DOI：10. 13718/j. cnki. xdzk. 2016. 02. 007

# 用状态空间图刻画单群 $A_5$ ①

王孝敏，　周　伟

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

**摘要：**对有限群的状态空间图进行研究，并证明了单群 $A_5$ 可由它的一个状态空间图所刻画.

**关　键　词：**交错群；自同态；状态空间图

**中图分类号：**O152. 1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1673－9868(2016)02－0044－03

有限群为群论中非常重要的部分，其结构与性质被广泛应用于许多相关学科. 但由于这类研究的抽象性，需要引入其它工具来帮助我们理解某些群的结果. 自然地，图论就是一个非常恰当的工具. 文献[1]用 $A_5$ 的数量刻画构造了自同构为 $A_5$ 的图. 文献[2]研究了李型单群的一种特征标次数图. 显然图论的引入使得这些抽象的理论有了形象的描述. 本文主要研究有限群的状态空间图.

首先我们给出有限群 $G$ 关于一个自同态 $\alpha$ 的状态空间图 $\Gamma_{G,\alpha}$ 的定义[3]. 令图 $\Gamma_{G,\alpha}$ 的顶点集为群 $G$，对点集中的元素 $x$，$y$，可以确定一条由 $x$ 指向 $y$ 的边当且仅当 $\alpha(x)=y$.

注意到自同态 $\alpha$ 对于有限群 $G$ 的状态空间图有着巨大的影响. 例如取群 $G$ 为一 $k$ 阶群，令 $\alpha$ 为群 $G$ 的零同态，即：对任意的 $g\in G$，$\alpha: g\longmapsto 1$. 我们得到一个状态空间图 $\Delta_k$（如图 1 所示）：

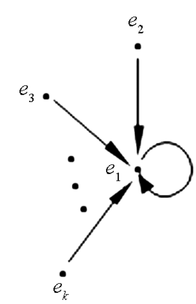


**图 1　状态空间图 $\Delta_k$**

对于任意阶为 $k$ 的群 $X$，若取 $f$ 为 $X$ 的零同态，则 $\Gamma_{X,f}\cong\Delta_k$. 因此只有对自同态 $\alpha$ 进行一定的限制，才可能由状态空间图确定群的结构. 本文主要研究交错群 $A_5$ 的一个状态空间图 $\Gamma_{A_5,\alpha}$，其中自同态 $\alpha$ 为 $A_5$ 的 5 阶自同构.

**引理 1**　群 $G$ 的一个自同态 $\alpha$ 为自同构的充要条件是图 $\Gamma_{G,\alpha}$ 不含有子图 $\Delta_k(k\geqslant 2)$.

**证**　考虑 $\ker\alpha$ 在自同态 $\alpha$ 之下的状态空间图. 注意到当 $|\ker\alpha|=k$ 时，这个图就是 $\Delta_k$. 显然，$\alpha$ 为自同构的充要条件是 $k=1$，即 $\alpha$ 为自同构的充要条件是图 $\Gamma_{G,\alpha}$ 不含有子图 $\Delta_k(k\geqslant 2)$.

记 $\mathrm{Fix}(G,\alpha)$ 为自同态 $\alpha$ 的固定点集，即

$$\mathrm{Fix}(G,\alpha)=\{x\in G \mid \alpha(x)=x\}$$

**引理 2**　$\mathrm{Fix}(G,\alpha)\leqslant G$.

**证**　由于 $\alpha(1)=1$，故 $\mathrm{Fix}(G,\alpha)$ 非空. 任取 $\mathrm{Fix}(G,\alpha)$ 的元素 $x$，$y$，有

$$\alpha(xy^{-1})=\alpha(x)\cdot\alpha(y^{-1})=xy^{-1}$$

故 $\mathrm{Fix}(G,\alpha)$ 是 $G$ 的子群.

本文主要研究单群 $A_5$ 的状态空间图. 交错群 $A_5$ 是阶最小的单群，群论研究者已对其进行了许多刻画[1,4]. 首先给出 $\alpha$ 为 $A_5$ 的一个 5 阶自同构所得到的状态空间图 $\Gamma_{A_5,\alpha}$. 由于 $\mathrm{Aut}(A_5)=S_5$，因此我们只需

---

① 收稿日期：2015－04－02
基金项目：国家自然科学基金项目(11271301).
作者简介：王孝敏(1990－)，男，山东莱芜人，硕士研究生，主要从事群论的研究.

研究 $\alpha$ 为(12345) 所诱导的内自同构的情况. 从而得到对应的图 $\Gamma_{A_5,\alpha}$(如图 2 所示):

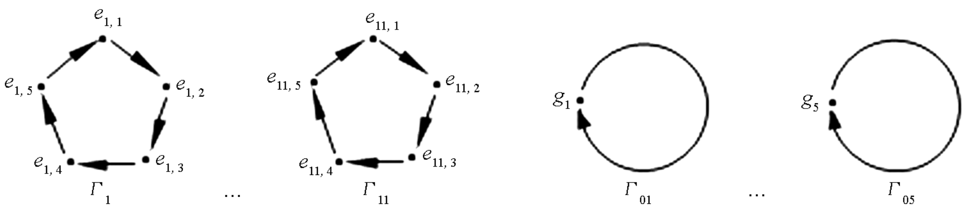


**图 2 状态空间图 $\Gamma_{A_5,\alpha}$**

显然, $\Gamma_{G,\alpha}$ 的连通分支[5] 为 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{11},\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{05}$. 对于连通分支 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{11}$, 每个连通分支有 5 个顶点, 形状为五边形; 对于连通分支 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{05}$, 每个连通分支有 1 个顶点. 而且 $\mathrm{Fix}(G, \alpha)$ 由连通分支 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{05}$ 的顶点集构成.

下面我们得到本文的主要定理:

**定理 1** 若 $\Gamma_{G,f} \cong \Gamma_{A_5,\alpha}$, 则 $G \cong A_5$.

**证** 由状态空间图同构可知, $|G|=|A_5|=60$. 注意到图 $\Gamma_{G,f}$ 不含有子图 $\Delta_k (k \geqslant 2)$, 由引理 1 可知 $f$ 为自同构. 因为自同构不改变元素的阶, 可知状态空间图的每个连通分支的顶点的阶都相等. 因此在连通分支 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{11}$ 中, 令顶点的阶为 $r$ 的分支个数 $k_r$, 则这些连通分支所提供的 $r$ 阶元的个数为 $5 \cdot k_r$.

由引理 2 可知 $\mathrm{Fix}(G, \alpha) \leqslant G$, 从而 $\mathrm{Fix}(G, \alpha)$ 为 5 阶子群. 不妨设生成元为 $f_5$. 令 $f_1$ 为单位元, 从而我们找到 4 个 5 阶元. 为证明定理 1 需先证明 $G$ 为单群.

若 $G$ 非单群, 则 $G$ 存在非平凡的真正规子群 $N$. 于是 $|N| \in \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\}$.

若 $|N|=2$, 由图象可知, 在 $f$ 作用下不动的点除单位元外全为 5 阶元, 故 $N$ 在 $f$ 作用下变为另外一个群, 设为 $B$. 则 $N \times B$ 为 $G$ 的 4 阶正规子群, 则 $G$ 的 Sylow 2 -子群只有 1 个. 即 $G$ 中 4 阶元只有 2 个, 矛盾.

若 $|N|=4$, 则 $G$ 的 Sylow 2 -子群只有 1 个, 则 $G$ 中 4 阶元只有 2 个, 矛盾. 同样地可考虑 $|N|=3$ 时 $G$ 的 Sylow 3 -子群的个数, 可得出相同的矛盾.

若 $|N|=5$, 则 $N$ 为 $G$ 的正规 Sylow 5 -子群. 考虑 $G$ 中 Sylow 3 -子群的个数 $n_3$. 由 3 阶元成对出现可得, 群 $G$ 中 3 阶元的个数为 $2n_3$, 则 $2n_3=5k_3$. 结合 Sylow 定理可知 $n_3=10$. 设 $G$ 的 Sylow 3 -子群为 $Q$, 则 $NQ$ 为 $G$ 的子群, 且 $|NQ|=15$. 而 15 阶的群同构于 15 阶交换群, 故 $|N_G(Q)| \geqslant 15$, 可得 $n_3 \leqslant 4$, 与 $n_3=10$ 矛盾.

若 $|N|=12$, 则 $N$ 中 Sylow 3 -子群的个数为 1 或 4. 若 $N$ 中 Sylow 3 -子群的个数为 1, 设为 $M$, 则 $M$ 为 $N$ 的特征子群, 则 $M$ 为 $G$ 的正规 3 阶子群, 矛盾; 若 $N$ 中 Sylow 3 -子群的个数为 4, 则 $N$ 中 3 阶元的个数为 8, 且 $N$ 中含有 $G$ 中所有 3 阶元, 矛盾.

若 $|N|=20$, 则 $N$ 中 Sylow 5 -子群只有 1 个, 与上面相同讨论可推出矛盾. 同样地讨论 $|N|=10$ 时 $N$ 中 Sylow 5 -子群的个数, $|N|=6$ 时 $N$ 中 Sylow 3 -子群的个数, $|N|=15$ 时 $N$ 中 Sylow 5 -子群的个数, 可得出矛盾.

若 $|N|=30$, 则 $N$ 中 Sylow 5 -子群的个数为 1 或 6. 若 $N$ 中 Sylow 5 -子群只有 1 个, 与上面相同讨论可推出矛盾. 若 $N$ 中 Sylow 5 -子群的个数为 6, 则 $N$ 中 5 阶元有 24 个, 而此时 $N$ 中 3 阶元的个数小于 5. 且 $N$ 中含有 $G$ 中所有 3 阶元, 矛盾.

综上所述, 群 $G$ 中不存在平凡的正规子群, 故群 $G$ 为单群.

为了证明 $G \cong A_5$, 只需要说明群 $G$ 中存在指数为 5 的子群.

由 $G$ 为单群可知 $n_5 = 6$. 因此群 $G$ 中 5 阶元有 24 个, 故 5 阶元所占连通分支除 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{05}$ 外的个数为 4. 考虑群 $G$ 中的 3 阶元, 可得 $2n_3 = 5k_3$, 由此可知 $G$ 中的 3 阶元所占连通分支的个数为 4. 则群 $G$ 中 $k(k \neq 3,5)$ 阶元所占的连通分支个数至多为 3.

若 $G$ 中存在 $l$ 阶元, 其中 $l$ 可能为 10,12,15,20,30, 则 $k_l \geqslant 4$, 矛盾.

若 $G$ 中存在 6 阶元, 则 $k_6=2$. 则由图像可知, $G$ 中有 5 个 2 阶元, 且 $G$ 中无 4 阶元. 令 $P_1, P_2, P_3$ 为

$G$ 的所有 Sylow 2-子群. 若 $P_i \cap P_j = 1$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$)，则 $G$ 中 2 阶元的个数超过 5 个，矛盾. 因此不妨设 $P_1 \cap P_2 = \langle a \rangle$，则可令

$$P_1 = \langle a \rangle \times \langle a_1 \rangle \qquad P_2 = \langle a \rangle \times \langle a_2 \rangle$$

则 $P_1 \cup P_2$ 产生 5 个 2 阶元，且

$$P_1 \cup P_2 = \{1, a, a_1, a_2, aa_1, aa_2\}$$

若 $P_3 \not\subseteq P_1 \cup P_2$，则 $G$ 中 2 阶元的个数超过 5 个，故 $P_3 \subseteq P_1 \cup P_2$. 若 $P_3$ 中含有 $a$，则以 $a$ 为生成元的循环群为 $G$ 的极大正规 2 子群，与 $G$ 为单群矛盾. 故 $a$ 不属于 $P_3$，则 $a_1, a_2, aa_1, aa_2$ 中必有 3 个属于 $P_3$. 若 $a_1, a_2 \in P_3$，则可推出 $a \in P_3$，产生矛盾. 故 $a_1, a_2 \notin P_3, aa_1, aa_2 \in P_3$. 若 $a_1 \in P_3$，则 $a \in P_3$，产生矛盾. 若 $a_2 \in P_3$，则 $a \in P_3$，产生矛盾. 故 $G$ 中无 6 阶元.

若 $G$ 中有 4 阶元，可得 $2n_2 = 5k_4$，$k_4 = 2$，$n_2 = 5$，因此 $G$ 中存在指数为 5 的子群. 若 $G$ 中无 4 阶元，则设 $M_1, M_2$ 为 $G$ 中不同的 Sylow 2-子群，且 $M_1$ 与 $M_2$ 的交集为由 $d$ 生成的循环群. 则

$$C_G(\langle d \rangle) \geqslant \langle M_1, M_2 \rangle$$

故

$$|C_G(\langle d \rangle)| \geqslant 6$$

故存在 $l \in C_G(\langle d \rangle)$，且 $|l| = 3, 5$. 故 $|dl| = 6, 10$，由前面的讨论可知矛盾. 故 $M_1 \cap M_2 = 1$，设 $G$ 中 Sylow 2-群的个数为 $n_2$，则 $3n_2 = 5 \cdot 3$，故 $n_2 = 5$. 故 $G$ 中存在指数为 5 的子群.

设 $H \leqslant G$，$|G : H| = 5$，则有 $G/H_G$ 同构于对称群 $S_5$ 的子群，而由群 $G$ 为单群可知 $H_G = 1$，从而 $G$ 同构于对称群 $S_5$ 的子群，于是有 $G \cong A_5$.

**注**　众所周知，60 阶单群为 $A_5$[6]. 本文定理 1 的证明部分主要说明状态空间图可以帮助我们理解群的有关信息，故在此处进行了详细说明.

**参考文献：**

[1] 张建生，施武杰. 用 $A_5$ 的数量刻划构造自同构为 $A_5$ 的图 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1991，16(4)：399－402.

[2] 梁登峰，李士恒，施武杰. 李型单群的一种特征标次数图 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2011，36(1)：26－30.

[3] LAUBENBACHER R，PAREIGIS B. Equivalence Relations on Finite Dynamical Systems [J]. Advances in Applied Mathematics，2001，26(3)：237－254.

[4] 高彦伟，曹洪平. 交错群 $A_n$($5 \leqslant n \leqslant 15$)的一个新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(2)：68－71.

[5] 王朝瑞. 图论 [M]. 北京：北京理工大学出版社，2001.

[6] 徐明耀. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，2001.

# Characterizing the Simple Group $A_5$ with the State-Space Graph

WANG Xiao-min，　ZHOU　Wei

*School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China*

**Abstract**：In this paper we study the state-space graph of a finite group，and prove that $A_5$，the simple group of degree 5，can be characterized by its state-space graph.

**Key words**：alternating group；automorphism；state-space graph

责任编辑　廖　坤