x - y \rangle - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}, \forall \xi \in \partial^c f(y), x \in B(y, \delta) \cap X$$

所以, 存在  $x \in X$  满足

$$\langle \xi, x - y \rangle \leq 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

这与  $y$  是(VVIP)的解矛盾, 所以  $y$  是(NVOP)的拟近似有效解.

**注 1** 定理 1 的逆命题不一定成立. 参见下面的例子.

**例 1** 我们考虑文献[8]中的(NVOP)问题,

$$\begin{aligned} \text{(NVOP)} \quad \min f(x) &= (f_1(x), f_2(x)) \\ x \in X &= [-2\pi, 2\pi] \end{aligned}$$

其中:  $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_1(x) = \begin{cases} -3x & x \leq 0 \\ -\sin x & x > 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ x^3 - x^2 & x > 0 \end{cases}$$

由文献[8]中的例 2.1 知, 对于任意的  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$  和

$$\delta = \min\left(\frac{\pi}{3}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 1.5\alpha_1}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 1.5\alpha_2}}{3}\right) > 0$$

$f$  在  $y=0$  处是近似凸函数. 由注 1,  $f$  在  $y=0$  处是拟近似凸函数. 易证  $y=0$  是(NVOP)的拟近似有效解, 但是  $y=0$  不是(VVIP)的解. 这是因为当  $x=1$  时

$$\langle \xi, x - y \rangle = (\langle \xi_1, x - y \rangle, \langle \xi_2, x - y \rangle) \leq (0, 0), \forall \xi_1 \in [-3, -1], \forall \xi_2 \in [-2, 0]$$

**定理 2**

1) 设  $y \in X$  是(NVOP)的拟近似弱有效解, 则  $y$  是(WVIP)的解.

2) 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  在  $y \in X$  处是拟近似凸的. 若  $y$  是(WVIP)的解, 则  $y$  是(NVOP)的拟近似弱有效解.

**证** 1) 因为  $y$  是(NVOP)的拟近似弱有效解,  $X$  是凸集, 所以存在  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ , 使得对于任意的  $x \in X$ , 下面不等式不成立

$$f(y + t(x - y)) - f(y) < -\alpha t \|x - y\| - \bar{\alpha}, 0 < t < 1 \quad (1)$$

(1) 式两边同时除以  $t$ , 然后让  $t \downarrow 0$  取极限得

$$f \circ (y, x - y) < 0$$

从而不存在  $x \in X$ , 使得

$$\langle \xi, x - y \rangle \leq f \circ (y, x - y) < 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

故  $y$  是(AWVVIP)的解.

2) 与定理 1 的证明类似.

**定理 3** 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$  在  $y \in X$  处是拟近似伪凸的. 若  $y$  是(WVVIP)的解, 则  $y$  是(NVOP)的拟近似弱有效解.

**证** 若  $y$  不是(NVOP)的拟近似弱有效解, 则对于任意的  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 存在  $x \in X$ , 使得

$$f(x) < f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}$$

因为  $f$  在  $y \in X$  处是拟近似伪凸的, 所以存在  $x \in X$ , 使得

$$\langle \xi, x - y \rangle < 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

这与  $y$  是(WVVIP)的解矛盾. 所以  $y$  是(NVOP)的拟近似弱有效解.

**定理 4** 设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$  在  $y \in X$  处是严格拟近似凸的. 若  $y$  是(NVOP)的拟近似弱有效解, 则  $y$  是(NVOP)的拟近似有效解.

**证** 若  $y$  不是(NVOP)的拟近似有效解, 则对于任意的  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 存在  $x \in X$ , 使得

$$f(x) \leq f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}$$

因为  $f$  在  $X$  上是严格拟近似凸的, 所以存在  $x \in X$ ,

$$\langle \xi, x - y \rangle < f(x) - f(y) + \alpha \|x - y\| + \bar{\alpha} \leq 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

从而  $y$  不是(WVVIP)的解. 又由定理 2,  $y \in X$  不是(NVOP)的拟近似弱有效解, 这与条件矛盾. 故  $y$  是(NVOP)的拟近似有效解.

**定义 9**<sup>[11]</sup> 称可行点  $y \in X$  是(NVOP)的临界点, 如果存在  $\lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda \geq 0$ , 使得

$$\lambda^T \xi = 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

**定理 5** (NVOP)的临界点是(NVOP)的拟近似弱有效解当且仅当  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$  在  $y \in X$  处是近似伪凸的.

**证** 先证充分性. 若  $y \in X$  是(NVOP)的临界点, 则存在  $\lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda \geq 0$ , 使得

$$\lambda^T \xi = 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

从而, 对于任意的  $x \in X$ ,

$$\langle \lambda^T \xi, x - y \rangle = 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

所以, 对于任意的  $x \in X$ ,

$$\langle \xi, x - y \rangle \leq 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

又因为  $f$  在  $y \in X$  处是拟近似伪凸的, 所以存在  $\alpha, \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 使得  $\forall x \in X$ , 有

$$f(x) \leq f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

故  $y$  是(NVOP)的拟近似弱有效解.

下面证明必要性. 设(NVOP)的临界点  $y$  是(NVOP)的拟近似弱有效解. 若  $y \in X$  是(NVOP)的临界点, 则存在  $\lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda \geq 0$ , 使得

$$\lambda^T \xi = 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

从而, 对于任意的  $x \in X$ ,

$$\langle \lambda^T \xi, x - y \rangle = 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

所以, 对于任意的  $x \in X$ ,

$$\langle \xi, x - y \rangle \leq 0, \forall \xi \in \partial^c f(y)$$

又因为  $y \in X$  是(NVOP)的拟近似弱有效解, 则存在  $\alpha \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p), \bar{\alpha} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ , 对于任意的  $x \in X$ ,

$$f(x) \leq f(y) - \alpha \|x - y\| - \bar{\alpha}$$

所以  $f$  在临界点  $y$  处是拟近似伪凸的.

**推论 1** 若  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  在  $y \in X$  处是拟近似伪凸的, 则 (NVOP) 的临界点、(NVOP) 的拟近似弱有效解和 (WVVIP) 的解是相互等价的.

**注 2** 若本文的定义 5–8 中的  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^q$ , 则本文的结论仍成立. 当  $\bar{\alpha} = \mathbf{0}$  时, 本文中的定理 2(1) 可以退化为文献[8]中的定理 3.2.

#### 参考文献:

- [1] KUTATELADZE S S. Convex -Programming [J]. Sov Math Dokl, 1979, 20: 390–393.
- [2] LORIDAN P.  $\epsilon$ -Solutions in Vector Minimization Problems [J]. J Optim Theory Appl, 1984, 43(2): 265–276.
- [3] BELDIMAN M, PANAITESCU E, DOGARU L. Approximate Quasi Efficient Solutions in Multiobjective Opti-Mization [J]. Bull Math Soc Math Roumanie Tome, 2008, 51(99): 109–121.
- [4] HAMEL A. An  $\epsilon$ -Lagrange Multiplier Rule for a Mathematical Programming Problem on Banach Spaces [J], Optimization, 2001, 49: 137–149.
- [5] MISHRA S K, WANG S Y. Vector Variational like Inequalities and Nonsmooth Vector Optimization Problems [J]. Nonlinear Anal, 2006, 64: 1939–1945.
- [6] LEE G M, LEE K B. Vector Variational Inequalities for Nondifferentiable Convex Vector Optimization Problems [J]. J Glob Optim, 2005, 32: 597–612.
- [7] YANG X Q, ZHENG X Y. Approximate Solutions and Optimality Conditions of Vector Variational Inequalities in Banach Spaces [J]. J Glob Optim, 2008, 40: 455–462.
- [8] MISHRA S K, UPADHYAY B B. Some Relations Between Vector Variational Inequality Problems and Nonsmooth Vector Optimization Problems Using Quasi Efficiency [J]. Positivity, 2013, 17: 1071–1083.
- [9] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis [M]. New York: Wiley-Interscience, 1983.
- [10] MANGASARIAN O L. Nonlinear Programming [M]. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [11] OSUNA-GOMEZ R, RUFIAN-LIZANA A, RUIZ-CANALES P. Invex Functions and Generalized Convexity in Multiobjective Programming [J]. J Optim Theory Appl, 1998, 98: 651–661.
- [12] 张 亮, 吴至友. 非凸变分不等式的四步投影算法及其收敛性分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(10): 109–113.

## Some Relations Between the Solutions of Vector Variational Inequality Problems and the Quasi-Approximate Efficient Solutions of Nonsmooth Vector Optimization Problems

YUE Rui-xue, CHEN Rong-bo, GAO Ying

*First Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*

**Abstract:** In this paper, we consider the relations between vector variational inequality problems and nonsmooth vector optimization problems under generalized convexity assumptions and, under quasi approximate convexity assumptions, identify the critical points of vector optimization problems and the equivalence between the weak quasi approximate efficient solutions and the solutions of variational inequalities.

**Key words:** nonsmooth vector optimization; variational inequality; quasi-approximate convexity

