第 38 卷第 2 期 西南大学学报(自然科学版) 2016 年 2 月
Vol. 38 No. 2 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Feb. 2016

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.02.009

随机耗散 Camassa-Holm 方程随机吸引子的上半连续性[①]

华晓玲， 李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：通过对带白噪音的随机耗散 Camassa-Holm 方程解的一致估计，以及该解产生的随机动力系统在 H_0^1 空间中存在随机吸引子，证明了吸引子的上半连续性.

关 键 词：白噪音；随机耗散 Camassa-Holm 方程；随机动力系统；随机吸引子；上半连续性

中图分类号：O177.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2016)02-0051-07

考虑带白噪音扰动的随机耗散 Camassa-Holm 方程模型：

$$du - du_{xx} + (3uu_x - \lambda(u_{xx} - u_{xxxx}))dt = (2u_x u_{xx} + uu_{xxx})dt + \varepsilon Q dW(t) \tag{1}$$

$$u(t_0, x) = u_0(x) \qquad x \in I = [0, L] \qquad t > 0 \tag{2}$$

$$u(t, 0) = u(t, L) \qquad u_x(t, 0) = u_x(t, L) \qquad u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, L) \tag{3}$$

方程(1)中，$W(t)$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的双边实值的 Wiener 过程，P 是 Wiener 测度，

$$\Omega = \{\omega \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \mid \omega(0) = 0\}$$

Q 是 $\mathbb{R}^m \longrightarrow L^2(I)$ 上的有界线性算子，$(\Omega, \mathscr{F}, P, \theta_t)$ 为距离动力系统.

文献[1]证明了确定系统解的存在唯一性及吸引子的存在性.文献[2-4]证明了方程在 H_0^1 空间中存在吸引子. 在此基础上，本文运用文献[5-6]的相关结果，证明了方程在 H_0^1 空间中吸引子的上半连续性.

记

$$H = \{u \mid u \in L^2(I)，且(3)式成立\}$$

$$V = \{u \mid u \in H^1(I)，且(3)式成立\}$$

$(,)$ 和 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(I)$ 空间的内积与范数，$\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(I)$ 空间的范数，∇ 为一阶微分算子，$Au = -\Delta u$ 为二阶微分算子，A 是 $D(A) = V \cap H^2(I)$ 到 H 的同构.

定义三线性形式：

$$b(u, v, \omega) = (B(u, v), \omega) = \int_I u(\nabla v)\omega dx \qquad u, v, \omega \in V$$

其中 $B: V \times V \longrightarrow V'$.

利用 Sobolev 插值不等式，可得：

$$\|u\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|u_x\|^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2}\lambda_1^{\frac{-1}{4}}\|u_x\| = \beta_0\|u_x\| \qquad u \in V \tag{4}$$

① 收稿日期：2015-05-09
基金项目：国家自然科学基金面上项目(11571283).
作者简介：华晓玲(1989-)，女，湖北咸宁人. 硕士研究生，主要从事随机动力系统的研究.

$$\| u \|_4^2 \leqslant \beta_1 \| u \|^{\frac{3}{2}} \| u_x \|^{\frac{1}{2}} \qquad u \in V \tag{5}$$

定义算子 Q: $\mathbb{R}^m \longrightarrow H$, 其中

$$Q_x = \sum_{i=1}^{m} x_i \phi_i \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\phi_i \in D(A) \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

方程(1) 的 Wiener 过程 $W(t) = \omega(t)$, 即

$$\omega(t) = (W_1(t), W_2(t), \cdots, W_m(t)) \qquad t \in \mathbb{R}$$

设 $\mu > 0$, 考虑 Ornstein-Uhlenbeck 方程

$$\mathrm{d}y_i + \mu y_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}W_i(t) \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

设

$$z(t) = (I + A)^{-1} Q_{y(t)}$$

其中 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t))$, 则有

$$\mathrm{d}z + \mathrm{d}Az + \mu(z + Az)\mathrm{d}t = Q\mathrm{d}W(t)$$

因为 $\phi_i \in D(A)$, 所以由(4) 式及 Cauchy-Schwatz 不等式, 同时考虑到 $y(t)$ 关于 t 连续, 可得:

$$\| z(t) \|_\infty + \| z_x(t) \|_\infty \leqslant \beta_2 \sum_{i=1}^{m} | y_i(t) | \tag{6}$$

$$\| z(t) \|^2 + \| z_x(t) \|^2 + \| z_{xx}(t) \|^2 + \| z_{xxx}(t) \|^2 + \| z_{xxxx}(t) \|^2 \leqslant \beta_3 \sum_{i=1}^{m} | y_i(t) |^2 \tag{7}$$

$$\sup_{-1 \leqslant t \leqslant 0} \{ \| z(t) \|^2 + \| z_x(t) \|^2 + \| z_{xx}(t) \|^2 + \| z_{xxx}(t) \|^2 + \| z_{xxxx}(t) \|^2 \} < \infty$$

记 $v = u + Au$, 且引入变量 $X(t) = u(t) - \varepsilon z(t)$, 故方程(1) 可转化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X + AX) + \lambda A(X + AX) + B(u, v) + 2B(v, u) = \varepsilon\mu z + (\varepsilon\mu - \varepsilon\lambda)Az - \varepsilon\lambda A^2 z \tag{8}$$

定义 1 令$(\Omega, \mathscr{F}, P, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ 为距离动力系统, φ_ε 为定义在度量空间(X, d) 上的$(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathscr{F} \times \mathscr{B}(X), \mathscr{B}(X))$ 可测的映射, 其中 φ_ε: $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times X \longrightarrow X$, $(t, \omega, x) \longmapsto \varphi_\varepsilon(t, \omega)x$, $\varepsilon \in (0, 1]$. 若 φ_ε 满足:

(i) $\varphi_\varepsilon(0, \omega) = \mathrm{id}$;

(ii) $\varphi_\varepsilon(t + s, \omega) = \varphi_\varepsilon(t, \theta_s\omega)\varphi_\varepsilon(s, \omega)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$.

则称 φ_ε 是一个随机动力系统. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统就是一个确定性的系统, 并且 $\varphi(t, \omega)u_0 = u(t, \omega; t_0, u_0)$.

定理 1[2] 与随机耗散 Camassa-Holm 方程相关的随机动力系统在 $H_0^1(I)$ 中有一个随机吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon(w)$, $\mathscr{A}_\varepsilon(w)$ 是紧的不变集, 且吸引 $H_0^1(I)$ 中的所有有界集.

本文的主要结果为:

定理 2 若 $\varepsilon \in (0, 1]$, 假定下列 3 个条件成立:

(i) φ_ε 在$(0, 1]$ 内收敛, 且当 $\varepsilon \to 0$ 时, φ_ε 收敛到 φ;

(ii) $E_\varepsilon = E_\varepsilon(w)_{w \in \Omega}$ 是 φ_ε 的随机吸收集, 存在一个正数 C, 有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \| E_\varepsilon(w) \| \leqslant C$$

(iii) $\bigcup_{0 < \varepsilon \leqslant 1} \mathscr{A}_\varepsilon(w)$ 在 V 中是预紧的, 其中 $\mathscr{A}$ 是动力系统 φ 的一个全局吸引子.

则随机吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 是上半连续的, 即

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{dist}(\mathscr{A}_\varepsilon(w), \mathscr{A}) = 0$$

1 H_0^1 空间内解的一致估计

引理 1 假设 $\lambda > 0$, 则存在 $t(\omega, \rho) \leqslant -1$, 只要 $t_0 \leqslant t(\omega, \rho)$, 且 $\| u_0 \|_V \leqslant \rho$, 则有:

$$\|X(t,\omega;t_0,u_0-\varepsilon z(t_0,\omega))\|^2+\|X_x(t,\omega;t_0,u_0-\varepsilon z(t_0,\omega))\|^2\leqslant C_1+\varepsilon r_1(\omega)\qquad t\in[-1,0]$$

$$\|u(t,\omega;t_0,u_0)\|^2+\|u_x(t,\omega;t_0,u_0)\|^2\leqslant C_2+\varepsilon r_2(\omega)\qquad t\in[-1,0]$$

证　设 $X(t)$ 是方程(8)的解，让 $X(t)$ 与方程(8)在空间 H 上作内积并化简，则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|X\|^2+\|X_x\|^2)+\lambda(\|X_x\|^2+\|X_{xx}\|^2)=\varepsilon b(v,u,z)-\varepsilon b(u,z,v)+(\varepsilon\mu z+(\varepsilon\mu-\varepsilon\lambda)Az-\varepsilon\lambda A^2z,X)\tag{9}$$

应用 Hölder 不等式、Young 不等式、Sobolev 插值不等式以及(4)式，可得：

$$\begin{aligned}|\varepsilon b(u,z,v)|&\leqslant\varepsilon\|z_x\|_\infty\|u\|\|v\|\leqslant\varepsilon\beta_2\sum_{i=1}^m|y_i(t)|\|u\|\|v\|\leqslant\\&\frac{32m\varepsilon\beta_2{}^2}{\lambda}\sum_{i=1}^m|y_i(t)|^2\|X\|^2+\\&\frac{\lambda}{8}\|X_{xx}\|^2+2\varepsilon\beta_2\sum_{i=1}^m|y_i(t)|\|X\|^2+\\&\frac{\varepsilon\lambda}{8}\|z_{xx}\|^2+\left(2\varepsilon\beta_2\sum_{i=1}^m|y_i(t)|+\frac{32m\varepsilon\beta_2{}^2}{\lambda}\sum_{i=1}^m|y_i(t)|^2\right)\|z\|^2\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}|\varepsilon b(v,u,z)|\leqslant&\left(2\beta_2\sum_{i=1}^m|y_i(t)|+\frac{32m\beta_2{}^2}{\lambda}\sum_{i=1}^m|y_i(t)|^2\right)\|z_x\|^2+2\beta_2\sum_{i=1}^m|y_i(t)|\|z\|^2+\\&\frac{\lambda}{8}\|X_{xx}\|^2+\varepsilon\Bigg[\left(2\beta_2\sum_{i=1}^m|y_i(t)|+\frac{32m\beta_2{}^2}{\lambda}\sum_{i=1}^m|y_i(t)|^2\right)\|X_x\|^2+\\&2\beta_2\sum_{i=1}^m|y_i(t)|\|X\|^2+\frac{\lambda}{8}\|z_{xx}\|^2\Bigg]\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&|(\varepsilon\mu z+(\varepsilon\mu-\varepsilon\lambda)Az-\varepsilon\lambda A^2z,X)|\leqslant\\&\frac{\lambda_1\lambda}{4}\|X\|^2+\frac{\lambda_1\lambda}{4}\|X_x\|^2+\frac{\lambda}{8}\|X_{xx}\|^2+\varepsilon(c_1\|z\|^2+c_2\|z_x\|^2+c_3\|z_{xx}\|^2)\end{aligned}\tag{12}$$

联立(10),(11),(12)式，令

$$f(t)=8\beta_2M_1(t)+\frac{64m\beta_2{}^2}{\lambda}M_2(t)$$

并由 Poincare 不等式，有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|X\|^2+\|X_x\|^2)+\frac{\lambda_1\lambda}{2}(\|X_x\|^2+\|X_{xx}\|^2)+\frac{\lambda}{4}\|X_{xx}\|^2\leqslant\\&\varepsilon f(t)(\|X\|^2+\|X_x\|^2)+2\varepsilon p_1(t,\omega)\end{aligned}\tag{13}$$

其中：

$$M_1(t)=\sum_{i=1}^m|y_i(t)|\qquad M_2(t)=\sum_{i=1}^m|y_i(t)|^2$$

$$\begin{aligned}p_1(t,\omega)=&\left(4\beta_2M_1(t)+\frac{32m\beta_2{}^2}{\lambda}M_2(t)+c_1\right)\|z\|^2+\Bigg(2\beta_2M_1(t)+\\&\frac{32m\beta_2{}^2}{\lambda}M_2(t)+c_2\Bigg)\|z_x\|^2+\left(c_3+\frac{\lambda}{2}\right)\|z_{xx}\|^2\end{aligned}$$

由(13)式，并运用 Gronwall 引理，当 $t_0\leqslant t\in[-1,0]$ 时，可以发现

$$\begin{aligned}&\|X\|^2+\|X_x\|^2\leqslant\\&2c_4\exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(\|u(t_0)\|^2+\|u_x(t_0)\|^2)+2c_4\varepsilon\exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\|z(t_0)\|^2+\end{aligned}$$

$$2c_4\varepsilon\exp\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\|z_x(t_0)\|^2+2c_4\varepsilon\int_{-\infty}^{0} p_1(s,\omega)\exp\left(\int_{s}^{0} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \tag{14}$$

其中 $c_4=\exp\left(\frac{\lambda_1\lambda}{2}\right)$. 由文献[2]知，对任意给定的 $\rho>0$，选取 $t(\omega,\rho)\leqslant-1$，当 $t_0<t(\rho,\omega)$ 时，有

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(\|u(t_0)\|^2+\|u_x(t_0)\|^2)\leqslant\exp\left(\int_{t_0}^{0} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\rho^2\leqslant 1 \tag{15}$$

由(14),(15)式，有

$$\|X(t,\omega;t_0,u_0-\varepsilon z(t_0,\omega))\|^2+\|X_x(t,\omega;t_0,u_0-\varepsilon z(t_0,\omega))\|^2\leqslant C_1+\varepsilon r_1(\omega) \tag{16}$$

其中：

$$C_1=2c_4=2\exp\left(\frac{\lambda_1\lambda}{2}\right)$$

$$r_1(\omega)=2c_4\sup_{t_0\leqslant-1}\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\|z(t_0)\|^2+\exp\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\|z_x(t_0)\|^2\right]+$$
$$2c_4\int_{-\infty}^{0} p_1(s,\omega)\exp\left(\int_{s}^{0} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$

$$\|u\|^2+\|u_x\|^2\leqslant 2C_1+\varepsilon[2r_1(\omega)+2(\|z\|^2+\|z_x\|^2)]=C_2+\varepsilon r_2(\omega) \tag{17}$$

引理2 在引理1的假设下，存在随机半径 $r_3(\omega),r_4(\omega),r_5(\omega)>0$，使得：

$$\int_{-1}^{0}\|X_{xx}(s,\omega;t_0,u_0-\varepsilon z(t_0,\omega))\|^2\mathrm{d}s\leqslant C_3+\varepsilon r_3(\omega)$$

$$\int_{-1}^{0}\|u_{xx}(s,\omega;t_0,u_0)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C_4+\varepsilon r_4(\omega)$$

$$\int_{-1}^{0}\|u_x(s)\|_4^2\mathrm{d}s\leqslant C_5+\varepsilon r_5(\omega)$$

证 由(13)式知

$$\frac{\lambda}{4}\|X_{xx}\|^2\leqslant\varepsilon\left[8\beta_2 M_1(t)+\frac{64m\beta_2{}^2}{\lambda}M_2(t)\right](\|X\|^2+\|X_x\|^2)+2\varepsilon p_1(t,\omega) \tag{18}$$

由 Sobolev 插值不等式和 Young 不等式，有：

$$\int_{-1}^{0}\|X_{xx}\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{4C_1}{\lambda}+\varepsilon\left[\frac{\lambda}{4}\int_{-1}^{0}\left(8\beta_2 M_1(t)+\frac{64m\beta_2{}^2}{\lambda}M_2(t)\right)(C_1+\varepsilon r_1(\omega))\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}p_1(t,\omega)\mathrm{d}t+\frac{4}{\lambda}r_1(\omega)\right]=$$
$$C_3+\varepsilon r_3(\omega) \tag{19}$$

$$\int_{-1}^{0}\|u_{xx}(s,\omega;t_0,u_0)\|^2\mathrm{d}s\leqslant 2C_3+\varepsilon\left[4r_3(\omega)+2\int_{-1}^{0}\|z_{xx}\|^2\mathrm{d}s\right]=C_4+\varepsilon r_4(\omega) \tag{20}$$

$$\int_{-1}^{0}\|u_x(s)\|_4^2\mathrm{d}s\leqslant(2C_3+c_5C_2)+\varepsilon\left[2r_3(\omega)+2\int_{-1}^{0}\|z_{xx}(s)\|^2\mathrm{d}s+c_5r_2(\omega)\right]=$$
$$C_5+\varepsilon r_5(\omega) \tag{21}$$

2 H_0^2 空间内解的一致估计

引理3 在引理1的假设下，存在随机半径 $r_6(\omega),r_7(\omega)>0$，使得：

$$\begin{cases}\|X_{xx}(t,\omega;t_0,u_0-\varepsilon z(t_0,\omega))\|^2\leqslant C_6+\varepsilon r_6(\omega)\\ \|u_{xx}(t,\omega;t_0,u_0-\varepsilon z(t_0,\omega))\|^2\leqslant C_7+\varepsilon r_7(\omega)\end{cases}\qquad t\in[-1,0]$$

证 让 $-X_{xx}$ 与方程(8)作内积并化简，则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|X_x\|^2+\|X_{xx}\|^2)+\lambda(\|X_{xx}\|^2+\|X_{xxx}\|^2)=$$

$$3b(u,u,u_{xx})-\frac{3}{2}b(u_{xx},u,u_{xx})-$$
$$\varepsilon[b(u,v,z_{xx})+2b(v,u,z_{xx})]-\varepsilon(\mu z+(\mu-\varepsilon)Az-\varepsilon\lambda A^2z,X_{xx}) \tag{22}$$

运用 Hölder 不等式和 Young 不等式进行估计，可以得到：

$$3\,|\,b(u,u,u_{xx})\,|\leqslant\|u_{xx}\|^2+9\|u_x\|_4^2\|u\|_4^2 \tag{23}$$

$$\frac{3}{2}\,|\,b(u_{xx},u,u_{xx})\,|\leqslant\frac{\lambda}{8}\|X_{xxx}\|^2+\frac{\lambda\varepsilon}{8}\|z_{xxx}\|^2+c_6\|u_{xx}\|^2\|u_x\|^{\frac{4}{3}} \tag{24}$$

$$|\,\varepsilon b(u,v,z_{xx})+2\varepsilon b(v,u,z_{xx})\,|=$$
$$\varepsilon\,|\,3b(u,u,z_{xx})+b(u,u_{xx},z_{xx})+2b(u_{xx},u,z_{xx})\,|\leqslant$$
$$\frac{\lambda}{8}\|X_{xxx}\|^2+\|u_{xx}\|^2+\|u\|_4^2\|u_x\|_4^2+4\varepsilon\|u_x\|_4^2\|z_{xx}\|_4^2+$$
$$\frac{16\varepsilon}{\lambda}\|u\|_4^2\|z_{xx}\|_4^2+\frac{\lambda\varepsilon}{8}\|z_{xxx}\|^2+9\varepsilon\|z_{xx}\|^2 \tag{25}$$

$$\varepsilon(\mu z+(\mu-\lambda)Az-\varepsilon A^2z,X_{xx})=\varepsilon\mu(z,X_{xx})+(\varepsilon\mu-\varepsilon\lambda)(z_{xx},X_{xx})+\varepsilon(z_{xxx},X_{xx})\leqslant$$
$$\frac{\lambda}{4}\|X_{xxx}\|^2+\frac{\lambda}{2}\|X_{xx}\|^2+$$
$$\frac{4\mu^2\varepsilon}{\lambda}\|z\|^2+\frac{4(\mu-\lambda)^2\varepsilon}{\lambda}\|z_{xx}\|^2+4\lambda\varepsilon\|z_{xxx}\|^2 \tag{26}$$

将(23),(24),(25),(26)式代入(22)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|X_x\|^2+\|X_{xx}\|^2)+\lambda(\|X_{xx}\|^2+\|X_{xxx}\|^2)\leqslant$$
$$4\|u_{xx}\|^2+20\|u\|_4^2\|u_x\|_4^2+2c_6\|u_{xx}\|^2\|u_x\|^{\frac{4}{3}}+$$
$$8\varepsilon\|u\|_4^2\|z_{xx}\|_4^2+\frac{16\varepsilon}{\lambda}\|u\|_4^2\|z_{xx}\|_4^2+2\varepsilon p_2(t,\omega) \tag{27}$$

其中

$$p_2(t,\omega)=\frac{17\lambda}{4}\|z_{xxx}\|^2+\frac{4(\mu-\lambda)^2+9\lambda}{\lambda}\|z_{xx}\|^2+\frac{4\mu^2}{\lambda}\|z\|^2$$

对(27)式两边从 s 到 $t(-1\leqslant s\leqslant t\leqslant 0)$ 进行积分，并由 Sobolev 插值不等式、Young 不等式、(4)式以及引理 1，有

$$\|X_x(t)\|^2+\|X_{xx}(t)\|^2\leqslant 4[C_4+\varepsilon r_4(\omega)]+20\beta_1(C_2+\varepsilon r_2(\omega))(C_5+\varepsilon r_5(\omega))+$$
$$2c_6(C_2+\varepsilon r_2(\omega))(C_4+\varepsilon r_4(\omega))+\|X_x(s)\|^2+\|X_{xx}(s)\|^2+$$
$$8(C_5+\varepsilon r_5(\omega))\sup_{-1\leqslant t\leqslant 0}\|z_{xx}(t)\|_4^2+$$
$$\frac{32\varepsilon}{\lambda}\beta_1(C_1+\varepsilon r_1(\omega))\int_{-1}^{0}\|z_{xx}(\tau)\|_4^2\mathrm{d}\tau \tag{28}$$

对 s 在区间$[-1,0]$上进行积分，有：

$$\|X_{xx}(t)\|^2\leqslant C_6+\varepsilon r_6(\omega) \tag{29}$$

$$C_6=4C_4+20\beta_1C_2C_5+2c_6C_2C_4+8C_5\sup_{-1\leqslant t\leqslant 0}\|z_{xx}(t)\|_4^2+\frac{32\beta_1C_1}{\lambda}\int_{-1}^{0}\|z_{xx}(t)\|_4^2\mathrm{d}t+C_1+C_3$$

$$r_6(\omega)=4r_4(\omega)+20\beta_1[r_2(\omega)+r_5(\omega)+r_2(\omega)r_5(\omega)]+2c_6[r_2(\omega)+r_4(\omega)+r_2(\omega)r_4(\omega)]+$$
$$8\sup_{-1\leqslant t\leqslant 0}\|z_{xx}(t)\|_4^2r_5(\omega)+\left(\frac{32\beta_1}{\lambda}\int_{-1}^{0}\|z_{xx}(t)\|_4^2\mathrm{d}t\right)r_1(\omega)+r_1(\omega)+r_3(\omega)+2\int_{-1}^{0}p(\tau,\omega)\mathrm{d}\tau$$

$$\|u_{xx}(t)\|^2=\|X_{xx}+\varepsilon z_{xx}\|\leqslant\|X_{xx}\|^2+\varepsilon\|z_{xx}\|^2\leqslant C_7+\varepsilon r_7(w) \tag{30}$$

3 系统的收敛性

引理 4 假设 $\varepsilon \in (0, 1]$, u^{ε} 和 u 分别是方程(1)和 $\varepsilon = 0$ 时方程(1)的解, 对应的初始值分别为 u_0^{ε} 和 u_0. 若 $\varepsilon \to 0$ 时, $\| u_{x,0}^{\varepsilon} - u_{x,0} \| \to 0$, 则对几乎处处的 $\omega \in \Omega$, $t \in [-1, 0]$, 有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_{\varepsilon}(t, \omega, u_0^{\varepsilon}) - u(t, u_0) \| = 0$$

证 令 $R = X - u = u^{\varepsilon} - \varepsilon z - u$, 则 $R + \varepsilon z = u^{\varepsilon} - u$. 又因:

$$\mathrm{d}u^{\varepsilon} - \mathrm{d}u_{xx}^{\varepsilon} + (3u^{\varepsilon}u_x^{\varepsilon} - \lambda(u_{xx}^{\varepsilon} - u_{xxxx}^{\varepsilon}))\mathrm{d}t = (2u_x^{\varepsilon}u_{xx}^{\varepsilon} + u^{\varepsilon}u_{xxx}^{\varepsilon})\mathrm{d}t + \varepsilon Q \mathrm{d}W(t) \tag{31}$$

$$\mathrm{d}u - \mathrm{d}u_{xx} + (3uu_x - \lambda(u_{xx} - u_{xxxx}))\mathrm{d}t = (2u_x u_{xx} + uu_{xxx})\mathrm{d}t \tag{32}$$

等式两边与 R 作内积, 并根据三线性形式的定义得:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| R \|^2 + \| R_x \|^2) + \lambda(\| R_x \|^2 + \| R_{xx} \|^2) = \\
&(\varepsilon\mu z + (\varepsilon\mu - \varepsilon\lambda)Az - \varepsilon A^2 z, R) + \\
&b(R, R, v^{\varepsilon}) - b(v, R, R) + \\
&b(u, R, R) - b(R, u^{\varepsilon}, R) + b(u, R, AR) - b(AR, u^{\varepsilon}, R) + \\
&\varepsilon b(z, R, v^{\varepsilon}) + \varepsilon b(u, R, z) + \varepsilon b(u, R, Az) - \varepsilon b(v, z, R) - \\
&\varepsilon b(z, u^{\varepsilon}, R) - \varepsilon b(Az, u^{\varepsilon}, R)
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\| b(R, R, v^{\varepsilon}) - b(v, R, R) \| \leqslant \beta_0(2C_2 + 2C_7 + \varepsilon r_2(w) + \varepsilon r_7(w)) \| R_x \|^2 \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&\| b(u, R, R) - b(R, u^{\varepsilon}, R) \| \leqslant \\
&\beta_0 \sqrt{\lambda_1}(C_2 + \varepsilon r_2(w)) \| R_x \|^2 + \beta_0(C_7 + \varepsilon r_7(w)) \| R \|^2
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&\| b(u, R, AR) - b(AR, u^{\varepsilon}, R) \| \leqslant \\
&\frac{\lambda}{2} \| R_{xx} \|^2 + \frac{\lambda}{4}(C_2 + \varepsilon r_2(w)) \| R_x \|^2 + \\
&\frac{\lambda}{4}(C_7 + \varepsilon r_7(w)) \| R \|^2
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
&\| \varepsilon b(z, R, v^{\varepsilon}) + \varepsilon b(u, R, z) + \varepsilon b(u, R, Az) - \varepsilon b(v, z, R) - \varepsilon b(z, u^{\varepsilon}, R) - \varepsilon b(Az, u^{\varepsilon}, R) \| \leqslant \\
&\varepsilon[2\beta_2 M_1(t) + \beta_3 M_2(t)][\| R \|^2 + \| R_x \|^2] + \varepsilon\beta_2 M_1(t)[2C_2 + 2C_7 + \varepsilon r_2(w) + \varepsilon r_7(w)] + \\
&\varepsilon\beta_2 M_1(t)[2C_2 + \varepsilon r_2(w)] + \varepsilon\beta_0[C_2 + C_7 + \varepsilon r_2(w) + \varepsilon r_7(w)]
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
&\| (\varepsilon\mu z + (\varepsilon\mu - \varepsilon\lambda)Az - \varepsilon A^2 z, R) \| \leqslant \\
&\frac{\lambda}{2} \| R_{xx} \|^2 + \frac{\lambda\varepsilon}{2}(\| R_x \|^2 + \| R \|^2) + \varepsilon[c_7 \| z \|^2 + c_8 \| z_x \|^2 + c_9 \| z_{xx} \|^2]
\end{aligned} \tag{38}$$

联立(33),(34),(35),(36),(37),(38)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| R \|^2 + \| R_x \|^2) \leqslant p_2(t, w)(\| R \|^2 + \| R_x \|^2) + \varepsilon p_3(t, w) \tag{39}$$

其中:

$$\begin{aligned}
p_2(t, w) = 2\Bigg[&\left(\beta_0 \sqrt{\lambda_1} + \frac{\lambda}{4}\right)(C_2 + \varepsilon r_2(w)) + \beta_0(C_2 + \varepsilon r_2(w) + C_7 + \varepsilon r_7(w)) + \\
&\left(\beta_0 + \frac{\lambda}{4}\right)(C_7 + \varepsilon r_7(w)) + \varepsilon\lambda + \varepsilon(2\beta_2 M_1(t) + \beta_3 M_2(t))\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3(t, w) = &2\beta_2 M_1(t)[2C_2 + 2C_7 + \varepsilon r_2(w) + \varepsilon r_7(w)] + 2\beta_2 M_1(t)[2C_2 + \varepsilon r_2(w)] + \\
&2\beta_0[C_2 + C_7 + \varepsilon r_2(w) + \varepsilon r_7(w)] + 2(c_7 \| z \|^2 + c_8 \| z_x \|^2 + c_9 \| z_{xx} \|^2)
\end{aligned}$$

由 Gronwall 引理, 当 $t_0 \leqslant t \in [-1, 0]$ 时, 有

$$\| R \|^2 + \| R_x \|^2 \leqslant \exp\left(\int_{t_0}^{t} p_2(\tau, w)\mathrm{d}\tau\right)(\| R(t_0) \|^2 + \| R(t_0) \|^2) +$$

$$\varepsilon\int_{t_0}^{t} p_3(s,w)\exp\left(\int_s^t p_2(\tau,w)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \leqslant$$
$$C_8(\|u_0-u_0^{\varepsilon}\|+\|u_{x,0}-u_{x,0}^{\varepsilon}\|+\varepsilon\|z(t_0)\|+\varepsilon\|z_x(t_0)\|)+$$
$$\varepsilon C_9 \to 0 \qquad \varepsilon \to 0 \tag{40}$$

故 $\|R\|^2 \to 0(\varepsilon \to 0)$，则

$$\|u^{\varepsilon}-u\|^2=\|R+\varepsilon z\|^2 \leqslant \|R\|^2+\varepsilon\|z\|^2 \to 0 \qquad \varepsilon \to 0 \tag{41}$$

定理 2 的证明

由引理 1、引理 2、引理 3、引理 4 知，定理 2 成立.

参考文献：

[1] 于丹平，田立新. 耗散 Camassa-Holm 方程的吸引子 [J]. 应用数学学报，2004，27(3)：536－545.

[2] 赵文强，李扬荣. 随机耗散 Camassa-Holm 方程的吸引子 [J]. 应用数学学报，2012，35(1)：73－87.

[3] 赵文强. 带加法白噪声的随机三维 Camassa-Holm 模型的 H^2 -吸引子 [J]. 数学学报(中文版)，2014，57(4)：795－810.

[4] LI Y R，GU A H，LI J. Existence and Continuity of Bi-Spatial Random Attractors and Application to Stochastic Semilinear Laplacian Equations [J]. J Differential Equations，2015，258：504－534.

[5] GUO B L，WANG B X. Upper Semicontinuity of Attracors for the Reaction Diffusion Equation [J]. Communication in Nonlinear Science & Numerical Simulation，1996，1(2)：38－41.

[6] LI Y R，CUI H Y，LI J. Upper Semi-Continuity and Regularity of Random Attractors on p-Times Integrable Spaces and Applications [J]. Nonlinear Analysis，2014，109：33－44.

Upper Semicontinuity of Random Attractors for the Random Dissipative Camassa-Holm Equation

HUA Xiao-ling，　LI Yang-rong

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：According to the uniform estimation of the solution of the random dissipative Camassa-Holm equation with white noise，and based on the existence of attractors in the random dynamical system produced by the solution in H_0^1，the paper proves the upper semicontinuity of the attractors.

Key words：white noise；random dissipative Camassa-Holm equation；random dynamical system；random attractor；upper semicontinuity

责任编辑　廖　坤