DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.02.008

# 交错群 $A_5$，$A_6$，$A_7$ 的新刻画①

李　月，　曹洪平

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

**摘要**：证明了交错群 $A_5$，$A_6$，$A_7$ 可由其阶和元素的同阶类类数共同刻画. 当给定了群的阶和同阶类类数时，通过判断元素的阶之集中所含合数的个数给出了群的素图结构，进而得到群的结构.

**关　键　词**：有限群；交错群；同阶类类数；单群

**中图分类号**：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)02-0047-04

在有限群中，群的阶和群的元素的阶对群的结构有很大影响. 文献[1]证明了奇数阶群是可解群. 文献[2]研究了质元群的结构，并给出了交错群 $A_5$ 的一个新刻画. 文献[3]证明了元的阶之集中素数个数与合数个数的关系，并给出了群为单群的一个充分条件. 本文继续对群的阶及群的元素的阶进行讨论，利用群的阶及群的元素的同阶类类数对交错群 $A_5$，$A_6$，$A_7$ 进行刻画.

设 $G$ 为有限群，$|G|$ 为 $G$ 的阶，$\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的素因子之集，$\pi_e(G)$ 表示 $G$ 的元的阶之集. $\eta(G)$ 表示 $G$ 的元素的同阶类类数，即 $\pi_e(G)$ 所含元的个数. 我们用 $\Gamma(G)$ 表示群 $G$ 的素图，用 $t(G)$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支个数. $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{t(G)}$ 为 $\Gamma(G)$ 的连通分支. 若 $2\in\pi(G)$，我们总假设 $2\in\pi_1$. 其它符号都是标准的，可参看文献[4].

**引理 1**[5]　设 $G$ 是有限群，$G$ 的素图不连通，则 $G$ 有如下 3 种结构：

(i) Frobenius 群；

(ii) 2-Frobenius 群；

(iii) $G$ 有一正规群列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，其中 $K/H$ 是非交换单群，$H$ 和 $G/K$ 是 $\pi_1$-群.

**引理 2**[2]　设 $G$ 是有限群，则 $G\cong A_5$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\{1,2,3,5\}$.

**引理 3**[6]　设 $G$ 是偶阶 2-Frobenius 群，即 $G=ABC$，其中 $A\trianglelefteq G$，$AB\trianglelefteq G$，$AB$ 是以 $A$ 为核 $B$ 为补的 Frobenius 群，$BC$ 是以 $B$ 为核 $C$ 为补的 Frobenius 群. 则：

$$t(G)=2 \qquad \pi(A)\cup\pi(C)=\pi_1 \qquad \pi(B)=\pi_2$$

且 $G$ 是可解的.

**定理 1**　设 $G$ 为群，则 $G\cong A_5$ 当且仅当：

(i) $|G|=|A_5|$；

(ii) $\eta(G)=\eta(A_5)$.

**证**　当 $G\cong A_5$ 时，显然有：

$$|G|=|A_5| \qquad \eta(G)=\eta(A_5)$$

反之，若 $|G|=|A_5|=60=2^2\cdot 3\cdot 5$，则

$$\pi(G)=\{2,3,5\}$$

从而

① 收稿日期：2015-04-10

基金项目：国家自然科学基金项目(11271301，11171364).

作者简介：李　月(1990-)，女，山东济南人，硕士研究生，主要从事群论的研究.

通信作者：曹洪平，副教授.

$$\pi_e(G) \supseteq \{1, 2, 3, 5\}$$

又因 $\eta(G)=\eta(A_5)=4$，所以 $\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 5\}$. 由引理2知 $G \cong A_5$.

**定理2** 设 $G$ 为群，则 $G \cong A_6$ 当且仅当：

(i) $|G|=|A_6|$；

(ii) $\eta(G)=\eta(A_6)$.

**证** 当 $G \cong A_6$ 时，显然有：

$$|G|=|A_6| \qquad \eta(G)=\eta(A_6)$$

反之，若 $|G|=|A_6|=360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$，则

$$\pi_e(G) \supseteq \{1, 2, 3, 5\}$$

又因

$$\eta(G)=\eta(A_6)=5$$

所以 $\pi_e(G)$ 中只含一个合数，从而 $t(G) \geqslant 2$.

假设 $G$ 是以 $A$ 为核 $B$ 为补的 Frobenius 群. 则由 Frobenius 群的性质有：

$$(|A|, |B|)=1 \qquad |B| \,\Big|\, (|A|-1)$$

这与 $|G|=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 矛盾. 所以 $G$ 不是 Frobenius 群.

假设 $G$ 是2-Frobenius群，则由引理3知 $G$ 是可解群. 于是 $G$ 中有 $3^2 \cdot 5$ 阶子群. 由于 $3^2 \cdot 5$ 阶群是交换群，所以 $15 \in \pi_e(G)$，从而

$$\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 5, 15\}$$

由引理3有：

$$G=ABC \qquad |B|=3^2 \cdot 5 \qquad |A| \cdot |C|=2^3$$

这与 $AB$ 为 Frobenius 群矛盾. 所以 $G$ 不是2-Frobenius 群.

由引理1，$G$ 有正规群列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 $K/H$ 是非交换单群，$H$ 和 $G/K$ 是 $\pi_1$-群. 由文献[4]以及 $|K/H| \,\Big|\, |G|$ 知 $K/H \cong A_5$ 或 $K/H \cong A_6$.

若 $K/H \cong A_5$，则

$$|H| \cdot |G/K|=2 \cdot 3$$

由于 $H$ 和 $G/K$ 均为 $\pi_1$-群，所以 $2, 3 \in \pi_1$. 又因 $t(G) \geqslant 2$，$\pi(G)=\{2, 3, 5\}$，所以：

$$\pi_1=\{2, 3\} \qquad \pi_2=\{5\}$$

从而 $|H|=1$ 或 $|H|=6$. 当 $|H|=1$ 时，由于 $t(G) \geqslant 2$，所以 $C_G(K)=1$，于是 $G \lesssim \mathrm{Aut}(K)$，这与 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \nmid 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 矛盾；当 $|H|=6$ 时，设 $P_5$ 为 $G$ 的5-Sylow子群，因为 $P_5$ 无不动点地作用在 $H$ 上，所以 $HP_5$ 是以 $H$ 为核 $P_5$ 为补的Frobenius群. 从而 $H$ 是幂零群. 由于 $H$ 幂零，所以 $H$ 的3-Sylow 子群 $P_3$ char $H \trianglelefteq G$，从而 $P_5$ 无不动点地作用在 $P_3$ 上. 因此 $P_3P_5$ 是以 $P_3$ 为核 $P_5$ 为补的 Frobenius 群. 由 Frobenius 群的性质得 $5 \,\Big|\, (3-1)$，矛盾.

若 $K/H \cong A_6$，则 $H=1$，$K=G$，从而 $G \cong A_6$.

**定理3** 设 $G$ 为群，则 $G \cong A_7$ 当且仅当：

(i) $|G|=|A_7|$；

(ii) $\eta(G)=\eta(A_7)$.

**证** 当 $G \cong A_7$ 时，显然有：

$$|G|=|A_7| \qquad \eta(G)=\eta(A_7)$$

反之，若 $|G|=|A_7|=2\,520=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$，则

$$\pi_e(G) \supseteq \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

又因

$$\eta(G)=\eta(A_7)=7$$

所以 $\pi_e(G)$ 中恰含2个合数，从而

$$t(G) \geqslant 2$$

假设 $G$ 是以 $A$ 为核 $B$ 为补的 Frobenius 群. 则由 Frobenius 群的性质有：

$$(|A|,|B|)=1 \qquad |B| \mid (|A|-1)$$

由于

$$|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$$

所以：

$$|B|=3^2 \qquad |A|=2^3\cdot 5\cdot 7$$

因 $A$ 是幂零的，所以 $10,14,35\in\pi_e(G)$，从而 $\pi_e(G)$ 中至少含有 3 个合数，这与 $\pi_e(G)$ 中只有 2 个合数矛盾. 所以 $G$ 不是 Frobenius 群.

假设 $G$ 是 2-Frobenius 群，则由引理 3 知 $G$ 是可解群，于是 $G$ 中有 $3^2\cdot 5$，$5\cdot 7$ 阶子群，但 $3^2\cdot 5$，$5\cdot 7$ 阶群是交换群，所以 $15,35\in\pi_e(G)$，从而

$$\pi_e(G)=\{1,2,3,5,7,15,35\}$$

由引理 3 有：

$$G=ABC \qquad |B|=3^2\cdot 5\cdot 7 \qquad |A|\cdot|C|=2^3$$

这与 $AB$ 是以 $A$ 为核的 Frobenius 群矛盾. 所以 $G$ 不是 2-Frobenius 群.

由引理 1，$G$ 有正规群列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 $K/H$ 是非交换单群，$H$ 和 $G/K$ 是 $\pi_1$-群. 由文献[4]以及 $|K/H| \mid |G|$ 知

$$K/H\cong A_5,\ L_2(7),A_6,L_2(8),A_7$$

若 $K/H\cong A_5$，则

$$|H|\cdot|G/K|=2\cdot 3\cdot 7$$

由于 $H$ 和 $G/K$ 均为 $\pi_1$-群，所以 $2,3,7\in\pi_1$. 又因 $t(G)\geqslant 2$，

$$\pi(G)=\{2,3,5,7\}$$

所以：

$$\pi_1=\{2,3,7\} \qquad \pi_2=\{5\}$$

从而

$$C_{G/H}(K/H)=1$$

于是有

$$G/H\lesssim \mathrm{Aut}(K/H)$$

故

$$|G/H| \mid |\mathrm{Aut}(K/H)|$$

所以 $7\in\pi(H)$. 因为 $\pi_2=\{5\}$，所以 $G$ 的 5-Sylow 子群 $P_5$ 无不动点地作用在 $H$ 上，从而 $HP_5$ 是以 $H$ 为核 $P_5$ 为补的 Frobenius 群，因此 $H$ 是幂零群且 $|H|=21$. 由 $H$ 幂零知 $H$ 的 7-Sylow 子群 $P_7\mathrm{char}H\trianglelefteq G$. 从而 $P_5$ 无不动点地作用在 $P_7$ 上，则 $P_7P_5$ 是以 $P_7$ 为核 $P_5$ 为补的 Frobenius 群. 由 Frobenius 群的性质得 $5\mid(7-1)$，矛盾.

若 $K/H\cong A_6$，则

$$|H|\cdot|G/K|=7$$

于是 $7\in\pi_1$，且 $|H|=1,7$. 当 $|H|=1$ 时，由于

$$t(G)\geqslant 2$$

所以

$$C_G(K)=1$$

由 $N/C$ 定理有 $G\lesssim\mathrm{Aut}(K)$，这与 $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\nmid 2^5\cdot 3^2\cdot 5$ 矛盾；当 $|H|=7$ 时，$G=K$，$G/H\cong A_6$，由于 $4\in\pi_e(A_6)$，所以 $4\in\pi_e(G)$，从而

$$t(G)\geqslant 3$$

又因 $7\in\pi_1$，所以：

$$\pi_1=\{2,7\} \qquad \pi_2=\{3\} \qquad \pi_3=\{5\}$$

从而 $G$ 的 5-Sylow 子群 $P_5$ 无不动点地作用在 $H$ 上，因此 $HP_5$ 是以 $H$ 为核 $P_5$ 为补的 Frobenius 群，由

Frobenius 群的性质得 $5 \mid (7-1)$，矛盾.

若 $K/H \cong L_2(7)$，则

$$|H| \cdot |G/K| = 3 \cdot 5$$

由于 $H, G/K$ 是 $\pi_1$-群，所以 $3, 5 \in \pi_1$，从而：

$$\pi_1 = \{2, 3, 5\} \qquad \pi_2 = \{7\}$$

因为 $4 \in \pi_e(L_2(7))$，所以 $4 \in \pi_e(G)$. 但 $\pi_e(G)$ 中只有 2 个合数，从而

$$t(G) \geqslant 3$$

这与 $\pi_1 = \{2, 3, 5\}$，$\pi_2 = \{7\}$，$t(G) = 2$ 矛盾.

若 $K/H \cong L_2(8)$，则

$$|H| \cdot |G/K| = 5$$

于是 $5 \in \pi_1$，且 $|H| = 1, 5$. 当 $|H| = 1$ 时，由于

$$t(G) \geqslant 2$$

所以

$$C_G(K) = 1$$

于是

$$G \lesssim \mathrm{Aut}(K)$$

这与 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \nmid 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$ 矛盾；当 $|H| = 5$ 时，$G = K$，$G/H \cong L_2(8)$，由于 $9 \in \pi_e(L_2(8))$，所以 $9 \in \pi_e(G)$，于是 $t(G) \geqslant 3$，又因 $5 \in \pi_1$，所以：

$$\pi_1 = \{2, 5\} \qquad \pi_2 = \{3\} \qquad \pi_3 = \{7\}$$

从而 $G$ 的 7-Sylow 子群 $P_7$ 无不动点地作用在 $H$ 上，因此 $HP_7$ 是以 $H$ 为核 $P_7$ 为补的 Frobenius 群，由 Frobenius 群的性质得 $7 \mid (5-1)$，矛盾.

若 $K/H \cong A_7$，则 $H = 1$，$K = G$，于是 $G \cong A_7$. 定理 3 得证.

显然，交错群 $A_1, A_2, A_3, A_4$ 可由其阶及元素的同阶类类数刻画. 由定理 1、定理 2、定理 3 知 $A_5, A_6, A_7$ 可由其阶及元素的同阶类类数刻画. 因此有下面的问题：

**问题** 是否所有的交错群 $A_n$ 均可由其阶 $|A_n|$ 及元素的同阶类类数 $\eta(A_n)$ 刻画？

**参考文献：**

[1] FEIT W, THOMPSON J G. Solvability of Groups of Odd Order [J]. Pac Jour Math, 1963, 13(3): 775－1018.

[2] 施武杰，杨文泽. $A_5$ 的一个新刻划与有限质元群 [J]. 西南师范学院学报(自然科学版)，1984，8(1)：36－40.

[3] DENG H W, SHI W J. A Simplicity Criterion for Finite Groups [J]. J Algebra, 1997, 191(1): 371－381.

[4] CONWAYJ H, CURTIS R T, NORTON S P, et al. Atlas of Finite Groups [M]. New York: Oxford University Press, 1985.

[5] WILLIAMS J S. Prime Graph Comfonents of Finite Group [J]. J Algebra, 1981, 69(2): 487－512.

[6] 陈贵云. Frobenius 群与 2-Frobenius 群的结构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1995，20(5)：485－487.

# New Characterization of Alternating Groups $A_5$, $A_6$ and $A_7$

LI Yue, CAO Hong-ping

*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

**Abstract**: In this paper, we demonstrate that the alternating groups $A_5$, $A_6$ and $A_7$ can be characterized by the groups' order and the number of same order elements. When given the groups' order and the number of same order elements, we can get the prime graph structure of the group by judging the set of the elements' orders which contains the number of the composite numbers, and then get the structure of the group.

**Key words**: finite group; alternating group; the number of same order elements; simple group

责任编辑 廖 坤