DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.03.015

考虑一般发生率的结核病模型的稳定性分析①

曾　豪，　王稳地，　闫　超，　苟知学

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：建立了一个考虑带有一般发生率、离散时滞和疾病复发的肺结核传播的动力学模型. 证明了解的正性和有界性，得到了基本再生数 R_0. 通过构造合适的 Lyapunov 泛函，得到当 $R_0 \leqslant 1$ 时，无病平衡点是全局渐近稳定的；当 $R_0 > 1$ 时，存在唯一的地方性平衡点，同时它也是全局渐近稳定的.

关　键　词：发生率；复发；全局稳定性；Lyapunov 泛函

中图分类号：O175　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2016)03-0090-07

结核病是由结核分枝杆菌感染引起的通过空气传播的一种慢性疾病，它是危害人类健康的重要传染病之一. 结核分枝杆菌是引起结核病的病原菌，一般通过呼吸道传播. 感染人体后，有 90% 的感染者终身保持携带状态而不引起发病，剩下 10% 的感染者中，约有 5% 的感染者在感染之后两年内发病，有 5% 的感染者在其一生中的某个时期发病[1]. 自文献[2]提出了四维的基本结核病动力学模型之后，结核病的感染模型引起了很多研究者的关注，他们建立了大量的模型来研究肺结核的感染过程[3-4]. 在传染病动力学和病毒动力学中，发生率起着重要作用. 研究发现，非线性发生率比双线性发生率更合理[5-6]. 基于此，文献[7]考虑非线性发生率 $\frac{\beta SI}{S+I}$，这里 β 表示感染率. 本文将在文献[7]的基础上考虑一般发生率函数 $f(S, I)$ 建立四维结核病传播模型，并对其进行稳定性分析.

我们设 $S(t), E(t), I(t), R(t)$ 分别表示 t 时刻易感个体的数量、已被感染但不具有传染性的个体数量、被感染且具有传染性的个体数量和恢复个体的数量. 建立如下的数学模型：

$$
\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= \Lambda - \mu S(t) - f(S(t), I(t)) \\
\dot{E}(t) &= f(S(t), I(t)) - \mathrm{e}^{-\mu\tau}\mathrm{e}^{-k\tau} f(S(t-\tau), I(t-\tau)) - \mu E(t) - k E(t) \\
\dot{I}(t) &= \mathrm{e}^{-\mu\tau}\mathrm{e}^{-k\tau} f(S(t-\tau), I(t-\tau)) + \delta R(t) - (\mu+\gamma+\alpha) I(t) + k E(t) \\
\dot{R}(t) &= \gamma I(t) - \mu R(t) - \delta R(t)
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中：Λ 表示易感个体常数输入率，μ 表示个体的自然死亡率，α 表示个体的病死率，γ 表示染病个体的恢复率，δ 表示恢复个体又变回到染病个体的疾病复发率，τ 表示疾病的潜伏期，k 表示个体由内源性激发直接从 E 仓室转移到 I 仓室的转移率，$\mathrm{e}^{-\mu\tau}$ 表示个体在 $t-\tau$ 时刻被感染到 t 时刻患病个体存活率. 这里所有的参数都是非负的.

为了研究系统(1)，根据生物意义考虑，我们假设 $f(S, I)$ 在 $\mathbb{R}_+^2$ 是连续可微的，且满足下列的假设：

---

① 收稿日期：2015-06-19

基金项目：国家自然科学基金项目(11171276).

作者简介：曾　豪(1988-)，男，河南驻马店人，硕士研究生，主要从事生物数学的研究.

通信作者：王稳地，教授，博士研究生导师.

1) 对 $I \geqslant 0$，有 $f(0, I)=0$；当 $S \geqslant 0$，有 $f(S, 0)=0$.

2) 对任意的 $S>0$，$I>0$，都有 $\dfrac{\partial f(S, I)}{\partial S}>0$；对任意的 $S \geqslant 0$，$I \geqslant 0$，有 $\dfrac{\partial f(S, I)}{\partial I} \geqslant 0$ 和 $I \dfrac{\partial f(S, I)}{\partial I}-f(S, I) \leqslant 0$.

另外对于系统(1)，我们定义一个非负连续的 Banach 空间 $\mathscr{C}=\mathscr{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_{+})$，对任意的 $\varphi \in \mathscr{C}$，$\|\varphi\|=\sup\limits_{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0}|\varphi|$. 系统(1) 的初始条件为：

$$S(\theta) \geqslant 0, E(\theta) \geqslant 0, I(\theta) \geqslant 0, R(\theta) \geqslant 0, \theta \in[-\tau, 0]$$

$$S(0)>0, E(0)=\int_{-\tau}^{0} f(S(u), I(u)) \mathrm{e}^{(\mu+k) u} \mathrm{d} u>0, I(0)>0, R(0)>0$$

命题 1 在满足初始条件的情况下，系统(1) 的解对于所有 $t>0$ 是非负的，且最终有界.

证 首先证明对所有的 $t>0$，$S(t)$ 都是正的. 利用反证法，假设存在最小的时间 t_1 使得 $S(t_1)=0$ 和 $S(t)>0$，$t \in(0, t_1)$. 代入系统(1) 的第一个方程得 $\dot{S}(t_1)=\Lambda>0$，则存在一个充分小的 ε，在$(t_1-\varepsilon, t_1)$ 上 $S(t)<0$，与在$(0, t_1)$ 上 $S(t)>0$ 相矛盾，所以对所有的 $t>0$，$S(t)>0$. 现在我们进一步证明对所有的 $t>0$ 有 $I(t)>0$ 和 $R(t)>0$. 令

$$a(t)=\mathrm{e}^{\mu \tau} f(S(t-\tau), I(t-\tau))+\delta R(t)$$

由系统(1)，得到

$$I(t)=I(0) \mathrm{e}^{-(\mu+\gamma+\alpha) t}+\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{(\mu+\gamma+\alpha)(\xi-t)} a(\xi) \mathrm{d} \xi$$

$$R(t)=R(0) \mathrm{e}^{-(\delta+\mu) t}+\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{(\mu+\delta)(\xi-t)} I(\xi) \mathrm{d} \xi$$

假设存在第一次最小时间 t_2 使得$\min\{I(t_2), R(t_2)\}=0$. 对其分两种情况进行证明. 首先考虑当 $0 \leqslant t<t_2$ 时，满足 $I(t_2)=0$，$I(t)>0$ 以及对 $0 \leqslant t \leqslant t_2$，满足 $R(t)>0$ 的情况. 则

$$\dot{I}(t_2)=\mathrm{e}^{-(\mu+k) \tau} f(S(t_2-\tau), I(t_2-\tau))+\delta R(t_2)+k E(t_2)$$

注意

$$E(t)=\int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{(\mu+k)(\xi-t)} f(S(\xi), I(\xi)) \mathrm{d} \xi$$

则有 $E(t_2)>0$. 因此当考虑 $0 \leqslant t<t_2$ 时，有 $I(t_2)=0$，$I(t)>0$. 以及当 $0 \leqslant t \leqslant t_2$ 时 $R(t)>0$，则有 $\dot{I}(t_2)>0$，且存在一个充分小的 ε_2，在$(t_2-\varepsilon_2, t_2)$ 上 $I(t)<0$. 从而与当 $0 \leqslant t<t_2$，有 $I(t_2)=0$，$I(t)>0$ 相矛盾. 同理可证当考虑 $0 \leqslant t<t_2$ 时，有 $R(t_2)=0$，$R(t)>0$. 以及当 $0 \leqslant t \leqslant t_2$，有 $I(t)>0$ 的情况时，若有 $\dot{R}(t_2)>0$，且存在一个充分小的 ε_2，在$(t_2-\varepsilon_2, t_2)$ 上 $R(t)<0$. 从而与当 $0 \leqslant t<t_2$ 时 $R(t_2)=0$，$R(t)>0$ 相矛盾. 因此对任意 $t>0$，有 $I(t)>0$ 和 $R(t)>0$. 最后易得对所有的 $t>0$，$E(t)>0$. 故系统(1) 的解是非负的. 特别地，当 $S(0)>0$，$E(0)>0$，$I(0)>0$，$R(0)>0$ 时，解是正的.

下面证明解是最终有界的. 令

$$L(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$$

沿着系统(1) 的轨线求导得

$$\dot{L}(t)=\dot{S}(t)+\dot{E}(t)+\dot{I}(t)+\dot{R}(t) \leqslant \Lambda-\mu L(t)$$

所以，由比较定理得

$$\limsup_{t \rightarrow+\infty} L(t) \leqslant \frac{\Lambda}{\mu}$$

因此系统(1) 的解是最终有界的. 故命题得证.

由命题 1 可得到系统(1) 的可行域为：

$$\Gamma=\left\{(S(t),E(t),I(t),R(t))\in\mathbb{R}_+^4: S(t)+E(t)+I(t)+R(t)\leqslant\frac{\Lambda}{\mu}\right\}$$

下面就在 Γ 里研究系统(1)的动力学性态.

1　基本再生数和平衡点

通过下一代矩阵[8]求解得到系统(1)的基本再生数

$$R_0=\frac{1}{2}\left[\mu e^{-(k+\mu)\tau}A+\sqrt{(\mu e^{-(k+\mu)\tau}A)^2+4kA}\right]$$

这里

$$A=\frac{(\mu+\delta)\dfrac{\partial f}{\partial I}(S_0,0)}{(\mu+k)[(\mu+\delta)(\mu+\gamma+\alpha)-\gamma\delta]}$$

定理 1　当 $R_0<1$ 时，系统(1)只有一个无病平衡点 E_0；当 $R_0>1$ 时，除了无病平衡点 E_0 外，系统(1)还有一个唯一的地方病平衡点 E_1.

证　很容易证明系统(1)只有一个无病平衡点 $E_0=\left(\dfrac{\Lambda}{\mu},0,0,0\right)$. 下面证明当 $R_0>1$ 时系统(1)只有唯一一个正平衡点，令

$$\begin{cases}\Lambda-\mu S-f(S,I)=0\\ f(S,I)-e^{-(\mu+k)\tau}f(S,I)-(\mu+k)E=0\\ e^{-\mu\tau}f(S,I)+\delta R-(\mu+\gamma+\alpha)I+kE=0\\ \gamma I-\mu R-\delta R=0\end{cases}\tag{2}$$

为了进一步简化表达，令

$$B=\frac{(\mu+k)[(\mu+\delta)(\mu+\gamma+\alpha)-\gamma\delta]}{(\mu e^{-(\mu+k)\tau}+k)(\mu+\delta)}$$

通过求解方程(2)得到：

$$S^*=\frac{\Lambda}{\mu}-\frac{B}{\mu}I^*\qquad E^*=\frac{(1-e^{-(k+\mu)\tau})B}{k+\mu}I^*\qquad R^*=\frac{\gamma}{\mu+\delta}I^*$$

由于 $S^*>0$，所以有 $I^*<\dfrac{\Lambda}{B}$. 其中 I^* 是下面方程的正解：

$$g(I)=f\left(\frac{\Lambda}{\mu}-\frac{B}{\mu}I,I\right)-BI\qquad I\in\left[0,\frac{\Lambda}{B}\right]$$

显然，$g(0)=0$ 和 $g\left(\dfrac{\Lambda}{B}\right)=-\Lambda<0$.

令

$$\Upsilon_0=(\mu e^{-(k+\mu)\tau}+k)A$$

我们可以得到

$$R_0=\frac{1}{2}\left[\mu e^{-(k+\mu)\tau}A+\sqrt{(2-\mu e^{-(k+\mu)\tau}A)^2+4(\Upsilon_0-1)}\right]$$

因此 $R_0=1$ 时，当且仅当 $\Upsilon_0=1$. 更进一步，对于 R_0 是关于 Υ_0 的一个单调函数，所以 $R_0>1$ 当且仅当 $\Upsilon_0>1$；当 $R_0\leqslant 1$ 当且仅当 $\Upsilon_0\leqslant 1$. 所以 Υ_0 可以看作是与 R_0 相互等价的一个阈值. 又因为 $\dfrac{\partial f}{\partial S}(S_0,0)=0$，所以

$$g'(0)=-\frac{B}{\mu}\frac{\partial f}{\partial S}(S_0,0)+\frac{\partial f}{\partial I}(S_0,0)-B=$$

$$B(\Upsilon_0 - 1) > 0$$

所以系统(1)存在地方病平衡点 $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ 且满足 $S^* > 0$，$0 < I^* < \frac{\Lambda}{B}$，$E^* > 0$，$R^* > 0$.

接下来，我们来证明 E_1 是系统(1)唯一的正平衡点. 利用假设的条件1),2)和 $I^* \leqslant \frac{\Lambda}{B}$，我们可以得到

$$\begin{aligned} g'(I^*) = & -\frac{B}{\mu}\frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) + \frac{\partial f}{\partial I}(S^*, I^*) - B = \\ & -\frac{B}{\mu}\frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*) + \frac{1}{I^*}\left[\frac{\partial f}{\partial S}(S^*, I^*)I^* - f(S^*, I^*)\right] < 0 \end{aligned}$$

又由于 $g(I)$ 是连续可微的，若 $g(I)=0$ 在区间 $\left[0, \frac{\Lambda}{B}\right]$ 至少存在两个正平衡点，则必须 $g'(I^*) \geqslant 0$，显然是矛盾的. 因此，我们证得当 $R_0 > 1$ 时在可行域 Γ 中系统(1)只有一个正平衡点 E_1.

2 稳定性分析

定理 2 当 $R_0 \leqslant 1$ 时，无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

证 定义 Lyapunov 泛函

$$V_1(t) = I(t) + \frac{k}{\mu + k}E(t) + \frac{\delta}{\mu + \delta}R(t) + \frac{\mu \mathrm{e}^{-(\mu+k)\tau}}{\mu + k}\int_{t-\tau}^{t} f(S(\xi), I(\xi))\mathrm{d}\xi$$

沿着系统(1)的轨线求导数得:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_1(t)}{\mathrm{d}t} = & \frac{k + \mu \mathrm{e}^{-(k+\mu)\tau}}{\mu + k} f(S(t), I(t)) - \left[(\mu + \gamma + \alpha) - \frac{\gamma\delta}{\mu + \delta}\right] I(t) \leqslant \\ & \frac{k + \mu \mathrm{e}^{-(k+\mu)\tau}}{\mu + k}\left[\lim_{I(t)\to 0} \frac{f(S_0, I(t)) - f(S_0, 0)}{I(t)}\right] I(t) - \\ & \frac{(\mu + \gamma + \alpha)(\mu + \delta) - \gamma\delta}{\mu + \delta} I(t) = \\ & (\Upsilon_0 - 1)\frac{(\mu + \gamma + \alpha)(\mu + \delta) - \gamma\delta}{\mu + \delta} I(t) \end{aligned} \tag{3}$$

因此 $R_0 \leqslant 1$ 时，$\frac{\mathrm{d}V_1(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$. 设 $D_0 = \{(S, E, I, R) \mid \dot{V}_1 = 0\}$. 易得 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ 是在 D_0 的最大不变集. 由 Lyapunov-LaSalle 不变集原理可以得到：当 $R_0 < 1$ 时，无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的. 最后我们在证明正平衡点 E_1 的全局性态之前，先假设 $f(S, I)$ 满足下列条件:

$$\begin{cases} \frac{I}{I^*} \leqslant \frac{f(S, I)}{(S, I^*)} \leqslant 1, \text{当 } 0 < I < I^* \text{ 时} \\ 1 \leqslant \frac{f(S, I)}{(S, I^*)} \leqslant \frac{I}{I^*}, \text{当 } I > I^* \text{ 时} \end{cases} \tag{4}$$

接下来，证明正平衡点 E_1 的全局稳定性.

定理 3 假设 $k=0$，当 $R_0 > 1$ 且条件(4)满足时，正平衡点 E_1 是全局渐近稳定的.

证 定义 Lyapunov 泛函

$$V_{21}(t) = S(t) - S^* - \int_{S^*}^{S(t)} \frac{f(S^*, I^*)}{f(\xi, I^*)}\mathrm{d}\xi + \mathrm{e}^{\mu\tau}\left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}\right) + \sigma\left(R - R^* - R^* \ln \frac{R}{R^*}\right)$$

这里的 $\sigma = \frac{\mathrm{e}^{\mu\tau}\delta}{\mu + \delta}$ 是正常数.

沿着系统(1)的轨线求导数得:

$$\frac{\mathrm{d}V_{21}}{\mathrm{d}t}=\left(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}\right)[\Lambda-\mu S(t)-f(S(t),I(t))]+$$
$$\mathrm{e}^{\mu\tau}\left(1-\frac{I^*}{I}\right)[\mathrm{e}^{-\mu\tau}f(S(t-\tau),I(t-\tau))+\delta R(t)-(\mu+\gamma+\alpha)I(t)]+$$
$$\sigma\left(1-\frac{R^*}{R}\right)(\gamma I(t)-\mu R(t)-\delta R(t))\triangleq A_1+A_2+A_3 \tag{5}$$

由于

$$\Lambda=\mu S^*+f(S^*,I^*)$$

将其代入 A_1 得：

$$A_1=\left(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}\right)(\mu S^*-\mu S(t)+f(S^*,I^*))-f(S,I)+f(S,I)\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}=$$
$$-\mu\left(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}\right)(S(t)-S^*)+f(S^*,I^*)-f(S^*,I^*)\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}-$$
$$f(S,I)+f(S,I)\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}$$

注意：

$$A_2=f(S(t-\tau),I(t-\tau))-\frac{I^*}{I}f(S(t-\tau),I(t-\tau))+\mathrm{e}^{\mu\tau}\delta R(t)-$$
$$\mathrm{e}^{\mu\tau}(\mu+\gamma+\alpha)I(t)-\mathrm{e}^{\mu\tau}\delta R(t)\frac{I^*}{I(t)}+\mathrm{e}^{\mu\tau}(\mu+\gamma+\alpha)I^*$$
$$A_3=\sigma\gamma I(t)-\mathrm{e}^{\mu\tau}\delta R(t)-\sigma\gamma I(t)\frac{R^*}{R}+\mathrm{e}^{\mu\tau}\delta R^*$$

将 A_1，A_2，A_3 相加，得到：

$$\frac{\mathrm{d}V_{21}(t)}{\mathrm{d}t}=-\mu\left(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}\right)(S(t)-S^*)+f(S^*,I^*)-f(S^*,I^*)\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}-$$
$$f(S,I)+f(S^*,I^*)\frac{f(S,I)}{f(S,I^*)}-\frac{I^*}{I}f(S(t-\tau),I(t-\tau))+$$
$$f(S(t-\tau),I(t-\tau))-\mathrm{e}^{\mu\tau}(\mu+\gamma+\alpha)I^*\frac{I(t)}{I^*}-\mathrm{e}^{\mu\tau}\delta R^*\frac{R(t)}{R^*}\frac{I^*}{I(t)}+$$
$$\mathrm{e}^{\mu\tau}(\mu+\gamma+\alpha)I^*+\sigma\gamma I^*\frac{I(t)}{I^*}-\sigma\gamma I^*\frac{I(t)}{I^*}\frac{R^*}{R}+\mathrm{e}^{\mu\tau}\delta R^* \tag{6}$$

定义

$$V_2(t)=V_{21}(t)+V_{22}(t)$$

这里

$$V_{22}(t)=\int_{t-\tau}^{t}\left[f(S(\xi),I(\xi))-f(S^*,I^*)-f(S^*,I^*)\ln\frac{f(S(\xi),I(\xi))}{f(S^*,I^*)}\right]\mathrm{d}\xi$$

沿着系统(1)的轨线求导数得：

$$\frac{\mathrm{d}V_{22}(t)}{\mathrm{d}t}=f(S(t),I(t))-f(S(t-\tau),I(t-\tau))-f(S^*,I^*)\ln\frac{f(S(t),I(t))}{f(S(t-\tau),I(t-\tau))} \tag{7}$$

因为 $f(S^*,I^*)=\mathrm{e}^{\mu\tau}(\mu+\gamma+\alpha)I^*-\frac{\gamma\delta}{\mu+\delta}\mathrm{e}^{\mu\tau}I^*$，$R^*=\frac{\gamma I^*}{\mu+\delta}$，$\sigma=\frac{\mathrm{e}^{\mu\tau}\delta}{\mu+\delta}$，可得：

$$\frac{\mathrm{d}V_2(t)}{\mathrm{d}t}=-\mu\left(1-\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}\right)(S(t)-S^*)-f(S^*,I^*)\left(\frac{f(S^*,I^*)}{f(S,I^*)}-1\right)+$$
$$f(S^*,I^*)\frac{f(S,I)}{f(S,I^*)}-\frac{I^*}{I}f(S(t-\tau),I(t-\tau))-(f(S^*,I^*)+\sigma\gamma I^*)\frac{I}{I^*}-$$

$$\sigma\gamma I^{*}\frac{I^{*}}{I(t)}\frac{R}{R^{*}}+f(S^{*},I^{*})+\sigma\gamma I^{*}+f(S^{*},I^{*})\ln\frac{f(S(t-\tau),I(t-\tau))}{f(S(t),I(t))}+$$

$$\sigma\left(\gamma I^{*}\frac{I}{I^{*}}-\gamma I^{*}\frac{I(t)}{I^{*}}\frac{R^{*}}{R}+\gamma I^{*}\right)\tag{8}$$

注意:

$$\ln\frac{f(S(t-\tau),I(t-\tau))}{f(S(t),I(t))}=\ln\frac{I^{*}f(S(t-\tau),I(t-\tau))}{I(t)f(S^{*},I^{*})}+\ln\frac{f(S^{*},I^{*})}{f(S,I^{*})}+\ln\frac{I(t)f(S(t),I^{*})}{I^{*}f(S(t),I(t))}$$

为了更好地简化表达,在本文中引入下列一些记号:

$$B_1=-\mu\left(1-\frac{f(S^{*},I^{*})}{f(S,I^{*})}\right)(S(t)-S^{*})$$

$$B_2=-f(S^{*},I^{*})\left(\frac{f(S^{*},I^{*})}{f(S,I^{*})}-1-\ln\frac{f(S^{*},I^{*})}{f(S,I^{*})}\right)$$

$$B_3=-f(S^{*},I^{*})\left(\frac{I^{*}f(S(t-\tau),I(t-\tau))}{I(t)f(S^{*},I^{*})}-1-\ln\frac{I^{*}f(S(t-\tau),I(t-\tau))}{I(t)f(S^{*},I^{*})}\right)$$

$$B_4=\sigma\gamma I^{*}\left(2-\frac{I(t)}{I^{*}}\frac{R^{*}}{R}-\frac{I^{*}}{I(t)}\frac{R}{R^{*}}\right)$$

$$B_5=-f(S^{*},I^{*})\left(\frac{I(t)f(S(t),I^{*})}{I^{*}f(S(t),I(t))}-1-\ln\frac{I(t)f(S(t),I^{*})}{I^{*}f(S(t),I(t))}\right)$$

$$B_6=f(S^{*},I^{*})\left(\frac{f(S(t),I^{*})}{f(S(t),I(t))}-1\right)\left(\frac{I(t)}{I^{*}}-\frac{f(S(t),I(t))}{f(S(t),I^{*})}\right)\tag{9}$$

因此由(8),(9)式得到:

$$\frac{\mathrm{d}V_2(t)}{\mathrm{d}t}\triangleq B_1+B_2+B_3+B_4+B_5+B_6$$

通过(4)式,我们可以得到不等式:

$$f(S^{*},I^{*})\left(\frac{f(S(t),I^{*})}{f(S(t),I(t))}-1\right)\left(\frac{I(t)}{I^{*}}-\frac{f(S(t),I(t))}{f(S(t),I^{*})}\right)\leqslant 0$$

成立. 因此,$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$ 和 $\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}=0$ 当且仅当 $S=S^{*}$,$I=I^{*}$,$R=R^{*}$. 通过 LaSalle's invariance 原理,系统(1)的子系统趋向最大的不变集 $M\subset\{(S,I,R):S=S^{*},I=I^{*},R=R^{*}\}$. 通过系统(1)的第二个方程我们获得 $E(t)=\int_{t-\tau}^{t}f(S(u),I(u))\mathrm{e}^{-\mu(t-u)}\mathrm{d}u$. 然后结合若 $R_0>1$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}S(t)=S^{*}$,$\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=I^{*}$,$\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=R^{*}$. 利用洛必达法则,我们可以得:

$$\lim_{t\to+\infty}E(t)=E^{*}$$

因此,当 $R_0>1$ 时,系统(1)的地方病平衡点 E_1 是全局渐近稳定的.

3 结 论

本文建立了一个考虑非线性发生率和离散时滞的结核病传播模型. 在计算得到基本再生数的表达式的同时获得了与 R_0 相互等价的阈值 Υ_0. 通过构造合适的 Lyapunov 泛函,得到当 $R_0\leqslant 1$ 时,无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$,$k=0$ 和发生率函数满足一些条件时,地方病平衡点是全局渐近稳定的. 最后应该指出,本文只获得了在 $k=0$ 的情况下,正平衡点的全局稳定性,还未得到满足 $k>0$ 时,正平衡点 E_1 的全局稳定性,在今后将进一步研究.

参考文献：

[1] SMALL P M, FUJIWARA P I. Management of Tuberculosis in the United States [J]. The New England Journal of Medicine, 2001, 345(3): 189－200.

[2] CASTILLO C C, FENG Zhi-lan. To Treat or Not to Treat: the Case of Tuberculosis [J]. Journal of Mathematical Biology, 1997, 35(6): 629－656.

[3] FENG Zhi-lan, HUANG Wen-zhang, CASTILLO C C, et al. On the Role of Variable Latent Periods in Mathematical Models for Tuberculosis [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2001, 13(2): 425－452.

[4] BHUNU C P, GARIRA W, MUKANDAVIRE Z, et al. Tuberculosis Transmission Model with Chemoprophylaxis and Treatment [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2008, 70(4): 1163－1191.

[5] SONG Xin-yu, AVIDAN U N. Global Stability and Periodic Solution of the Viral Dynamics [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 329(1): 281－297.

[6] 马知恩，周义仓，王稳地，等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京：科学出版社，2004：10－15.

[7] XU Rui. Global Dynamics of an SEIRI Epidemiological Model with Time Delay [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 436－444.

[8] DIEKMANN O, HEESTERBEEK J, METZ J A, et al. On the Definition and the Computation of the Basic Reproduction Ratio R_0 in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations [J]. Journal of Mathematical Biology, 1990, 28(4): 365－382.

Stability Analysis of a Tuberculosis Transmission Model with General Incidence

ZENG Hao, WANG Wen-di, YAN Chao, GOU Zhi-xue

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a tuberculosis transmission model concerning the general incidences, discrete time delay and disease relapse is studied. We prove the positivity and boundedness of the solutions and obtain the basic reproduction number R_0. Using the method of Lyapunov functions, we obtain that when $R_0 \leqslant 1$, the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable; and when $R_0 > 1$, there exists a unique endemic equilibrium, which is globally asymptotically stable under certain conditions.

Key words: incidence; relapse; global stability; Lyapunov function

责任编辑　张　枸