第 38 卷第 2 期 西南大学学报(自然科学版) 2016 年 2 月
Vol. 38 No. 2 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Feb. 2016

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.02.012

复空间形式中具有平行平均曲率向量的全实伪脐子流形[①]

孙宝磊, 何俊秀, 姚纯青

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 讨论了复空间形式中具有平行平均曲率向量的全实伪脐子流形 M^n 的一些性质. 采用活动标架法, 得到了 M^n 为全脐子流形的一些内蕴刚性定理.

关 键 词: 复空间形式; 全实伪脐子流形; 全脐子流形; 平行平均曲率向量

中图分类号: O186.1 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2016)02-0072-06

具有常全纯截面曲率的完备(单连通)的流形称为复空间形式. 设 Kähler 流形 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 是 $2(n+p)$ 维具有常全纯截面曲率 $\tilde{c}$ 的复空间形式. 对于任意的实数 $\tilde{c}$, 存在一个具有常全纯截面曲率 $\tilde{c}$ 的空间形式与之相对应, 并且其维数是任意的. 当 $\tilde{c}$ 分别为正数、0 和负数时, $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 分别被记为 CP^{n+p}, C^{n+p} 和 D^{n+p}. 其中 CP^{n+p} 是具有 Fubini-Study 度量的复射影空间, C^{n+p} 是复欧式空间, D^{n+p} 是位于 C^{n+p} 中被赋予 Bergman 度量的单位开球[1]. 设 J 是 Kähler 流形 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 的近复结构. 对于一个 Kähler 流形 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 的子流形 M: 如果 M 的切空间被 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 的近复结构 J 映射到自身, 则称 M 为全纯子流形; 如果映射到其法空间, 则称 M 为全实子流形. 当 $p=0$ 时, 我们知道 $JT_x(M)=T_x(M)$, 对于这种全实子流形的研究目前已有许多结果[2-4].

本文主要研究复空间形式中具有平行平均曲率向量的紧致全实伪脐子流形($p\geqslant 1$). 得到以下定理:

定理 1 设 M^n 为复空间形式 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的 n 维紧致全实伪脐子流形. 则 M^n 的平均曲率向量在法丛中平行且不消失当且仅当 M^n 的平均曲率为非零常数.

定理 1 推广了文献[5] 中的定理 7.

K 表示 M^n 在其点 x 处的截面曲率的下确界, 则有如下两个定理:

定理 2 设 M^n 为复射影空间 CP^{n+p} 中具有非零平行平均曲率向量的 n 维紧致全实伪脐子流形. 若

$$K\geqslant\frac{3(n+2p-1)-2}{6(n+2p-1)}(1+H^2)\tag{1}$$

则第二基本形式模长的平方 $S=nH^2$, M^n 是全脐子流形; 或者

$$S=\frac{2n}{3}\left(1+\frac{5}{2}H^2\right)$$

在后者情形中, 当 $n=2$ 时, M^2 是局部等距于半径为 $\sqrt{\frac{3}{1+H^2}}$ 的球面 $S^2\left(\sqrt{\frac{3}{1+H^2}}\right)$.

---

① 收稿日期: 2015-04-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11471188).

作者简介: 孙宝磊(1990-), 男, 河南淮阳人, 硕士研究生, 主要从事微分几何的研究.

通信作者: 姚纯青, 副教授.

定理 3 设 M^n 为复空间形式 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中具有非零平行平均曲率向量的 n 维紧致全实伪脐子流形.

1) 当 $\tilde{c} \geqslant 0$ 时，若

$$K \geqslant \frac{n+2p-2}{2(n+2p)-3}\left(\frac{1}{4}\tilde{c}+H^2\right) \tag{2}$$

则 M^n 是 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的全脐子流形；

2) 当 $\tilde{c} < 0$ 时，若

$$K \geqslant \frac{n+2p-2}{2(n+2p)-3}\left(\frac{1}{4}\tilde{c}+H^2\right)-\frac{(n+2p)-1}{4n[2(n+2p)-3]}\tilde{c} \tag{3}$$

则 M^n 是 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的全脐子流形.

当$\frac{1}{2}\tilde{c}+H^2 < 0$ 时，定理 3 中的式(3) 优于文献[6] 中的 Pinching 常数.

1 预备知识

设 M^n 为复空间形式 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的 n 维全实子流形. J 为复空间形式 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 的近复结构. 本文中约定各类指标取值范围如下：

$$A, B, C, \cdots = 1, \cdots, n+p, 1^*, \cdots, (n+p)^* \qquad i, j, k, \cdots = 1, \cdots, n$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots = n+1, \cdots, n+p, 1^*, \cdots, (n+p)^* \qquad \lambda, \mu, \nu, \cdots = n+1, \cdots, n+p$$

当指标上下出现两次时代表对其求和.

在 $\widetilde{M}$ 上选取局部规范的正交标架场：

$$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \qquad \boldsymbol{e}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}$$

$$\boldsymbol{e}_{1^*} = J\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n^*} = J\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{e}_{(n+1)^*} = J\boldsymbol{e}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{(n+p)^*} = J\boldsymbol{e}_{n+p}$$

使得其限制在 M^n 上时，$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n; \boldsymbol{e}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}\}$ 与 M^n 相切.

用$\{\boldsymbol{\omega}^A\}$ 表示$\{\boldsymbol{e}_A\}$ 的对偶标架场，则 $\widetilde{M}$ 的结构方程为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^A = -\boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{\omega}^B \qquad \boldsymbol{\omega}_B^A + \boldsymbol{\omega}_A^B = \boldsymbol{0}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_B^A = -\boldsymbol{\omega}_C^A \wedge \boldsymbol{\omega}_B^C + \boldsymbol{\Phi}_B^A \qquad \boldsymbol{\Phi}_B^A = \frac{1}{2}\boldsymbol{K}_{BCD}^A \boldsymbol{\omega}^C \wedge \boldsymbol{\omega}^D$$

其中：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega}_i^j = \boldsymbol{\omega}_{i^*}^{j^*} \qquad \boldsymbol{\omega}_i^{j^*} = \boldsymbol{\omega}_j^{i^*} \\ &\boldsymbol{\omega}_\lambda^\mu = \boldsymbol{\omega}_{\lambda^*}^{\mu^*} \qquad \boldsymbol{\omega}_\lambda^{\mu^*} = \boldsymbol{\omega}_\mu^{\lambda^*} \\ &\boldsymbol{\omega}_i^\lambda = \boldsymbol{\omega}_{i^*}^{\lambda^*} \qquad \boldsymbol{\omega}_i^{\mu^*} = \boldsymbol{\omega}_\mu^{i^*} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{K}_{BCD}^A = \frac{1}{4}\tilde{c}(\boldsymbol{\delta}_{AC}\boldsymbol{\delta}_{BD} - \boldsymbol{\delta}_{AD}\boldsymbol{\delta}_{BC} + \boldsymbol{J}_{AC}\boldsymbol{J}_{BD} - \boldsymbol{J}_{AD}\boldsymbol{J}_{BC} + 2\boldsymbol{J}_{AB}\boldsymbol{J}_{CD}) \tag{5}$$

在(5) 式中，$\boldsymbol{J}_{AB}$ 为线性变换 J 关于$\{\boldsymbol{e}_A\}$ 的变换矩阵，即

$$\boldsymbol{J}_{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n+p} \\ -\boldsymbol{I}_{n+p} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{n+p}$ 表示 $n+p$ 阶单位矩阵.

将 $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 限制在 M^n 上时，有 $\boldsymbol{\omega}^\alpha = \boldsymbol{0}$，由 Cartan 引理知：

$$\boldsymbol{\omega}_i^\alpha = \boldsymbol{h}_{ij}^\alpha \boldsymbol{\omega}^j \qquad \boldsymbol{h}_{ij}^\alpha = \boldsymbol{h}_{ji}^\alpha$$

M^n 的结构方程为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^i = -\boldsymbol{\omega}_j^i \wedge \boldsymbol{\omega}^j \qquad \boldsymbol{\omega}_j^i + \boldsymbol{\omega}_i^j = \boldsymbol{0}$$

$$d\boldsymbol{\omega}_j^i = -\boldsymbol{\omega}_k^i \wedge \boldsymbol{\omega}_j^k + \boldsymbol{\Phi}_j^i \qquad \boldsymbol{\Phi}_j^i = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{jkl}^i \boldsymbol{\omega}^k \wedge \boldsymbol{\omega}^l$$

M^n 的 Gauss 方程和 Ricci 方程分别为：

$$\boldsymbol{R}_{jkl}^i = \boldsymbol{K}_{jkl}^i + \sum_\alpha (\boldsymbol{h}_{ik}^\alpha \boldsymbol{h}_{jl}^\alpha - \boldsymbol{h}_{il}^\alpha \boldsymbol{h}_{jk}^\alpha)$$

$$\boldsymbol{R}_{\beta kl}^\alpha = \boldsymbol{K}_{\beta kl}^\alpha + \sum_i (\boldsymbol{h}_{ik}^\alpha \boldsymbol{h}_{il}^\beta - \boldsymbol{h}_{il}^\alpha \boldsymbol{h}_{ik}^\beta)$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别表示 M^n，$\widetilde{M}^{n+p}$ 的曲率张量.

记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{h}_{ij}^\alpha \boldsymbol{\omega}^i \boldsymbol{\omega}^j \boldsymbol{e}_\alpha$ 是 M^n 的第二基本形式，M^n 的平均曲率向量 $\boldsymbol{\xi}$、平均曲率 H、第二基本形式模长的平方 S 和数量曲率 ρ 可表示为：

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_\alpha \left(\frac{1}{n}\sum_i \boldsymbol{h}_{ii}^\alpha\right)\boldsymbol{e}_\alpha \qquad H = \|\boldsymbol{\xi}\| \qquad S = \|\boldsymbol{B}\|^2 \qquad \rho = \frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c} + n^2H^2 - S$$

M^n 的 Codazzi 方程和 Ricci 恒等式分别为：

$$\boldsymbol{h}_{ijk}^\alpha - \boldsymbol{h}_{ikj}^\alpha = -\boldsymbol{K}_{ijk}^\alpha$$

$$\boldsymbol{h}_{ijkl}^\alpha - \boldsymbol{h}_{ijlk}^\alpha = \sum_m (\boldsymbol{h}_{im}^\alpha \boldsymbol{R}_{jkl}^m + \boldsymbol{h}_{mj}^\alpha \boldsymbol{R}_{ilk}^m) - \sum_\beta \boldsymbol{h}_{ij}^\beta \boldsymbol{R}_{\beta kl}^\alpha$$

其中 $\boldsymbol{h}_{ijk}^\alpha$ 和 $\boldsymbol{h}_{ijkl}^\alpha$ 分别表示 $\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha$ 与 $\boldsymbol{h}_{ijk}^\alpha$ 的共变导数.

设 M^n 为复空间形式 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的 n 维紧致全实子流形，令

$$\tau = \sum_{\alpha \neq n+1} \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_\alpha^2 = \sum_{\substack{i,j \\ \alpha \neq n+1}} (\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha)^2$$

下面给出定理证明需要的一些等式与不等式(参考文献[6－9])：

$$\boldsymbol{K}_{j^*kl}^{i^*} = \boldsymbol{K}_{jkl}^i = \frac{1}{4}\tilde{c}(\boldsymbol{\delta}_{ik}\boldsymbol{\delta}_{jl} - \boldsymbol{\delta}_{il}\boldsymbol{\delta}_{jk}) \qquad \boldsymbol{K}_{Akl}^\lambda = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{K}_{Akl}^{\lambda^*} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{K}_{ijk}^\alpha = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{K}_{\lambda ij}^\alpha = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

$$-2\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2) - \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2] - \sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)]^2 \geqslant -\frac{3}{2}S^2 \tag{7}$$

$$\frac{1}{n+2p-1}\tau^2 \leqslant \sum_{\alpha\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2]^2 \leqslant \tau^2 \tag{8}$$

$$0 \leqslant \sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2) - \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2] \leqslant \frac{n+2p-2}{n+2p-1}\tau^2 \tag{9}$$

2　定理的证明

引理 1　设 M^n 为复空间形式 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的全实子流形，则 M^n 具有平行平均曲率向量当且仅当 $\sum_k \boldsymbol{h}_{kki}^\alpha = \boldsymbol{0}$.

证　记 $D^\perp$ 表示 M^n 的法联络，因为

$$n\boldsymbol{\xi} = \sum_{\alpha,k} \boldsymbol{h}_{kk}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$$

则

$$nD^\perp\boldsymbol{\xi} = \sum_\alpha d\Big(\sum_k \boldsymbol{h}_{kk}^\alpha\Big)\boldsymbol{e}_\alpha + \sum_\alpha\Big(\sum_k \boldsymbol{h}_{kk}^\alpha\Big)D^\perp\boldsymbol{e}_\alpha = \sum_\alpha\Big[d\Big(\sum_k \boldsymbol{h}_{kk}^\alpha\Big) + \sum_{\beta,k}\boldsymbol{h}_{kk}^\beta\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha\Big]\boldsymbol{e}_\alpha \tag{10}$$

又因为 $\boldsymbol{h}_{kk}^\alpha$ 的一阶共变导数 $\boldsymbol{h}_{kki}^\alpha$ 为

$$\sum_{i,k}\boldsymbol{h}_{kki}^\alpha\boldsymbol{\omega}^i = \sum_k d\boldsymbol{h}_{kk}^\alpha - \sum_{i,k}\boldsymbol{h}_{ki}^\alpha\boldsymbol{\omega}_k^i - \sum_{i,k}\boldsymbol{h}_{ik}^\alpha\boldsymbol{\omega}_k^i + \sum_{\beta,k}\boldsymbol{h}_{kk}^\beta\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha =$$

$$d\Big(\sum_k \boldsymbol{h}_{kk}^\alpha\Big) + \sum_{\beta,k}\boldsymbol{h}_{kk}^\beta\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \tag{11}$$

由(10)式和(11)式，得

$$D^\perp\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow d(\sum_k \boldsymbol{h}_{kk}^\alpha) + \sum_{\beta,k}\boldsymbol{h}_{kk}^\beta\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha = 0 \Leftrightarrow \sum_k \boldsymbol{h}_{kki}^\alpha = 0$$

定理 1 的证明　由文献[9]中的定理 1 可知，我们可以选取 $\boldsymbol{\xi} = H\boldsymbol{e}_{n+1}$. 又因为 M^n 是伪脐子流形，则

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{\alpha}=\begin{cases} nH & \alpha=n+1 \\ 0 & \alpha \neq n+1 \end{cases} \tag{12}$$

将(12)式代入(11)式，得到：

$$\sum_{i,k} \boldsymbol{h}_{kki}^{n+1} \boldsymbol{\omega}^{i}=n \mathrm{d} H \qquad \sum_{i,k} \boldsymbol{h}_{kki}^{\alpha} \boldsymbol{\omega}^{i}=n H \boldsymbol{\omega}_{n+1}^{\alpha} \qquad \alpha \neq n+1$$

因此，H 是不为 0 的常数，并且

$$\boldsymbol{\omega}_{n+1}^{\alpha}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{k} \boldsymbol{h}_{kki}^{\alpha}=0$$

由引理 1，定理 1 得证.

引理 2 设 M^{n} 为复空间形式 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中具有非零平行平均曲率向量的 n 维紧致全实伪脐子流形. 则

$$\frac{1}{2} \Delta \tau=\sum_{\substack{i,j,k \\ \alpha \neq n+1}}(\boldsymbol{h}_{ijk}^{\alpha})^{2}+n\left(\frac{1}{4} \tilde{c}+H^{2}\right) \tau+\frac{1}{4} \tilde{c} \sum_{i} \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{i^{*}}^{2}-$$
$$2 \sum_{\alpha, \beta \neq n+1}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \boldsymbol{H}_{\beta}^{2})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})^{2}]-\sum_{\alpha, \beta \neq n+1}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})]^{2} \tag{13}$$

证 因为 M^{n} 是伪脐的，则：

$$\boldsymbol{h}_{ij}^{n+1}=H \boldsymbol{\delta}_{ij} \qquad \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{n+1}^{2}=n H^{2} \qquad \tau=S-n H^{2} \tag{14}$$

$$\sum_{\alpha \neq n+1}\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \boldsymbol{H}_{n+1}) \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{n+1}-[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{n+1})]^{2}\}=n \tau H^{2}-0=n \tau H^{2}$$

由(6)式和引理 1，直接计算得到(参见文献[10-13])：

$$\sum_{\substack{i,j \\ \alpha \neq n+1}} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \Delta \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}=\sum_{\substack{i,j,k \\ \alpha \neq n+1}} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}(\boldsymbol{h}_{im}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{mkjk}^{m}+\boldsymbol{h}_{km}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{ijk}^{m})-\sum_{\substack{i,j,k \\ \alpha \neq n+1}} \sum_{\beta} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ki}^{\beta} \boldsymbol{R}_{\beta jk}^{\alpha}$$

$$\sum_{\substack{i,j,k,m \\ \alpha \neq n+1}} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}(\boldsymbol{h}_{im}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{kjk}^{m}+\boldsymbol{h}_{km}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{ijk}^{m})=\frac{1}{4} \tilde{c} n \tau+n \tau H^{2}-\sum_{\alpha, \beta \neq n+1}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})]^{2}-$$
$$\sum_{\alpha, \beta \neq n+1}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \boldsymbol{H}_{\beta}^{2})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})^{2}]$$

$$\sum_{\substack{i,j,k \\ \alpha \neq n+1}} \sum_{\beta} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ki}^{\beta} \boldsymbol{R}_{\beta jk}^{\alpha}=-\frac{1}{4} \tilde{c} \sum_{i} \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{i^{*}}^{2}+\sum_{\alpha, \beta \neq n+1}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \boldsymbol{H}_{\beta}^{2})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})^{2}]$$

因此，对任意实数 a，有

$$\frac{1}{2} \Delta \tau=\sum_{\substack{i,j,k \\ \alpha \neq n+1}}(\boldsymbol{h}_{ijk}^{\alpha})^{2}-a n\left(\frac{1}{4} \tilde{c}+H^{2}\right) \tau+$$
$$(1+a) \sum_{\substack{i,j,k,m \\ \alpha \neq n+1}} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}(\boldsymbol{h}_{im}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{jkl}^{m}+\boldsymbol{h}_{mj}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{ilk}^{m})+\frac{1}{4} \tilde{c} \sum_{i} \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{i^{*}}^{2}-$$
$$(1-a) \sum_{\alpha, \beta \neq n+1}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \boldsymbol{H}_{\beta}^{2})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})^{2}]+a \sum_{\alpha, \beta \neq n+1}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})]^{2} \tag{15}$$

在(15)式中取 $a=-1$ 即可得到(13)式.

定理 2 的证明 结合(7)式和引理 2，有

$$\frac{1}{2} \Delta \tau \geqslant \sum_{\substack{i,j,k \\ \alpha \neq n+1}}(\boldsymbol{h}_{ijk}^{\alpha})^{2}+\tau\left[n(1+H^{2})-\frac{3}{2} \tau\right] \tag{16}$$

又由于 M^{n} 是紧致的，对(16)式两边积分，再由 Stokes 定理得

$$\int_{M} \tau\left[n(1+H^{2})-\frac{3}{2} \tau\right] \mathrm{d} v_{M} \leqslant 0 \tag{17}$$

对于 $\alpha, \beta \neq n+1$，由于 $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}=(\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta}))$ 是 $n+2p$ 阶的对称矩阵，故可选取法标架场 $\boldsymbol{e}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}$；$\boldsymbol{e}_{1^{*}}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n^{*}}$；$\boldsymbol{e}_{(n+1)^{*}}, \cdots, \boldsymbol{e}_{(n+p)^{*}}$. 使其对角化，得

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})=\operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \boldsymbol{\delta}_{\alpha\beta} \tag{18}$$

在文献[13]中，有

$$\sum_{\substack{i,j,k,m\\ \alpha\neq n+1}} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}(\boldsymbol{h}_{im}^{\alpha}\boldsymbol{R}_{kjk}^{m}+\boldsymbol{h}_{km}^{\alpha}\boldsymbol{R}_{ijk}^{m}) \geqslant n\tau K \tag{19}$$

在(15) 式中取 $a=1$，应用(8),(18),(19) 式，有

$$\frac{1}{2}\Delta\tau \geqslant \sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha\neq n+1}} (\boldsymbol{h}_{ijk}^{\alpha})^2 - \frac{2}{3(n+2p-1)}\tau\left[n(1+H^2)-\frac{3}{2}\tau\right]$$

因此如果 M^n 是紧致的，有

$$-\int_M \tau\left[n(1+H^2)-\frac{3}{2}\tau\right]\mathrm{d}v_M \leqslant 0 \tag{20}$$

结合(17) 式和(20) 式，有

$$\int_M \tau\left[n(1+H^2)-\frac{3}{2}\tau\right]\mathrm{d}v_M = 0 \tag{21}$$

因此 $\boldsymbol{h}_{ijk}^{\alpha}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}$ 为常数 $(\alpha\neq n+1)$. 由此易得 τ 为常数. 由(21) 式我们得到一个关于 τ 和 S 的等式：

$$\tau\left[n\left(1+\frac{5}{2}H^2\right)-\frac{3}{2}S\right]=0$$

若 $S<\frac{2}{3}n\left(1+\frac{5}{2}H^2\right)$ 可推出 $\tau=0$，则 M^n 是 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的全脐子流形.

若 $S=\frac{2}{3}n\left(1+\frac{5}{2}H^2\right)=0$，由文献[9] 中的定理 2 得：当 $n=2$ 时，M^2 是局部等距于半径为 $\sqrt{\frac{3}{1+H^2}}$ 的球面 $S^2\left(\sqrt{\frac{3}{1+H^2}}\right)$.

定理 3 的证明　若 $\tilde{c}\geqslant 0$，在(15) 式中取 $a=\frac{n+2p-2}{n+2p-1}$，由(8),(9),(19) 式，得

$$\frac{1}{2}\Delta\tau \geqslant \sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha\neq n+1}} (\boldsymbol{h}_{ijk}^{\alpha})^2 + \frac{2(n+2p)-3}{n+2p-1}n\tau\left[K-\frac{n+2p-2}{2(n+2p)-3}\left(\frac{1}{4}\tilde{c}+H^2\right)\right]\geqslant 0 \tag{22}$$

若 $K>\frac{n+2p-2}{2(n+2p)-3}\left(\frac{1}{4}\tilde{c}+H^2\right)$ 可推出 $\tau=0$，则 M^n 是 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的全脐子流形.

若 $K=\frac{n+2p-2}{2(n+2p)-3}\left(\frac{1}{4}\tilde{c}+H^2\right)$，则不等式(8) 和(9) 成为等式，得：

$$\sum_{\alpha\neq n+1}[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^2]^2 = \Big[\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^2\Big]^2 = \sum_{\alpha\neq n+1}[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^2]^2 + \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^2\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\beta}^2 \tag{23}$$

$$(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})^2 = 2[(\lambda_i^{\alpha})^2+(\lambda_j^{\alpha})^2] = 2\sum_k(\lambda_k^{\alpha})^2 \tag{24}$$

由(23) 式，存在 $n+2p-2$ 个 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^2=0$，不妨设

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{n+3}^2=\cdots=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{n+p}^2=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{1^*}^2=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{(n+p)^*}^2=0 \tag{25}$$

由(24) 式，得：

$$\lambda_i^{n+2}=-\lambda_j^{n+2} \qquad (\lambda_i^{n+2})^2+(\lambda_j^{n+2})^2=\sum_k(\lambda_k^{n+2})^2$$

则 $\lambda_i^{n+2}=0$，其中 $i,j=1,\cdots,n$. 因此

$$\tau=\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^2=0$$

则 M^n 是 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的全脐子流形.

若 $\tilde{c}<0$，显然

$$\frac{1}{4}\tilde{c}\sum_i\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{i^*}^2 \geqslant \frac{1}{4}\tilde{c}\sum_{\alpha\neq n+1}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^2=\frac{1}{4}\tilde{c}\tau$$

结合(8),(9),(15),(19) 式，得

$$\frac{1}{2}\Delta\tau \geqslant \sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha\neq n+1}} (\boldsymbol{h}_{ijk}^{\alpha})^2 + \frac{2(n+2p)-3}{n+2p-1} n\tau \left[K - \frac{n+2p-2}{2(n+2p)-3} \left(\frac{1}{4}\tilde{c} + H^2 \right) + \frac{1}{4}\tilde{c}\, \frac{(n+2p)-1}{n[2(n+2p)-3]} \right]$$

由(23),(24),(25)式,得到 M^n 是 $\widetilde{M}(\tilde{c})$ 中的全脐子流形.

参考文献:

[1] 白正国,沈一兵,水乃翔,等.黎曼几何初步:修订版[M].北京:高等教育出版社,2004:304-319.

[2] BLAIR D E. On the Geometric Meaning of the Bochner Tensor [J]. Geometrae Dedicata, 1975(4): 33-38.

[3] CHEN B Y, OGIUE K. On Totally Real Submanifolds [J]. Trans Amer Math Soc, 1974, 193: 257-266.

[4] HOUH C S. Some Totally Real Minimal Surface in CP^2 [J]. Proc Amer Math Soc, 1973, 40(1): 240-244.

[5] 刘 敏.复射影空间中具有常平均曲率的全实子流形[J].吉林大学学报(理学版),2013,51(6):1023-1028.

[6] 王 霞.复空间形式的紧致全实伪脐子流形[J].华南师范大学学报(自然科学版),2007(4):6-10.

[7] LI A M, LI J M. An Intrinsic Rigidity Theorem for Minimal Submanifolds in a Sphere [J]. Arch Math, 1992, 58: 582-594.

[8] 纪永强.子流形几何[M].北京:科学出版社,2004:198-212.

[9] ZHANG L. On Totally Real Pseudo-Umbilical Submanifolds in a Complex Projective Space [J]. J Math Res Exposition, 2008, 28(2): 421-428.

[10] CHERN S S, CARMO M D, KOBAYASHI S. Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length [M]. New York: Springer-Verlag, 1970: 57-75.

[11] YANO K, KON M. Totally Real Submanifolds of Complex Space Forms II [J]. Kodai Math Sem Rep, 1976, 27(3): 385-399.

[12] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature I [J]. Amer J Math, 1974, 96(2): 346-366.

[13] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature II [J]. Amer J Math, 1975, 97(1): 76-100.

[14] 赵盼盼,姚纯青,王新敬.拟常曲率流形中具有常平均曲率的子流形[J].西南大学学报(自然科学版),2015,37(4):30-34.

[15] 何盼盼,姚纯青.球面上具有平行平均曲率向量的子流形[J].西南大学学报(自然科学版),2015,37(6):72-75.

Totally Real Pseudo-Umbilical Submanifolds of a Complex Space with a Parallel Mean Curvature Vector

SUN Bao-lei, HE Jun-xiu, YAO Chun-qing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let M^n be a compact totally real pseudo-umbilical submanifold in a complex space form. In this paper, we study the position of the parallel umbilical normal vector field of in the normal bundle. With the method of moving frames, we obtain some intrinsic rigidity theorems such that becomes totally umbilical submanifold.

Key words: complex space form; totally real pseudo-umbilical submanifold; totally umbilical submanifold; parallel mean curvature vector

责任编辑 廖 坤