第 38 卷第 1 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2016 年 1 月
Vol. 38　No. 1　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jan.　2016

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.01.018

玻色爱因斯坦凝聚中对暗孤子的 KdV 方程描述①

加羊杰

青海师范大学 民族师范学院数学系，西宁 810008

摘要：以平均场理论为基础，结合玻色-爱因斯坦凝聚的性质，通过两模近似，对超流气体在 unitarity 区域和 BEC 区域的限制条件下，研究了波色超流气体中的一维孤立波脉冲. 运用约化摄动法得到了电子声孤波的 KdV 方程，从而得到一孤波解. 发现孤立子的传播振幅和宽度与参量 c_0，c_1，γ，γ_0，γ_1，以及散射长度 a 有关.

关 键 词：孤立子；玻色-爱因斯坦凝聚；孤波方程；非线性波

中图分类号：O411.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)01-0116-05

近年来，激光冷却技术的发展使得玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensation BEC)[1] 得以实现，此后人们在实验和理论上对它进行了很多有意义的研究[2]. 其中，孤波在 BEC 中的研究是一个有趣的问题，自 1834 年起，就受到人们的广泛关注[3]. 在 BEC 实验和理论研究中，研究者对孤波产生了极大的兴趣，并围绕孤子这一主题作了大量工作. 通过费什巴赫共振技术实现了玻色-超流气体重要的转变，成为许多现实物理体系模拟的良好的平台[4]. 定义无量纲相互作用参数 $y=1/(k_F a)$，其中 $k_F=(3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}$ 是玻色子 s 波散射长度，它可以区分不同的超流区域[5]，分别为：$y<-1$ 是 BCS 区域，$y>1$ 是 BEC 区域，$-1<y<1$ 是 BEC 和 BCS 交叉区域；当 $y=-\infty$ 时，系统处于 BCS 或 $y=+\infty$ 时系统处于 BEC；$y=0$ 处称为幺正极限，此时对应于粒子间的散射长度发散. 在实际操作中，一个单一的物理量，s 波的散射长度就足以给出系统的精确描述. 近来关于碱金属蒸气中 BEC 的实验成果更加激发了人们理论研究玻色气体的兴趣[6]. 在过去的几十年里，无论是对最初实验观测的解释还是对新现象的预言，人们都已经做了大量客观的研究工作. 在谐振子势存在的条件下，相互作用玻色气体的多体理论引出了许多不可预测的特性. 这将在多学科的基础上开拓一个新的理论研究方向[7]. 凝聚体波函数的平均场方法为近似描述与 BEC 有关的现象提供了简单的数学模型. 值得一提的是该模型能够产生超流系统典型的激发特性，像集体激发的传播和波函数相位导致的干涉效应等. 这个理论适合描述零温下稀薄气体中的两体相互作用效应，并且可以用来探索热效应. 目前的主要理论文章都是将平均场理论运用到 BEC 体系而得到的[8].

本文主要将通过非线性薛定谔方程研究超流玻色气体的动力学行为得出超流玻色气体在 BCS,BEC 和幺正区的极限情况下的 KdV 孤立波，并得出在 BEC 和幺正区的极限情况下孤波的传播速度[9]，以及振幅和孤波宽度与极小弱作用参数的依赖关系.

1　动力学方程

玻色气体在低温下时间和密度的相关函数满足以下动力学方程

① 收稿日期：2014-10-26
基金项目：国家自然科学基金(11061026).
作者简介：加羊杰(1978-)，男，青海西宁人，副教授，主要从事数学物理的研究.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U+\mu(n,a)+G\mid\Psi\mid^2\right]\Psi \tag{1}$$

其中：Ψ 是玻色子的序参量，μ 是化学势，U 是外势，m 是原子质量，a 是散射长度，n 是离子数密度，G 是玻色子相互作用的耦合系数，化学势 $\mu(n,a)=c_0n^{\gamma_0}(1+c_1n^{\gamma_1})$，这里 c_0，c_1 和 γ_0，γ_1 都是常量，$n=|\Psi|^2$，$\int\mathrm{d}r\mid\Psi\mid^2=N$ 表示玻色子的原子数，这里的 $G=\frac{4\pi\hbar^2a_s}{m}$ 是相互作用的常数，a_s 是原子间 s 波散射长度(具有排斥相互作用的系统 $a_s>0$)，m 为原子质量. 假设粒子被限制在具有盘状势 $U=\frac{1}{2}m[\omega_\perp^2(x^2+y^2)+\omega_z^2z^2]$ 的阱中，由于盘状势的 $\omega_z\ll\omega_\perp$ 非常小，可以被忽略. 这里 $\omega_\perp$ 代表 x 轴或 y 轴的横向频率，ω_z 为 z 方向的势阱频率. 对于在超流条件下的玻色凝聚气体沿轴向(x 方向)的初始波函数 Ψ 可表示为 $\Psi=\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{i\phi}$，可获得一组耦合方程 n 和 ϕ.

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\hbar}{m}\nabla\cdot(n,\nabla\phi)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\hbar}{2m}\left[(\nabla\phi)^2-\frac{1}{\sqrt{n}}\nabla^2\sqrt{n}\right]+\frac{1}{\hbar}[U+\mu(n,a)]+Gn=0 \tag{3}$$

为了方便变量无量纲化，规定 $(x,y,z)=a_\perp(x',y',z')$，$t=\omega_\perp^{-1}t'$，$n=n_0n'$，$a_\perp=\left[\frac{\hbar}{m\omega_\perp}\right]^{\frac{1}{2}}$，$n_0=N/a_\perp^3$，$\mu=\hbar\omega_\perp\mu'$，将这些变量代入方程(2)和(3)中，得到：

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\nabla\phi)=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[(\nabla\phi)^2-\frac{1}{\sqrt{n}}\nabla^2\sqrt{n}\right]+\frac{1}{2}\left[(x^2+y^2)+\left(\frac{\omega_z}{\omega_\perp}\right)^2z^2\right]+\mu+Gn=0 \tag{5}$$

其中 $\int\mathrm{d}r\,n=1$ 因为在实验中 $\omega_z/\omega_\perp$ 是很小的，忽略方程(5)的左边的第3项. 令 $\sqrt{n}=F$，假设 $F=A(z,t)G(x,y)$，$\phi=-\xi t+\varphi(z,t)$，其中 $G(x,y)$ 满足

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G+\frac{1}{2}(x^2+y^2)G=\nu G \tag{6}$$

这个方程是量子力学中二维谐振动的能量本征值问题. 其基态解是

$$G_0(x,y)=\exp[-(x^2+y^2)/2]$$

且本征值 $\nu=\nu_0=1$. 将它代入方程(4)和(5)可得：

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{2}A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0 \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A}{\partial y^2}\right)+\left(-\xi+\frac{1}{2}\right)A+A\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\right\}+\frac{c_0}{\sqrt{\gamma_0+1}}A^{2\gamma_0+1}+$$

$$\frac{c_0c_1}{\sqrt{\gamma_0+\gamma_1+1}}A^{2\gamma_0+2\gamma_1+1}+\pi G A^3=0 \tag{8}$$

为了得到方程(8)，令方程(6)中的 $G(x,y)=G_0(x,y)$，在方程(5)的两边乘 G_0^* 且对 x，y 从 $-\infty\sim+\infty$ 积分. 这个方程与考虑系统为准一维情况是等同的.

令

$$A=u_0+a(z,t)(u_0>0)$$

和

$$(a,\varphi)=(a_0,\varphi_0)\exp[i(kz-\omega t)]+c.c.$$

其中 u_0，a_0 和 φ_0 为常数，获得方程(7)和方程(8)的线性散射关系：

$$\omega=\pm\frac{1}{2}k\sqrt{2c_0c_1u^{2\gamma_0+2\gamma_1}+\pi Gu_0^3+\frac{1}{2}k^2} \tag{9}$$

其中"+"，"—"分别表示波向右或左传播的方向. 方程(9)是 Bogoliubov 类型的线性激发谱. 从方程(9)可以获得系统的声速为：

$$c=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\Big|_{k=0}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2c_0c_1u^{2\gamma_0+2\gamma_1}+\pi Gu_0^3}\tag{10}$$

当系统均匀($V_{\mathrm{ext}}(r)=0$)时，相应的声音速度被标记为 c_{ini}，而且 c/c_{ini} 的值取决于参数 c_0, c_1, γ_0 和 γ_1，这不同于 BECs 区.

现在来看看非线性激发系统. 用约化摄动法，对小的但有限振幅的长波扰动，独立变量被展开为 $\xi=\varepsilon(z-ct)$ 和 $\tau=\varepsilon^3 t$，其中 ε 无穷小量. 非独立变量被展开为：

$$A=u_0+\varepsilon^2(a_0+\varepsilon^2a_1+\cdots)\tag{11}$$

$$\varphi=\varepsilon(\varphi_0+\varepsilon^2\varphi_1+\cdots)\tag{12}$$

将 $\xi=\varepsilon(z-ct)$，$\tau=\varepsilon^3 t$，以及方程(11)与方程(12)代入方程(7)，并比较 ε 各阶量的大小，由方程(7)的 ε^0, ε^2, ε^4 可得：

$$c\frac{\partial a_0}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\xi^2}=\alpha_j\tag{13}$$

$$c_0c_1u_0^{2\gamma_0+2\gamma_1}a_j-cu_0\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\xi^2}+\pi Gu_0a_j=\beta_j\tag{14}$$

由方程(13)知，$j=0,1,\cdots$ 和 $\beta_j=2c\int\alpha_j\mathrm{d}\xi$，当($j=0$)时，得到 $\varphi_0=(2c/u_0)\int\mathrm{d}\xi a_0$，这里 φ_0 是 a_0 的积分，而 a_0 是 a 的函数，而 a_0 满足下面的 KdV 方程：

$$\frac{\partial a_0}{\partial\tau}-\frac{1}{8c}\frac{\partial^3a_0}{\partial\xi^3}+\left(\frac{3c}{2u_0}+6\pi Gu_0\right)a_0\frac{\partial a_0}{\partial\xi}=0\tag{15}$$

令 $\omega=\varepsilon^2 a_0$，并且应用 ξ，τ 的定义，则可得到：

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}-\frac{1}{8c}\frac{\partial^3\omega}{\partial Z^3}+\left(\frac{3c}{2u_0}+6\pi Gu_0\right)\omega\frac{\partial\omega}{\partial Z}=0\tag{16}$$

令 $Z=z-ct$，其单孤子解为：

$$\omega=(6\pi G-\sqrt[5]{8})B\,\mathrm{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{\sqrt[5]{8}Bc^2+6\pi Gu_0}{u_0}}\left[z-c\left(1-\frac{B}{\sqrt[5]{4}u_0+6\pi Gu_0}\right)t-z_0\right]\right\}\tag{17}$$

其中：B 是反映激发的正常数，z_0 是标记孤子初始位置的常数. 这样可以得到

$$\Psi=u_0\left[1-(6\pi G-\sqrt[5]{8})\widetilde{B}\,\mathrm{sech}^2\left\{\sqrt{\sqrt[5]{8}\widetilde{B}c^2+6\pi G}\left[z-c\left(1-\frac{\widetilde{B}}{\sqrt[5]{4}+6\pi G}\right)t-z_0\right]\right\}\right]\exp[i(-\rho t+\varphi)]\tag{18}$$

其中

$$B=\frac{B}{u_0}\qquad\rho=1+c_0u_0^{2\gamma_0}$$

和

$$\varphi=-2(\sqrt[5]{8}\widetilde{B})^{\frac{1}{2}}\tanh\left\{\sqrt{\sqrt[5]{8}c^2\widetilde{B}+6\pi G}\left[z-c\left(1-\frac{\widetilde{B}}{\sqrt[5]{4}+6\pi G}\right)t-z_0\right]\right\}$$

至此，得到了 KdV 方程(15)和相应的超流玻色气体的暗孤子解(18). 在玻色爱因斯坦凝聚态下根据非线性薛定谔方程，通过比较研究发现我们的结果可以适用于不同的区域. 可以得到暗孤子的波速、波宽和振幅，它们分别为：

$$V=c\left(1-\frac{\widetilde{B}}{\sqrt[5]{4}+6\pi G}\right)\tag{19}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt[n]{8}c^2\widetilde{B} + 6\pi G}} \tag{20}$$

$$A = (6\pi G - \sqrt[5]{8})\widetilde{B} \tag{21}$$

其中：$\widetilde{B} = \frac{B}{u_0}$ 与 u_0 有关的常量，u_0 满足 $1 - 2\widetilde{B} > 0$，B 表明了系统的灰度，c 与方程(10) 给出，它比孤立子的速度大，这个结果在理论与实验室上一致的. 而且灰度越大，孤立子的传播速度越小，这个结果与文献[10] 是一致的. 从方程(19) 和(20) 得到，孤立子的传播速度和宽度决定于参数 c,c_0,c_1,γ,γ_0 和 γ_1.

$c_0 = 6.84$ $\quad c_1 = 31.76$ $\quad \gamma_0 = 1$ $\quad \gamma_1 = 1/2$ $\quad u_0 = 1$ $\quad \gamma = 1$ $\quad c = 10.64$

2 结果与讨论

首先，在 BEC 极限情况下，取 $c_0 = d_0 y^{-1}$，$c_1 = d_1 y^{-5/2}$，$\gamma_0 = 1$，$\gamma_1 = 1/2$. 取 $d_0 = 3.65$，$d_1 = 18.88$，$u_0 > 0$，$\widetilde{B} = \frac{1}{3}$，在不同的 u_0 取值下，从孤波的宽度、波速与作用参数 y 的关系可以看出，当 y 增大时，孤波宽度增大，而随着 u_0 增大，孤波宽度减小. 这样就可知道，当散射长度或者超流玻色气体的密度增大时，孤波的宽度减小. 另一方面，当 y 增大时，孤波波速减小，而随着 u_0 增大，孤波宽度增大. 这样，当散射长度或者超流玻色气体的密度增大时，孤波的传播速度就会增大. 还有，在 BEC 和 BCS 交叉区的 BEC 情况下 $c_0 = d'_0$，$c_1 = d'_1 y$，$\gamma_0 = 2/3$，$\gamma_1 = -\frac{1}{3}$. 取 $d'_0 = 1.40$，$d'_1 = 6.43$，$u_0 > 0$，$\widetilde{B} = \frac{1}{3}$ 随着超流玻色气体的散射长度的增大，孤波的宽度增大，但是，随着气体密度增大，波宽也增大. 当 y 和 u_0 都增大时，波速增大，可见，超流玻色气体的散射长度和密度越大，波速越小. 同时，在 BEC 区，y 值越大，波宽也越大.

3 结　论

本文以平均场理论为基础，结合玻色-爱因斯坦凝聚的性质，通过两模近似，从玻色子间相互作用的化学势和 s 波散射长度出发[11]，研究了 Bose 气体在 unitaeity 区域和 BEC 区域所满足的动力学方程，运用约化摄动法推导得出 KdV 方程，从而得到一孤子解. 讨论了从 BCS 区过渡到 unitarity 区相图的变化规律，发现耦合系数与散射长度是影响 unitarity 区相图的主要因素. 在考虑 s 波散射波长 $a > 0$ 时，凝聚体中原子间的相互作用是相互排斥的，观察到的是暗孤子. 孤立子的传播速度和宽度决定于参数 c,c_0,c_1,γ,γ_0 和 γ_1. 波速 c 和阻尼系数 γ 对孤波的稳定性影响极大，即当阻尼系数 $\gamma > 0$ 时，波幅和波速减小，而波宽增大. 当阻尼系数 $\gamma < 0$ 时，波幅和波速增大，而波宽减小. 本文给出的 Bose 气体在 BEC 端的相关结论和已有的 BEC 结论完全符合.

参考文献:

[1] DUTTON Z, BUDDE M , SLOWE C, et al. Observation of Quantum Shock Waves Created with Ultra-Compressed Slow Light Pulses in a Bose-Einstein Condensate [J]. Science, 2001, 293(5530): 663-668.

[2] NAGY D, DOMOKOS P, VUKICS A, et al. Nonlinear Quantum Dynamics of Two BEC Modes Dispersively Coupled by an Optical Cavity [J]. The European Physical Journal D. 2009, 55(3): 659-668.

[3] LIU Jie, ZHANG Chuan-wei, MARK G R, et al. Transition to Instability in a Periodically Kicked Bose-Einstein Condensate on a Ring [J]. Phys Rev A, 2009(73): 013601-1-013601-10.

[4] ANCILOTTO F, SALASNICH L, TOIGO F. DC Josephson Effect with Fermi Gases in the Bose-Einstein Regime [J]. Phys Rev A, 2009, 79(3): 033627-1-033627-8.

[5] ADHIKARI S K, LUCA S. Superfluid Bose-Fermi Mixture from Weak Coupling to Unitarity [J]. Phys Rev A, 2008, 78(4): 043616-1-043616-10.

[6] DAS K K. Bose-Fermi Mixtures in One Dimension [J]. Phys Rev Lett, 2003, 90(17): 170403-1-170403-5.

[7] DALFOVO F, GIORGINI S, PITAEVSKII L P, et al. Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gases [J]. Rev Mod Phys, 1998, 71(3): 463－512.

[8] SALASNICH L, ADHIKARI S K, TOIGO F. Self-Bound Droplet of Bose and Fermi Atoms in One Dimension: Collective Properties in Mean-Field and Tonks-Girardeau Regimes [J]. Phys Rev A, 2007, 75(2): 441－445.

[9] HUANG Guoxiang, VALERI A M, MANUEL G V. Two-Dimensional Solitons in Bose-Einstein Condensates with a Disk-Shaped Trap [J]. Phys Rev A, 2003, 67(2): 023604－1－023604－12.

[10] DENG L, HAGLEY E W, WEN J, et al. Four-Wave Mixing with Matter Waves [J]. Letters to Nature, 1999, 398(6724): 218－220.

[11] 焦合华. 一类极大极小分式规划的最优性和对偶 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(9): 75－80.

KdV Description of Dark Solitons in Bose-Einstein Condensation (BEC)

JIA Yang-Jie

Department of Mathematics, Nationalities College of Qinghai Normal University, Xining 810008, China

Abstract: A one-dimensional solitary wave pulse in the superfluid Bose gas under the limiting conditions of unitarity region and BEC region is studied, based on the mean-field theory in combination with the property of Bose-Einstein condensation and through the two-mode approximation. By using the reductive perturbation method, a (KdV) equation for the nonlinear electron-acoustic solitary waves is derived, from which a solitary wave solution is obtained. It is found that the amplitude and width of the solitary waves depend on the parameters $c, c_0, c_1, \gamma, \gamma_0$ and γ_1 and on the scattering length a.

Key words: Solitons; Bose-Einstein condensation (BEC); solitary wave equation; nonlinear wave

责任编辑　潘春燕