DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.01.017

一类非线性二层多目标规划问题的主要目标法^①

吴 慧, 吕一兵

长江大学 信息与数学学院, 湖北 荆州 434023

摘要: 研究了一类非线性二层多目标规划问题的求解方法. 首先利用下层问题的 K-T 最优性条件, 将其转化为带互补约束的多目标优化问题, 其次将互补条件作为罚项, 构造相应的罚问题, 然后利用主要目标法求解该罚问题, 最后以相关实例给出了算法的具体实现过程. 计算结果表明所设计的主要目标法对该类二层多目标规划问题是可行的.

关键词: 非线性二层多目标规划; 最优性条件; 罚函数; 主要目标法

中图分类号: O221.1

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2016)01-0109-07

二层规划问题(简称 BLPP) 是上层规划受到嵌入式下层规划限制的一类多层次决策问题. 目前, 二层规划在实际问题中已经得到了广泛应用^[1]. 其数学模型可表示为

$$\begin{aligned} & \min_x F(x, y) \\ & \text{s. t. } G(x, y) \leq 0 \\ & \min_y f(x, y) \\ & \text{s. t. } g(x, y) \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为上层决策变量, $y \in \mathbb{R}^m$ 为下层决策变量. 在上述问题(1)中下层问题以上层决策变量为参数, 其最优解受到上层决策变量的影响^[2]. 另外, 在上述二层规划问题(1)中若上层目标函数 $F(x, y)$ 或者下层目标函数 $f(x, y)$ 含有多个目标, 此时称问题(1)为二层多目标规划问题^[3].

目前, 二层多目标规划问题已经逐步引起了国内外学者的重视. 针对上下两层都是多目标的一类二层多目标规划问题, 文献[4]通过将其转化为不同的多目标决策问题, 设计了一种交互式算法; 文献[5]首先通过线性加权法求出下层问题的最优解, 然后采用基于 NSGA-II 选择机制的多目标进化算法求解上层问题, 从而求解出此类问题的多个 Pareto- 近似最优解. 针对上层是单目标下层是多目标的一类二层多目标规划问题, 文献[6-9]先后提出了不同的罚函数方法. 但文献[6-7]所设计的罚函数方法均要求下层是线性多目标规划问题; 文献[8]中的罚函数方法只能求解出下层问题的弱有效解; 文献[9]中的算法涉及到两个不同的罚参数, 因此计算量较大. 针对上层是多目标下层是单目标的一类二层多目标规划问题, 文献[10]设计了光滑化算法, 但该方法只适用于下层是凸标量优化问题的二层规划模型.

本文将对一类非线性二层多目标规划问题设计主要目标求解方法. 本文给出了该类非线性二层多目标规划问题的数学模型以及相关定义与假设, 并将以下层问题的 K-T 最优性条件代替下层问题, 得到带互补约束的多目标规划问题, 然后结合罚函数方法和主要目标法, 构造求解相应多目标规划问题的主要目标法. 最后给出数值实验结果.

① 收稿日期: 2014-11-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201039).

作者简介: 吴 慧(1991-), 女, 湖北恩施人, 硕士研究生, 主要从事最优化理论与方法研究.

通信作者: 吕一兵, 副教授, 硕士研究生导师.

1 数学模型

考虑如下上层为多目标, 下层为单目标的一类非线性二层多目标规划问题

$$\begin{aligned} Q(1) \quad & \min_x F(x, y) \\ & \text{s. t. } G(x, y) \leq 0 \\ Q(2) \quad & \min_y f(x, y) \\ & \text{s. t. } g(x, y) \leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$ 分别为上、下层决策变量; $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $G: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^q$ 分别为上层目标函数及约束函数, 且均连续可微; $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^q$ 分别为下层目标函数及约束函数, 且均连续可微. $Q(1)$ 为上层问题, $Q(2)$ 为下层问题. 记 $Y(x) = \{y \in Y \mid g(x, y) \leq 0\}$ 为下层问题的可行集. $S = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, G(x, y) \leq 0, g(x, y) \leq 0\}$ 为问题(2)的约束域. $S(x) = \{x \in X \mid \exists y \in Y, G(x, y) \leq 0, g(x, y) \leq 0\}$ 为约束域 S 在上层决策空间的投影. 对于 $x \in S(x)$, $\bar{S} = \{y \in Y \mid y \in \arg \min[f(x, y): g(x, y) \leq 0]\}$ 称为 $Q(2)$ 的合理反映集. $IR = \{(x, y) \mid (x, y) \in S, y \in \bar{S}\}$ 为问题(2)的诱导域(可行解集). $I(x, y) = \{i \mid g_i(x, y) = 0\}$ 为函数 $g(x, y)$ 在点 (x, y) 处起约束作用的下标集.

定义 1 (x^*, y^*) 称为问题(2)的 Pareto- 最优解, 如果 $(x^*, y^*) \in IR$ 且不存在 $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in IR$, 使得 $F(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq F(x^*, y^*)$.

本文做如下假设:

(A1) S 为非空紧集, 且对 $\forall x \in X, Y(x) \neq \emptyset$, 存在一个紧子集 $Z \subset \mathbb{R}^m$, 使 $Y(x) \subset Z$.

(A2) 对固定的 $x \in S(x)$, 下层问题 $Q(2)$ 为凸规划问题, 且 $\nabla_y g_i(x, y)$, $i \in I(x, y)$ 线性无关.

2 主要结果

2.1 二层多目标规划转化为多目标规划

由假设(A2), 首先利用下层问题的最优性条件, 将问题(2)转化为如下带互补约束的多目标优化问题

$$\begin{aligned} & \min_{x, y, u} F(x, y) \\ & \text{s. t. } G(x, y) \leq 0 \\ & \nabla_y f(x, y) + \sum_{j=1}^q u_j \nabla_y g_j(x, y) = 0 \\ & \sum_{j=1}^q u_j g_j(x, y) = 0 \\ & g_j(x, y) \leq 0, j = 1, 2, \dots, q \\ & u_j \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$u \in \mathbb{R}^q$ 为相应的乘子. 关于原问题(2)的最优解与转化后的问题(3)的最优解, 可以得到如下结果.

定理 1 假设条件(A1)以及(A2)满足, 若 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是问题(2)在其邻域 $U(\bar{x}, \bar{y})$ 内的 Pareto- 最优解, 则一定存在对应的拉格朗日乘子 $\bar{u}$ 使得 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ 为问题(3)的 Pareto- 最优解, 反之若 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ 为问题(3)的 Pareto- 最优解, 则 $(\bar{x}, \bar{y})$ 也一定是问题(2)的 Pareto- 最优解.

证 1) 若 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是问题(2)在其邻域 $U(\bar{x}, \bar{y})$ 内的 Pareto- 最优解且 $\bar{y} \in \bar{S}$, 则存在对应的拉格朗日乘子 $\bar{u}$ 在点 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ 处满足下层问题的 K-T 最优性条件, 那么 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ 一定是问题(3)的可行点. 现假设 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ 不是问题(3)的 Pareto- 最优解, 则一定存在问题(3)的可行点 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u})$ 满足

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq F(\bar{x}, \bar{y}) \quad (4)$$

又由于上述可行点 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u})$ 中的 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 同样是问题(2)的可行点. 显然(4)式与 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是问题(2)的 Pareto- 最优解矛盾.

2) 若 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ 是问题(3)的 Pareto- 最优解, 则此时的 $(\bar{x}, \bar{y})$ 一定是问题(2)的 Pareto- 最优解, 现假设 $(\bar{x}, \bar{y})$ 不是问题(2)的 Pareto- 最优解, 那么一定存在可行点 $(\hat{x}, \hat{y})$ 满足

$$\mathbf{F}(\hat{x}, \hat{y}) \leq \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (5)$$

此时一定存在对应的拉格朗日乘子 $\hat{u}$ 使得 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u})$ 是问题(3)的 Pareto- 最优解, 这与 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ 是问题(3)的 Pareto- 最优解矛盾. 证毕.

2.2 多目标规划转化为单目标规划并求解

受文献[11-12]构造多目标规划问题罚函数方法的启发, 本文考虑将互补约束条件 $\sum_{j=1}^q u_j g_j(x, y) = 0$ 作为罚项, 构造多目标规划问题(3)的罚函数算法, 并证明其收敛性. 记

$$h(x, y, u) = \sum_{j=1}^q u_j g_j(x, y)$$

构造问题(3)的如下罚问题

$$\begin{aligned} \min_{x, y, u} \mathbf{F}(x, y, M) &= \mathbf{F}(x, y) - Mh(x, y, u)e \\ \text{s. t. } \mathbf{G}(x, y) &\leq 0 \\ \nabla_y \mathbf{f}(x, y) + \sum_{j=1}^q u_j \nabla_y g_j(x, y) &= 0 \\ g_j(x, y) &\leq 0, j = 1, 2, \dots, q \\ u_j &\geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中: M 为罚因子(一般取充分大的正数), $e \in \mathbb{R}^n$ 为元素全部为 1 的 N 维向量.

根据上文的分析与假设, 记问题(3)与问题(6)的约束域分别为 X', X_0 . 则 X' 与 X_0 之间满足 $X' = X_0 \cap \{(x, y, u) \mid h(x, y, u) = 0\}$. 现假设 X' 为非空紧集, 则 $X' \subseteq X_0$. 显然, 若存在点 $(x, y, u) \in X'$, 则点 (x, y, u) 一定满足 $h(x, y, u) = 0$. 下面将讨论本文所构造的罚函数的收敛性以及问题(6)与问题(3)的 Pareto- 最优解之间的关系.

定理 2 若 C' 为问题(3)的 pareto- 最优解集, C'_M 为问题(6)的 pareto- 最优解集, 则有

$$C' = \overline{\lim_{M \rightarrow \infty} C'_M} = \overline{\lim_{M \rightarrow \infty} C'_M} = \lim_{M \rightarrow \infty} C'_M$$

证 1) 首先证明当 $(x', y', u') \in \overline{\lim_{M \rightarrow \infty} C'_M}$ 时, $(x', y', u') \in C'$.

当 $(x', y', u') \in \overline{\lim_{M \rightarrow \infty} C'_M}$ 时, 由上极限的定义可得, 一定存在单调递增序列 $\{M_k\}$ 使得

$$(x', y', u') \in C'_{M_k} \quad k = 1, 2, \dots$$

即不存在点 $(x'', y'', u'') \in X_0$, 使得

$$\mathbf{F}(x'', y'') - M_k h(x'', y'', u'')e \leq \mathbf{F}(x', y') - M_k h(x', y', u')e \quad (7)$$

又因为 $X' \subseteq X_0$, 因此对 $\forall (x'', y'', u'') \in X'$ 有

$$\mathbf{F}(x'', y'') - M_k h(x'', y'', u'')e = \mathbf{F}(x'', y'') \geq \mathbf{F}(x', y') - M_k h(x', y', u')e \quad (8)$$

现假设 $(x', y', u') \notin X'$, 则当 k 充分大时, 一定存在点 $(x, y, u) \in X' \subseteq X_0$ 满足

$$\mathbf{F}(x, y) - M_k h(x, y, u)e \leq \mathbf{F}(x', y') - M_k h(x', y', u')e \quad (9)$$

这与 $(x', y', u') \in \overline{\lim_{M \rightarrow \infty} C'_M}$ 矛盾. 因此, 若 $(x', y', u') \in \overline{\lim_{M \rightarrow \infty} C'_M}$, 则有 $(x', y', u') \in X'$, 即 $h(x', y', u') = 0$, 结合(8)式可得, 对 $\forall (x'', y'', u'') \in X'$ 有

$$\mathbf{F}(x'', y'') \geq \mathbf{F}(x', y') \quad (10)$$

2) 再证当 $(x', y', u') \in C'$ 时, $(x', y', u') \in \overline{\lim_{M \rightarrow \infty} C'_M}$.

若 $(x', y', u') \in C'$, 由 Pareto- 最优解的定义可知此时一定不存在点 $(x'', y'', u'') \in X'$ 满足

$$\mathbf{F}(x'', y'') \leq \mathbf{F}(x', y') \quad (11)$$

记 $X'' = X_0 \setminus X'$, 即

$$X'' = \{(x, y, u) \mid (x, y, u) \in X_0, (x, y, u) \notin X'\}$$

当 $X'' \neq \emptyset$ 时, 则对任意一点 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \in X''$, 由于 $h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) < 0$ 故 $h(x', y', u') = 0$. 因此一定存在正整数 N , 当 $M > N$ 时, 不存在 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \in X''$ 使得

$$F(\bar{x}, \bar{y}) - Mh(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})e \leq F(x', y') - Mh(x', y', u')e \quad (12)$$

当 $X'' = \emptyset$ 时, 更不存在点 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \in X''$ 满足(12)式.

综上所述: 存在正整数 N , 当 $M > N$ 时, 不存在点 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \in X_0$ 使得

$$F(\bar{x}, \bar{y}) - Mh(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})e \leq F(x', y') - Mh(x', y', u')e \quad (13)$$

即存在正整数 N , 当 $M > N$ 时, $(x', y', u') \in C'_M$, 从而可得

$$(x', y', u') \in \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} C'_M$$

因为

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} C'_M \subseteq C' \subseteq \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} C'_M$$

且

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} C'_M \subseteq \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} C'_M$$

所以有

$$C' = \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} C'_M = \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} C'_M = \lim_{M \rightarrow \infty} C'_M$$

证毕.

引理 1 若序列 $\{(x'_M, y'_M, u'_M)\} \in C'_M, M=1, 2, \dots$, 则 $h(x'_M, y'_M, u'_M) \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$.

证 用反证法. 现假设存在 $\{(x'_M, y'_M, u'_M)\}$ 的某个子序列 $\{(x'_{M_k}, y'_{M_k}, u'_{M_k})\}$, 使得 $-h(x'_{M_k}, y'_{M_k}, u'_{M_k}) \geq \varepsilon$, 其中: $\varepsilon > 0, k=1, 2, \dots$. 又因为 $\{M_k\}$ 为单调递增序列, 所以当 $k \rightarrow \infty$ 时有 $-M_k h(x'_{M_k}, y'_{M_k}, u'_{M_k}) \rightarrow +\infty$, 因此总存在点 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) \in X' \subseteq X_0$, 当 k 足够大时, 满足:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\tilde{x}, \tilde{y}) - M_k h(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u})e \leq F(x'_{M_k}, y'_{M_k}) - M_k h(x'_{M_k}, y'_{M_k}, u'_{M_k})e \quad (14)$$

这与 (x'_M, y'_M, u'_M) 是问题(6)的 Pareto-最优解矛盾. 因此, 若 (x'_M, y'_M, u'_M) 是问题(6)的 Pareto-最优解, 则对 $\forall \varepsilon > 0$ 有 $0 < -h(x'_{M_k}, y'_{M_k}, u'_{M_k}) < \varepsilon$, 由迫敛性可知 $h(x'_M, y'_M, u'_M) \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$. 证毕.

定理 3 若 $(x'_M, y'_M, u'_M) \in C'_M, M=1, 2, \dots$, 则 (x'_M, y'_M, u'_M) 为问题(3)的近似 Pareto-最优解.

证 由 Pareto-最优解的定义可知: 若 (x'_M, y'_M, u'_M) 为多目标规划问题(6)的 pareto-最优解, 则对 $\forall (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \in X' \subseteq X_0$ 有

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) - Mh(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})e \geq F(x'_M, y'_M) - Mh(x'_M, y'_M, u'_M)e \quad (15)$$

又由引理 1 可知 $h(x'_M, y'_M, u'_M) \rightarrow 0$, 则对 $\forall (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \in X'$ 有

$$F(\bar{x}, \bar{y}) \geq F(x'_M, y'_M) \quad (16)$$

故问题(6)的 Pareto-最优解 (x'_M, y'_M, u'_M) 一定是问题(3)的近似 Pareto-最优解. 证毕.

下面讨论多目标规划问题(6)的求解方法. 多目标规划问题的主要求解方法有分量加权法、分量排序法、分量最优化方法和目的规划法等^[13]. 本文考虑运用分量最优化方法中的主要目标法进行求解. 主要目标法是指先将多个分量目标函数中的一个目标函数作为主要目标函数, 再确定其他目标函数的上限和下限并将其作为约束条件, 从而将多目标规划问题转化为单目标规划问题的一种求解方法^[14], 即

$$\begin{aligned} \min f_n(x) &\Leftrightarrow \min f_k(x) \\ \text{s. t. } \bar{f}_l &\leq f_l(x) \leq \bar{f}_l (l \neq k) \end{aligned} \quad (17)$$

对于问题(6), 假设第 N 个目标函数是决策者最关心的, 则可在问题(6)的可行域中先分别求出其它 $N-1$ 个目标函数的最小值, 即分别求解下列 $N-1$ 个单目标优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x, y, u} F_l(x, y, M) (l \neq N) \\ \text{s. t. } G(x, y) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_y f(x, y) + \sum_{j=1}^q u_j \nabla_y g_j(x, y) &= 0 \\ g_j(x, y) &\leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, q \\ u_j &\geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

将其最优解记为 ω_l , 并将此时的目标函数值记为 $F'_l(x, y)$, 令:

$$\overline{f}_l = F'_l(x, y) \quad \overline{f}_l = F'_l(x, y) + \eta_l (\eta_l > 0) \quad (19)$$

可得 $F'_l(x, y) \leq F_l(x, y) \leq F'_l(x, y) + \eta_l (l \neq N)$, 并将其作为约束条件, 即可将问题(6)转化为如下单目标优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{x, y, u} F_N(x, y, M) \\ \text{s. t. } F'_l(x, y) &\leq F_l(x, y) \leq F'_l(x, y) + \eta_l (l \neq N) \\ G(x, y) &\leq 0 \\ \nabla_y f(x, y) + \sum_{j=1}^q u_j \nabla_y g_j(x, y) &= 0 \\ g_j(x, y) &\leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, q \\ u_j &\geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

这样既能保证第 N 个目标函数取得理想值, 又能在一定程度上照顾其它 $N-1$ 个目标函数, 且对目标函数和约束域的凸性没有要求^[15]. 由文献[14]中的定理 1 可知问题(20)的最优解一定是问题(6)的 Pareto-有效解. 具体求解步骤如下:

步骤 1 令 $\epsilon > 0$, 置 $k = 0, l = 1$. 选择初始点 (x_l^0, y_l^0, u_l^0) , 并选择序列 $\{M_k\}$, 其中: $M_k = cM_{k-1} (c > 0), M_k \rightarrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$;

步骤 2 以 (x_l^0, y_l^0, u_l^0) 为初始点, 求解单目标优化问题(18), 得到最优解 (x_l^k, y_l^k, u_l^k) ;

步骤 3 若 $|Mh(x_l^k, y_l^k, u_l^k)| \leq \epsilon$, 则记 $\omega_l = (x_l^k, y_l^k)$ 为问题(18)的最优解, 记此时的目标函数值为 $F'_l(x, y)$, 并令 $l = l + 1$, 当 $l \leq N - 1$ 时, 转到步骤 2, 当 $l = N$ 时, 转到步骤 4; 反之, 则令 $k = k + 1$, 转到步骤 2;

步骤 4 将前 $N - 1$ 个目标函数的最小值 $F'_l(x, y)$ 代入(20)式, 并根据具体问题确定 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{N-1}\}$ 的值;

步骤 5 令 $\epsilon > 0$ 为停机精度, 置 $k = 0$, 与步骤 1 类似确定初始点 (x^0, y^0, u^0) 和序列 $\{M_k\}$;

步骤 6 以 (x^0, y^0, u^0) 为初始点, 求解单目标优化问题(20), 得到最优解 (x^k, y^k, u^k) ;

步骤 7 若 $|Mh(x^k, y^k, u^k)| \leq \epsilon$, 则记 $w = (x^k, y^k, u^k)$ 为问题(20)的最优解, 记此时的目标函数值为 $F'_N(x, y)$; 反之, 则令 $k = k + 1$, 转到步骤 6.

3 数值实验

为了检验上述算法的可行性, 考虑如下算例^[1]:

$$\begin{aligned} \min_x F(x, y) &= \left(\frac{5}{3}x^2, \frac{5}{2}(y-10)^2 \right) \\ \text{s. t. } -x + y &\leq 0 \\ 0 &\leq x \leq 15 \\ \min_y f(x, y) &= 0.077(x+2y-30)^2 + 0.923(x+0.5y)^2 \\ \text{s. t. } 0 &\leq y \leq 15 \end{aligned} \quad (21)$$

首先利用下层问题的最优性条件, 同时取相应的互补约束为罚项, 构造如下多目标优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x, y, u} F(x, y, M) &= \left(\frac{5}{3}x^2, \frac{5}{2}(y-10)^2 - M(-u_1y + u_2(y-15)) \right) e \\ \text{s. t. } 0.308(x+2y-30) &+ 0.923y - u_1 + u_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -x + y &\leq 0 \\
 0 &\leq x \leq 15 \\
 0 &\leq y \leq 15 \\
 u_1, u_2 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

然后用主要目标法求解. 在本算例中假设 $F_1(x, y, M)$ 为主要目标函数, 则先求解以 $F_2(x, y, M)$ 为目标函数的单目标优化问题

$$\begin{aligned}
 \min_{x, y, u} F_2(x, y, M) &= \frac{5}{2}(y - 10)^2 - M(-u_1 y + u_2(y - 15)) \\
 \text{s. t. } 0.308(x + 2y - 30) + 0.923y - u_1 + u_2 &= 0 \\
 -x + y &\leq 0 \\
 0 &\leq x \leq 15 \\
 0 &\leq y \leq 15 \\
 u_1, u_2 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{23}$$

取 $\varepsilon = 0.01$, $M_0 = 10$, $c = 2$, 计算可得当 $(x, y, u_1, u_2) = (5.002\ 708, 5.002\ 708, 0, 0)$ 时, $F_2(x, y, M)_{\min} = F'_2(x, y) = 62.432\ 31$. 最后取 $\eta = 1$, 将 $F'_2(x, y) \leq F_2(x, y) \leq F'_2(x, y) + \eta$ 作为约束条件求解如下单目标优化问题

$$\begin{aligned}
 \min_{x, y, u} F_1(x, y, M) &= \frac{5}{3}x^2 - M(-u_1 y + u_2(y - 15)) \\
 \text{s. t. } 62.432\ 31 &\leq \frac{5}{2}(y - 10)^2 \leq 63.432\ 31 \\
 0.308(x + 2y - 30) + 0.923y - u_1 + u_2 &= 0 \\
 -x + y &\leq 0 \\
 0 &\leq x \leq 15 \\
 0 &\leq y \leq 15 \\
 u_1, u_2 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{24}$$

计算可得最优解为 $(x', y', u'_1, u'_2) = (5.002\ 704, 5.002\ 704, 0, 0)$, 此时 $F_1(x, y, M)$ 取得最小值为 41.711 75. 根据上文的分析, 若 (x', y', u'_1, u'_2) 为问题(22)的最优解, 则 (x', y') 一定是算例 1 的近似 Pareto-最优解. 当 $(x', y') = (5.002\ 704, 5.002\ 704)$ 时, 目标函数值为 $F(x', y') = (41.711\ 45, 62.432\ 52)$. 文献[1]用模拟退火算法求得算例 1 的 Pareto-最优解为: $(x'', y'') = (4.995\ 3, 5.001\ 1)$, 此时 $F(x'', y'') = (41.588\ 38, 62.472\ 52)$, 比较两种算法的结果可得本文所提出的主要目标法是有效可行的.

4 小 结

本文结合 K-T 最优性条件、罚函数法以及主要目标法, 针对下层是凸单目标规划的一类非线性二层多目标规划设计了一种新的算法. 数值实验表明该算法是有效可行的. 值得指出的是, 本文所设计的算法还可以推广到下层是凸多目标规划的情形, 此时采用线性加权法将下层问题转化为单目标优化问题之后, 也可用本文所给出的方法及步骤求解.

参考文献:

- [1] 藤春贤, 李智慧. 二层规划的理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2002: 103-131.
- [2] 吕一兵, 万仲平, 胡铁松, 等. 关于线性二层规划分支定界方法的探讨 [J]. 运筹与管理, 2006, 15(5): 24-28.
- [3] EICHFELDER G. Multiobjective Bilevel Optimization [J]. Mathematical Programming, 2010, 123(2): 419-449.
- [4] SHI X P, XIA H S. Interactive Bilevel Multi-Objective Decision Making [J]. Journal of Operations Research Society, 1997, 48(9): 943-949.
- [5] 林丹, 丑英哲, 李敏强. 求解多目标二层规划的多目标进化算法 [J]. 系统工程学报, 2007, 22(2): 181-184, 214.

- [6] 杨亚红, 刘三阳. 二层多目标规划的一类精确罚函数法 [J]. 应用数学, 2001, 14(1): 76–80.
- [7] ANKHILI Z, MANSOURI A. An Exact Penalty on Bilevel Programs with Linear Vector Optimization Lower Level [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 197(1): 36–41.
- [8] BONNEL H, MORGAN J. Semivectorial Bilevel Optimization Problem Penalty Approach [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2006, 131(3): 365–382.
- [9] ZHENG Y, WAN Z P. A Solution Method for Semivectorial Bilevel Programming Problem via Penalty Method [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2011, 37(1/2): 207–219.
- [10] 吕一兵, 万仲平. 下层为凸标量优化的二层多目标规划问题的光滑化方法 [J]. 系统科学与数学, 2014, 34(5): 513–520.
- [11] 张 峰. 多目标规划的障碍函数问题 [J]. 高校应用数学学报: A 辑, 1990, 5(2): 178–187.
- [12] 霍水泉, 李人厚. 多目标规划的惩罚函数法 [J]. 西安交通大学学报, 1993, 27(3): 75–80, 90.
- [13] 林铨云, 董加礼. 多目标优化的方法与理论 [M]. 长春: 吉林教育出版社, 1992: 55–107.
- [14] 胡毓达. 多目标最优化方法 [J]. 上海交通大学学报, 1981(3): 137–147.
- [15] 王荣波, 张庆祥, 冯 强. 一类非光滑多目标半无限规划的最优性条件 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2008, 30(3): 1–5.

The Main Target Method for Solving a Class of Nonlinear Bilevel Multi-Objective Programming Problems

WU Hui, LÜ Yi-bing

School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou Hubei 434023, China

Abstract: In this paper, we study the method for solving a class of nonlinear bilevel multi-objective programming problems. First, the original problem is transformed into a multi-objective programming problem with complementary constraint by replacing the lower level problem with its Kuhn-Tucker optimality condition. Then, the complementary condition is appended to the objectives of the upper level as a penalty term, and a corresponding penalized problem is obtained. After that, the penalized problem is solved with the main target method. Finally, the specific implementation process of the algorithm is given through a numerical example. The numerical result shows that the proposed main target method is feasible for solving such nonlinear bilevel multi-objective programming problems.

Key words: nonlinear bilevel multi-objective programming; optimality condition; penalty function; main target method

责任编辑 张 枸