第 38 卷第 3 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2016 年 3 月
Vol. 38　No. 3　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Mar.　2016

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.03.014

稳健贝叶斯方法在指数保费原理下的应用①

胡莹莹，　吴黎军，　孙　毅

新疆大学 数学与系统科学学院，乌鲁木齐 830046

摘要：稳健贝叶斯方法可用来处理先验信息的不确定性问题，把先验分布限定在 Γ 族，由此得到一些最优准则. 结合先验分布的 ε -代换类，在指数保费原理下得出稳健贝叶斯保费和后验 Γ -极小极大保费.

关　键　词：稳健贝叶斯方法；指数保费原理；后验 Γ -极小极大保费

中图分类号：O212.8　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2016)03-0083-07

在贝叶斯统计推断中，在特定的损失函数和指定的先验分布下得到最终结果. 事实上，绝大多数情况下是不知道先验信息的确切分布的，而在计算中所假定的任何先验分布都只是真实分布的一个近似. 造成这种情况的原因可能是：决策者不能确定所给出的先验分布是否正确，要么是两个或者两个以上的决策者对先验分布的假定不统一. 针对这种先验信息的不确定性问题，通常运用稳健贝叶斯方法把先验分布限定在某类 Γ－族，从而得到贝叶斯估计的一个取值范围. 可本文的目的不是得到这样一个取值范围，而是设法找到这个取值范围内的一个最优值. 在稳健贝叶斯方法中取最优值有下面几种方法：Γ -极小极大准则[1-2]、条件 Γ -极小极大准则[3-4]、最稳定准则[5-6]、后验 Γ -极小极大准则[7].

本文计算最优值时使用后验 Γ -极小极大(PRGM) 准则，即结合传统的贝叶斯方法和稳健贝叶斯方法在一个贝叶斯保费区间估计中确定一个最合适的保费[8-10].

有些学者还把稳健贝叶斯方法中的先验分布类扩展到文献[11－17]中提到的先验的 ε -代换类，即先验分布为以下形式：

$$\Gamma_\varepsilon=\{\pi_\varepsilon=(1-\varepsilon)\pi_\circ+\varepsilon\pi:\pi\in\Gamma,\ \varepsilon\in[0,1]\}$$

其中：$\pi_\circ$ 为贝叶斯分析中指定的先验分布，π 是 Γ 族中任意一个先验分布，$\varepsilon\in[0,1]$ 反映了指定的先验分布 $\pi_\circ$ 的不确定性. 关于 ε -代换类下后验 Γ -极小极大估计和预测可参见文献[18－19]. 不同的保险公司可根据自己的实际情况选取不同的保费原理，而每个保费原理都对应一个特定的损失函数. 在不同损失函数下计算 PRGM 保费可参见文献[4，8－10，19－21].

指数保费原理是保险公司最重要的保费原理之一，其表达形式简单，并且作为风险测度满足保费原理的许多好的性质，如：正的安全负荷性、合理风险附加、转移不变性、对独立风险的可加性、单调性等，在实际中得到广泛运用.

指数保费原理的定义如下：

定义 1[22]　若取损失函数 $L(X,P)=(\mathrm{e}^{\alpha P}-\mathrm{e}^{\alpha X})^2$，则使得期望损失函数 $E[L(X,P)]$ 达到最小的保费为 $P=\dfrac{1}{\alpha}\log[E(\mathrm{e}^{\alpha X})]$，称之为指数保费.

---

① 收稿日期：2015-01-22
基金项目：国家自然科学基金项目(11361058).
作者简介：胡莹莹(1985-)，女，河南商丘人，硕士研究生，主要从事保险精算研究.
通信作者：吴黎军，教授.

本文进一步运用损失函数的方法在指数保费原理下运用稳健贝叶斯方法计算稳健贝叶斯保费和PRGM保费.

1　稳健贝叶斯保费

假定随机变量 $\boldsymbol{X}$ 代表个体风险的索赔额，其分布函数为 $F(\cdot \mid \theta)$，密度函数是 $f(\cdot \mid \theta)$，其中 $\theta \in \Theta$. 若风险参数 θ 已知，则可用 θ 的某个函数 $P_R(\theta)$ 来估计未来的保费，我们称之为风险保费或个体保费. 文献[22]计算出指数保费原理下风险 X 的风险保费为 $P_R(\theta)=\dfrac{1}{\alpha}\log[E(\mathrm{e}^{\alpha X} \mid \theta)]$.

通常情况下，风险参数 θ 是未知的，从而风险保费 $P_R(\theta)$ 也是未知的. 虽然风险参数 θ 未知，假定知道 θ 的分布为 $\pi(\theta)$，精算学称 $\pi(\theta)$ 为结构分布，统计学中称之为先验分布. 本文的目的就是运用贝叶斯理论的相关知识估计风险保费 $P_R=P_R(\theta)$，记风险保费的所有估计值为集合 D.

在精算中，当我们事先不知道历史索赔数据时，我们通过最小化期望损失 $E^{\pi(\theta)}[L(P_R, P)]$ 收取集体保费 P_C^{π}，其中 $E^{\pi(\theta)}[\cdot]$ 是关于先验分布 $\pi(\theta)$ 求期望. 当历史索赔数据已知时，可以通过最小化期望损失 $E^{\pi(\theta \mid x)}[L(P_R, P)]$ 收取贝叶斯保费 $P_B^{\pi} \equiv P_B^{\pi}(x)$，其中 $E^{\pi(\theta \mid x)}[\cdot]$ 是关于先验分布 $\pi(\theta \mid x)$ 求期望.

下面的定理1就是在指数保费原理下结合先验分布 $\pi(\theta)$ 的 ε-代换类 $\pi_{\varepsilon}(\theta)$ 计算得出的集体保费 P_C^{π} 和贝叶斯保费 P_B^{π}.

定理1　给定 $\theta \in \Theta$，假设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一列独立同分布的随机变量，其密度函数为 $f(x \mid \theta)$. 考虑混合先验分布：

$$\pi_{\varepsilon}(\theta)=(1-\varepsilon)\cdot\pi_0(\theta)+\varepsilon\cdot\pi(\theta)$$

则：

(i) 后验分布

$$\pi_{\varepsilon}(\theta \mid x)=\lambda\cdot\pi_0(\theta \mid x)+(1-\lambda)\cdot\pi(\theta)$$

其中

$$\lambda \equiv \lambda(x)=\frac{(1-\varepsilon)\cdot m_{\pi_0}(x)}{(1-\varepsilon)\cdot m_{\pi_0}(x)+\varepsilon\cdot m_{\pi}(x)}$$

$$m_{\pi_0}(x)=\int_{\theta\in\Theta} f(x \mid \theta)\cdot\pi_0(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad m_{\pi}(x)=\int_{\theta\in\Theta} f(x \mid \theta)\cdot\pi(\theta)\mathrm{d}\theta$$

(ii) 在指数保费原理下，关于混合先验 $\pi_{\varepsilon}(\theta)$ 的集体保费 $P_C^{\pi_{\varepsilon}}$ 为：

$$P_C^{\pi_{\varepsilon}}=\frac{1}{\alpha}\log[(1-\varepsilon)\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot P_C^{\pi_0}}+\varepsilon\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot P_C^{\pi}}]$$

其中

$$P_C^{\pi_0}=\frac{1}{\alpha}\log[E^{\pi_0(\theta)}(\mathrm{e}^{\alpha\cdot{}_RP})]$$

和

$$P_C^{\pi}=\frac{1}{\alpha}\log[E^{\pi(\theta)}(\mathrm{e}^{\alpha\cdot{}_RP})]$$

分别为关于先验 $\pi_0(\theta)$ 和 $\pi(\theta)$ 的集体保费.

(iii) 在指数保费原理下，关于混合先验 $\pi_{\varepsilon}(\theta)$ 的贝叶斯保费 $P_B^{\pi_{\varepsilon}}$ 为：

$$P_B^{\pi_{\varepsilon}}=\frac{1}{\alpha}\log[\lambda\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot P_B^{\pi_0}}+(1-\lambda)\mathrm{e}^{\alpha\cdot P_B^{\pi}}]$$

其中

$$P_B^{\pi_0}=\frac{1}{\alpha}\log[E^{\pi_0(\theta \mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha\cdot{}_RP})]$$

和

$$P_B^{\pi}=\frac{1}{\alpha}\log[E^{\pi(\theta|x)}(\mathrm{e}^{\alpha\cdot _RP})]$$

分别为关于后验 $\pi_0(\theta \mid x)$ 和 $\pi(\theta \mid x)$ 的贝叶斯保费.

证　(i)

$$\pi_\varepsilon(\theta \mid x)=\frac{f(x \mid \theta)\cdot\pi_\varepsilon(\theta)}{\int_{\theta\in\Theta}f(x \mid \theta)\cdot\pi_\varepsilon(\theta)\mathrm{d}\theta}=$$

$$\frac{(1-\varepsilon)\cdot f(x \mid \theta)\pi_0(\theta)+\varepsilon\cdot f(x \mid \theta)\cdot\pi(\theta)}{(1-\varepsilon)\cdot\int_{\theta\in\Theta}f(x \mid \theta)\pi_0(\theta)\mathrm{d}\theta+\varepsilon\cdot\int_{\theta\in\Theta}f(x \mid \theta)\cdot\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}=$$

$$\frac{(1-\varepsilon)\cdot m_{\pi_0}(x)\cdot\pi_0(\theta \mid x)+\varepsilon\cdot m_\pi(x)\cdot\pi(\theta \mid x)}{(1-\varepsilon)\cdot m_{\pi_0}(x)+\varepsilon\cdot m_\pi(x)}=$$

$$\lambda\cdot\pi_0(\theta \mid x)+(1-\lambda)\cdot\pi(\theta \mid x)$$

(ii) 计算关于先验 $\pi_\varepsilon(\theta)$ 的集体保费 $P_C{}^{\pi_\varepsilon}$，就是最小化下面的关于 P 的函数 $H(P)$，

$$H\triangleq H(P)\triangleq E^{\pi_\varepsilon(\theta)}[L(P_R, P)]=$$

$$\int_{\theta\in\Theta}L(P_R, P)\cdot\pi_\varepsilon(\theta)\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_{\theta\in\Theta}(\mathrm{e}^{\alpha\cdot _RP}-\mathrm{e}^{\alpha\cdot P})^2\cdot\pi_\varepsilon(\theta)\mathrm{d}\theta$$

下面分别对 H 关于 P 求一阶和二阶导数：

$$\frac{\partial H}{\partial P}=-2\alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha P}\int_{\theta\in\Theta}(\mathrm{e}^{\alpha\cdot _RP}-\mathrm{e}^{\alpha\cdot P})\cdot\pi_\varepsilon(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial P^2}=2\alpha^2\cdot\mathrm{e}^{\alpha P}\int_{\theta\in\Theta}(\mathrm{e}^{\alpha\cdot _RP}-\mathrm{e}^{\alpha\cdot P})\cdot\pi_\varepsilon(\theta)\mathrm{d}\theta+2\alpha^2\cdot\mathrm{e}^{2\alpha P}$$

故当 $P=P_R$ 时，H 取到唯一最小值. 令$\dfrac{\partial H}{\partial P}=0$，则

$$\mathrm{e}^{\alpha P}=\int_{\theta\in\Theta}\mathrm{e}^{\alpha P_R}\cdot\pi_\varepsilon(\theta)\mathrm{d}\theta=$$

$$(1-\varepsilon)\cdot\int_{\theta\in\Theta}\mathrm{e}^{\alpha P_R}\cdot\pi_0(\theta)\mathrm{d}\theta+\varepsilon\cdot\int_{\theta\in\Theta}\mathrm{e}^{\alpha P_R}\cdot\pi(\theta)\mathrm{d}\theta=$$

$$(1-\varepsilon)\cdot E^{\pi_0(\theta)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})+\varepsilon\cdot E^{\pi(\theta)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})$$

所以，

$$P_C{}^{\pi_\varepsilon}=\frac{1}{\alpha}\log[(1-\varepsilon)\cdot E^{\pi_0(\theta)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})+\varepsilon\cdot E^{\pi(\theta)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})]=$$

$$\frac{1}{\alpha}\log[(1-\varepsilon)\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot P_C{}^{\pi_0}}+\varepsilon\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot P_C^{\pi}}]$$

(iii) 计算关于先验 $\pi_\varepsilon(\theta)$ 的贝叶斯保费 $P_B^{\pi_\varepsilon}$，就是最小化下面的关于 P 的函数 $G(P)$，

$$G\triangleq G(P)\triangleq E^{\pi_\varepsilon(\theta|x)}[L(P_R, P)]=$$

$$\int_{\theta\in\Theta}L(P_R, P)\cdot\pi_\varepsilon(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_{\theta\in\Theta}(\mathrm{e}^{\alpha\cdot _RP}-\mathrm{e}^{\alpha\cdot P})^2\cdot\pi_\varepsilon(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta$$

下面对 G 关于 P 分别求一阶和二阶导数，则有

$$\frac{\partial G}{\partial P}=-2\alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha P}\int_{\theta\in\Theta}[\mathrm{e}^{\alpha\cdot _RP}-\mathrm{e}^{\alpha\cdot P}]\cdot\pi_\varepsilon(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}=2\alpha^2\cdot\mathrm{e}^{\alpha P}\int_{\theta\in\Theta}[\mathrm{e}^{\alpha\cdot _RP}-\mathrm{e}^{\alpha\cdot P}]\cdot\pi_\varepsilon(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta+2\alpha^2\cdot\mathrm{e}^{2\alpha P}$$

故当 $P=P_R$ 时，G 取到唯一最小值. 令 $\dfrac{\partial G}{\partial P}=0$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\alpha P} &= E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R}) = \\
&\int_{\theta\in\Theta}\mathrm{e}^{\alpha P_R}\cdot\pi_\varepsilon(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta = \\
&\lambda\cdot E^{\pi_0(\theta\mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})+(1-\lambda)\cdot E^{\pi(\theta\mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})
\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}
P_B^{\pi_\varepsilon} &= \frac{1}{\alpha}\log[\lambda\cdot E^{\pi_0(\theta\mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})+(1-\lambda)\cdot E^{\pi(\theta\mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})] = \\
&\frac{1}{\alpha}\log[\lambda\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot P_B^{\pi_0}}+(1-\lambda)\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot P_B^{\pi}}]
\end{aligned}$$

2 后验 Γ-极小极大保费

当不同的精算师对先验信息的认识不同或者由于历史数据有限而不能得出精确的先验分布时，要采用稳健贝叶斯的方法，使先验信息在 Γ 族中变动时决策法则 P 最具有稳健性，即最小化最大贝叶斯风险. 记

$$\rho[\pi_\varepsilon(\theta\mid X),P]=E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid X)}[L(P)]$$

即采取行为 P 的后验期望损失函数，它只能给出后验期望损失的范围，但仍不能确定哪一个值是最合适的. 这时我们可以用 PRGM 方法解决这个问题.

定义 2 设 $P_{PR,\Gamma_\varepsilon}\in D$ 是 PRGM 行为，如果满足：

$$\inf_{P\in D}\sup_{\pi_\varepsilon\in\Gamma_\varepsilon} r(P,P_B^{\pi_\varepsilon})=r(P_{PR,\Gamma_\varepsilon},P_B^{\pi_\varepsilon})$$

其中 $r_P(P,P_B^{\pi_\varepsilon})=\rho[\pi_\varepsilon(\theta\mid X),P]-\rho[\pi_\varepsilon(\theta\mid X),P_B^{\pi_\varepsilon}]$ 度量了选择行为 P 而不选择贝叶斯准则下的最优行为 $P_B^{\pi_\varepsilon}$ 的损失.

定理 2 给出了指数保费原理下的 PRGM 保费.

定理 2 设

$$\underline{P}\triangleq\underline{P}(x)=\inf_{\pi_\varepsilon\in\Gamma_\varepsilon}P_B^{\pi_\varepsilon}\qquad \overline{P}\triangleq\overline{P}(x)=\sup_{\pi_\varepsilon\in\Gamma_\varepsilon}P_B^{\pi_\varepsilon}$$

并且 $\underline{P}$ 和 $\overline{P}$ 是有限的，且满足 $\underline{P}<\overline{P}$. 则在指数保费原理下关于混合先验 Γ_ε 族的 PRGM 保费为

$$P_{PR,\Gamma_\varepsilon}\triangleq P_{PR,\Gamma_\varepsilon}(x)=\frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha\underline{P}}+\mathrm{e}^{\alpha\overline{P}}}{2}\right)$$

证 首先计算

$$\begin{aligned}
r_P(P,P_B^{\pi_\varepsilon}) &= \rho[\pi_\varepsilon(\theta\mid x),P]-\rho[\pi_\varepsilon(\theta\mid x),P_B^{\pi_\varepsilon}] = \\
&E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}[L(P_R,P)]-E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}[L(P_R,P_B^{\pi_\varepsilon})] = \\
&E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}[(\mathrm{e}^{\alpha P_R}-\mathrm{e}^{\alpha P})^2]-E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}[(\mathrm{e}^{\alpha P_R}-\mathrm{e}_B^{\alpha P^{\pi_\varepsilon}})^2] = \\
&E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}[\mathrm{e}^{2\alpha P}-2\mathrm{e}^{\alpha P}\cdot\mathrm{e}^{\alpha P_R}+2\mathrm{e}_B^{\alpha P^{\pi_\varepsilon}}\cdot\mathrm{e}^{\alpha P_R}-\mathrm{e}^{2\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}] = \\
&\mathrm{e}^{2\alpha P}-2\mathrm{e}^{\alpha P}\cdot E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})+2\mathrm{e}^{\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}\cdot E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})-\mathrm{e}^{2\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}
\end{aligned}$$

因为

$$P_B^{\pi_\varepsilon}=\frac{1}{\alpha}\log[E^{\pi_\varepsilon(\theta\mid x)}(\mathrm{e}^{\alpha P_R})]$$

所以

$$\begin{aligned}
r_P(P,P_B^{\pi_\varepsilon}) &= \mathrm{e}^{2\alpha P}-2\mathrm{e}^{\alpha P}\cdot\mathrm{e}^{\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}+2\mathrm{e}^{2\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}-\mathrm{e}^{2\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}} = \\
&(\mathrm{e}^{\alpha P}-\mathrm{e}^{\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}})^2
\end{aligned}$$

故有

$$\frac{\partial}{\partial P_B^{\pi_\varepsilon}} r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon}) = -2\alpha e^{\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}(e^{\alpha P} - e^{\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (P_B^{\pi_\varepsilon})^2} r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon}) = -2\alpha^2 e^{\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}(e^{\alpha P} - e^{\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}) + 2\alpha^2 \cdot e^{2\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}}$$

因此，当 $P_B^{\pi_\varepsilon} = P$ 时，$r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon})$ 有唯一最小值.

通过下面的三个步骤可计算出指数保费原理下的 PRGM 保费.

第一步，当 $P < \underline{P}$ 时，对 $r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon})$ 关于 $P_B^{\pi_\varepsilon}$ 求导得，

$$\frac{\partial}{\partial P_B^{\pi_\varepsilon}} r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon}) = -2\alpha e_B^{\alpha P^{\pi_\varepsilon}}(e^{\alpha P} - e^{\alpha P_B^{\pi_\varepsilon}})$$

因为 $P < \underline{P} < P_B^{\pi_\varepsilon}$，所以 $r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon})$ 关于 $P_B^{\pi_\varepsilon}$ 单调递增. 故

$$\sup_{\pi_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon} r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon}) = r_P(P, \overline{P})$$

令

$$f_1(P) = r_P(P, \overline{P}) = (e^{\alpha P} - e^{\alpha \overline{P}})^2$$

对 $f_1(P)$ 关于 P 求导，则有

$$f'_1(P) = 2\alpha \cdot e^{\alpha P}(e^{\alpha P} - e^{\alpha \overline{P}})$$

当 $P < \underline{P}$ 时，$f_1(P)$ 关于 P 单调递减. 于是有

$$\inf_{P<\underline{P}} f_1(P) = f_1(\underline{P})$$

所以，

$$\inf_{P<\underline{P}} \sup_{\pi_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon} r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon}) = r_P(\underline{P}, \overline{P}),\ f_1(\overline{P}) = 0$$

第二步，当 $P > \underline{P}$ 时，对 $r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon})$ 关于 $P_B^{\pi_\varepsilon}$ 求导可知 $r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon})$ 关于 $P_B^{\pi_\varepsilon}$ 单调递减，故

$$\sup_{\pi_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon} r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon}) = r_P(P, \underline{P})$$

令

$$f_2(P) = r_P(P, \underline{P}) = (e^{\alpha P} - e^{\alpha \underline{P}})^2$$

则有

$$\frac{\partial f_1(P)}{\partial P} = 2\alpha \cdot e^{\alpha P}(e^{\alpha P} - e^{\alpha \underline{P}})$$

当 $P > \overline{P}$ 时，$f_2(P)$ 关于 P 单调递增，于是有

$$\inf_{P>\overline{P}} f_2(P) = f_2(\overline{P})$$

所以，

$$\inf_{P>\overline{P}} \sup_{\pi_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon} r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon}) = r_P(\overline{P}, \underline{P}),\ f_2(\underline{P}) = 0$$

第三步，当 $\underline{P} < P < \overline{P}$ 时，分以下两种情况考虑，

$$\begin{cases} \underline{P} < P < P_B^{\pi_\varepsilon} < \overline{P} \\ \underline{P} < P_B^{\pi_\varepsilon} < P < \overline{P} \end{cases}$$

对于这两种情况，

$$\sup_{\pi_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon} r_P(P, P_B^{\pi_\varepsilon}) = \max\{r_P(P, \overline{P}), r_P(P, \underline{P})\}$$

令

$$l(P) = f_1(P) - f_2(P) = (e^{\alpha \overline{P}} - e^{\alpha \underline{P}}) \cdot (e^{\alpha \overline{P}} - 2e^{\alpha P} + e^{\alpha \underline{P}})$$

显然，$l(P)$ 是连续的且关于 P 是单调递减的，又 $l(\underline{P}) \cdot l(\overline{P}) < 0$，所以必存在一个 $P^* \in (\underline{P}, \overline{P})$ 使得 $l(P^*) = 0$，此时 $r_P(P^*, \underline{P}) = r_P(P^*, \overline{P})$.

当 $\underline{P} < P < P^*$ 时，有 $l(P) > 0$，则

$$\max\{r_P(P,\overline{P}),\ r_P(P,\underline{P})\}=r_P(P,\overline{P})$$

此时 $r_P(P,\overline{P})$ 关于 P 单调递减，故

$$\inf_{\underline{P}<P<P^*} r_P(P,\overline{P})=r_P(P^*,\overline{P})$$

当 $P^*<P<\overline{P}$ 时，有 $l(P)<0$，则

$$\max\{r_P(P,\overline{P}),\ r_P(P,\underline{P})\}=r_P(P,\underline{P})$$

此时 $r_P(P,\underline{P})$ 关于 P 单调递增，故

$$\inf_{P^*<P<\overline{P}} r_P(P,\underline{P})=r_P(P^*,\underline{P})$$

所以

$$\inf_{\underline{P}<P<\overline{P}}\ \sup_{\pi_\varepsilon\in\Gamma_\varepsilon} r_P(P,P_B^{\pi_\varepsilon})=r_P(P^*,\underline{P})=r_P(P^*,\overline{P})$$

综合以上3个步骤，

$$\inf_{P\in D}\ \sup_{\pi_\varepsilon\in\Gamma_\varepsilon} r_P(P,P_B^{\pi_\varepsilon})=\inf_{\underline{P}<P<\overline{P}}\ \sup_{\pi_\varepsilon\in\Gamma_\varepsilon} r_P(P,P_B^{\pi_\varepsilon})=r_P(P^*,\underline{P})=r_P(P^*,\overline{P})$$

即可求出

$$P_{PR,\Gamma_\varepsilon}(x)=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{e^{\alpha\underline{P}}+e^{\alpha\overline{P}}}{2}\right)$$

3 结 论

提出后验 Γ-极小极大准则下的贝叶斯保费，是结合传统的贝叶斯方法和稳健贝叶斯方法得出的一种新的保费. 这种方法相对简单，在精算科学中这是一种新的方法，它的优势在于：此方法是一个决策原理，更适合一个有较少经验的决策者，利用后验 Γ-极小极大方法在一个贝叶斯保费区间估计中确定一个最合适的保费. 相对传统的贝叶斯准则，后验 Γ-极小极大方法提供了一个更简洁清晰的准则，这种方法在保险公司制定保费的实际工作中有重要的帮助. 在精算科学中，后验 Γ-极小极大准则是一种新的方法，它的使用比 Γ-极小极大方法更容易得到保费公式.

参考文献：

[1] ROBBINS H. Asymptotically Sub-Minimax Solutions to Compound Statistical Decision Problems [M]. New York: Springer, 1985.

[2] GOOD I J. Rational Decisions [J]. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), 1952, 14(1): 107-114.

[3] DASGUPTA A, STUDDEN W J. Frequentist Behavior of Robust Bayes Estimates of Normal Means [J]. Statistics and Decisions, 1989, 7(4): 333-362.

[4] BETRO B, RUGGERI F. Conditional Gamma-Minimax Actions Under Convex Losses [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1992, 21(4): 1051-1066.

[5] MECZARSKI M, ZIELINSKI R. Stability of the Bayesian Estimator of the Poisson Mean under the Inexactly Specified Gamma Prior [J]. Statistics & probability letters, 1991, 12(4): 329-333.

[6] BORATYNSKA A, MCECZARSKI M. Robust Bayesian Estimation in the One-Dimensional Normal Model [J]. Statistics & Risk Modeling, 1994, 12(3): 221-230.

[7] ZEN M, DASGUPTA A. Estimating a Binomial Parameter: Is Robust Bayes Real Bayes [J]. Statistics and Decisions, 1993, 11: 37-60.

[8] INSUA D, RUGGERI F, VIDAKOVIC B. Some Results on Posterior Regret Gamma-Minimax Estimation [J]. Statistics and Decisions, 1995, 13: 315-331.

[9] BORATYNSKA A. Posterior Regret Gamma-Minimax Estimation in a Normal Model with Asymmetric Loss Function [J]. Applicationes Mathematicae, 2002, 29(1): 7-13.

[10] JOZANI M J, PARSIAN A. Posterior Regret Gamma-Minimax Estimation and Prediction with Applications on k-Records Data under Entropy Loss Function [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2008, 37(14): 2202-2212.

[11] BERGER J. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis [M]. New York: Springer, 1985.
[12] BERGER J, MORENO E. Bayesian Robustness in Bidimensional Models: Prior Independence [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1994, 40(2): 161－176.
[13] SIVAGANESAN S. Range of Posterior Measures for Priors with Arbitrary Contaminations [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1988, 17(5): 1591－1612.
[14] SIVAGANESAN S, BERGER J. Ranges of Posterior Measures for Priors with Unimodal Contaminations [J]. The Annals of Statistics, 1989, 17(2): 868－889.
[15] SIVAGANESAN S. Sensitivity of Some Posterior Summaries When the Prior Is Unimodal with Specified Quantiles [J]. Canadian Journal of Statistics, 1991, 19(1): 57－65.
[16] DENIZ GE, VAZQUEZ F J, BASTIDA A H. Robust Bayesian Premium Principles in Actuarial Science [J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician), 2000, 49(2): 241－252.
[17] GOMEZ E, HEMANDEZ A, PEREZ J M. Measuring Sensitivity in a Bonus-Malus System [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 31(1): 105－113.
[18] GOMEZ E, PEREZ J M, VAZQUEZ F J. On the Use of Posterior Regret Gamma-Minimax Actions to Obtain Credibility Premiums [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39(1): 115－121.
[19] KARIMNEZHAD A, PARSIAN A. Robust Bayesian Methodology with Applications in Credibility Premium Derivation and Future Claim Size Prediction [J]. Advances in Statistical Analysis, 2014, 98(3): 287－303.
[20] BORATYNSKA A. Gamma-Minimax Prediction in Exponential Families with Quadratic Variance Function [M]. Warsaw: Polish Academy of Sciences, 2005.
[21] KIAPOUR A, NEMATOLLAHI N. Robust Bayesian Prediction and Estimation under a Squared Log Error Loss Function [J]. Statistics & Probability Letters, 2011, 81(11): 1717－1724.
[22] 温利民，吴贤毅. 指数保费原理下的经验厘定 [J]. 中国科学：数学，2011，41(10)：861－876.
[23] BORATYNSKA A. Robust Bayesian Prediction with Asymmetric Loss Function in Poisson Model of Insurance Risk [J]. Acta Universitatis Lodziensis, 2006, 196: 123－138.

Application of Robust Bayesian Methodology Under the Exponential Premium Principle

HU Ying-ying, WU Li-jun, SUN Yi
College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, China

Abstract: Robust Bayesian methodology can be used to deal with the uncertainty of priori information, and the prior distribution is restricted in the scope of Γ-cluster, from which some optimal rules can be derived. Combining with the ε-contaminated class of prior distribution, we obtain the robust Bayesian premium and posterior Γ-minimax premium under the exponential premium principle in the present paper.

Key words: robust Bayesian methodology; exponential premium principle; posterior regret Γ-minimax premium

责任编辑　张　枸