DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2016.03.016

麦克斯韦分布极值的矩的渐近展开[①]

黄建文，　张　鹏，　刘衍民，　任泽容

遵义师范学院 数学与计算科学学院，贵州 遵义 563002

摘要： 得到了麦克斯韦分布规范化最大值的矩的高阶渐近展开式. 作为辅助结果，得到了规范化最大值的矩的趋于相应的极值分布的矩的收敛速度.

关 键 词： 矩的展开；极值分布；最大值；麦克斯韦分布

中图分类号： O211.4　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2016)03-0097-07

设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一列独立同服从麦克斯韦分布的随机变量序列. $M_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$ 表示随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 的部分最大值. 麦克斯韦分布的概率密度定义为

$$f_\sigma(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \qquad x > 0$$

其中参数 $\sigma > 0$，令 $F_\sigma(x)$ 表示相应的麦克斯韦分布函数.

文献[1]研究了麦克斯韦分布的 Mills' 类型率和分布的尾部表示，并且证明 $F_\sigma \in D(\Lambda)$，即：存在赋范常数 $a_n > 0$ 和 $b_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \lim_{n\to\infty} F_\sigma^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x) \tag{1}$$

其中

$$\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$$

文献[2]得到了独立同服从麦克斯韦分布的随机变量序列最大值分布的一致收敛速度. 文献[3]将文献[2]的结果推广到广义麦克斯韦分布. 对于规范化最大值分布的高阶渐近展开，见参考文献[4-5].

文献[6-7]研究了极值的矩收敛. 对于更多的详细内容可参阅参考文献[8]. 本文主要研究麦克斯韦分布最大值的矩的高阶渐近展开. 对于麦克斯韦分布，上面已经提到文献[1]证明了在赋范常数 a_n 和 b_n 满足下列方程：

$$\begin{cases} 1 - F_\sigma(b_n) = n^{-1} \\ a_n = \sigma^2 b_n^{-1} \end{cases} \tag{2}$$

的条件下，(1) 式成立. 由文献[8]命题 2.1(ⅲ)知，对于所有的正整数 r 和充分大的 n，有

$$\Delta_r(n) = E\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)^r - \int_{-\infty}^{\infty} x^r \mathrm{d}\Lambda(x) \to 0$$

下面将得到 $E\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)^r$ 的渐近展开，进而得到 $\Delta_r(n)$ 的收敛速度. 有关给定分布极值的分布和矩的渐近

① 收稿日期：2014-12-15

基金项目：国家自然科学基金(71461027)；贵州省科技基金(黔科合 J 字 LKZS[2014]22 号；黔科合 J 字 LKZS[2014]29 号)；贵州省科技合作计划课题资助项目(黔科合 LH 字[2015]7001 号；黔科合 LH 字[2015]7006 号)；黔科合 LH 字[2015]7055 号.

作者简介：黄建文(1988-)，男，甘肃甘谷人，讲师，主要从事极值统计分析的研究.

展开的研究，见参考文献[9－12].

对于非负整数 r，令

$$m_r(n)=E\left(\frac{M_n-b_n}{a_n}\right)^r=\int_{-\infty}^{\infty}x^r\mathrm{d}F_\sigma^n(a_nx+b_n)$$

并且

$$m_r=EX^r=\int_{-\infty}^{\infty}x^r\mathrm{d}\Lambda(x)$$

分别表示 $\frac{M_n-b_n}{a_n}$ 和 $X\sim\Lambda(x)$ 的 r 阶矩，并且赋范常数 a_n 和 b_n 由(2)式给出.

定理 1 设独立同分布的随机变量序列 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 都服从麦克斯韦分布. 赋范常数 a_n 和 b_n 由(2)式给出. 当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}&b_n^2[b_n^2(m_r(n)-m_r)+2^{-1}r\sigma^2(m_{r+1}-2m_r)]\to\\&r\sigma^4\ [2^{-1}(r-3)m_r-2^{-1}(r+3)m_{r+1}+8^{-1}(r+3)m_{r+2}]\end{aligned}\tag{3}$$

由(2)式可得，$b_n^2\sim 2\sigma^2\log n$，从而，由定理 1 可得如下所述的矩的收敛速度.

推论 1 对于麦克斯韦分布规范化最大值的矩，当 n 充分大时，有

$$\Delta_r(n)\sim-\frac{r(m_{r+1}-2m_r)}{4\log n}$$

为了证明主要结果，我们给出几个必要的引理，其中引理 1 和引理 2 分别是文献[1]中的定理 1 和文献[5]中的定理 1.

引理 1[1] 设 $F_\sigma(x)$ 和 $f_\sigma(x)$ 分别表示麦克斯韦分布的累积分布函数和概率密度函数. 对于一切 $x>0$，有

$$\frac{\sigma^2}{x}\left(1+\frac{\sigma^2}{x}\right)^{-1}<\frac{1-F_\sigma(x)}{f_\sigma(x)}<\frac{\sigma^2}{x}\left(1+\frac{\sigma^2}{x}\right)$$

引理 2[5] 设 $F_\sigma(x)$ 表示麦克斯韦分布的累积分布函数. 赋范常数 a_n 和 b_n 由(2)式给出. 当 $n\to\infty$ 时，有

$$b_n^2[b_n^2(F_\sigma^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x)]\to\left(w(x)+\frac{k^2(x)}{2}\right)\Lambda(x)$$

其中：

$$k(x)=\frac{1}{2}\exp(-x)\sigma^2(x^2-2x)\qquad w(x)=-\frac{1}{8}\exp(-x)\sigma^4(x^4-4x^3-16x)$$

引理 3 对于任意常数 $0<d<1$ 和 $i,j\geqslant 0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-d\log b_n}b_n^i\ |x|^j\Lambda(x)\mathrm{d}x=0$$

证 证明与文献[10]中的引理 1 证明类似.

引理 4 对于任意常数 $0<d<1$ 和 $i,j\geqslant 0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-d\log b_n}b_n^i\ |x|^jF_\sigma^n(a_nx+b_n)\mathrm{d}x=0$$

证 注意到 $a_n=\sigma^2b_n^{-1}$，由引理 1，对于 $r>0$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}&b_n^rF_\sigma^n(b_n-d\sigma^2b_n^{-1}\log b_n)<b_n^r\exp(-n(1-F_\sigma(b_n-d\sigma^2b_n^{-1}\log b_n)))<\\&b_n^r\exp\left(-\frac{(1-d\sigma^2b_n^{-2}\log b_n)b_n^d\exp(-2^{-1}d^2\sigma^2b_n^{-2}(\log b_n)^2)}{(1+\sigma^2b_n^{-2}(1-d\sigma^2b_n^{-2}\log b_n)^{-2})(1+\sigma^2b_n^{-2})}\right)\to 0\end{aligned}$$

又因为对一切 $k>0$，有

$$\int_0^{+\infty}y^kF_\sigma(-y)\mathrm{d}y<+\infty$$

所以，当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_{-\infty}^{-d\log b_n}b_n^i\ |x|^jF_\sigma^n(a_nx+b_n)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\sigma^{-2(j+1)} b_n^{i+j+1} F_\sigma^{n-1}(b_n - d\sigma^2 b_n^{-1}\log b_n) \int_{-\infty}^{b_n - d\sigma^2 b_n^{-1}\log b_n} |y - b_n|^j F_\sigma(y) \mathrm{d}y \leqslant$$

$$\sigma^{-2(j+1)} b_n^{i+j+1} F_\sigma^{n-1}(b_n - d\sigma^2 b_n^{-1}\log b_n) \int_{-\infty}^{0} |y - b_n|^j F_\sigma(y) \mathrm{d}y +$$

$$\sigma^{-2(j+1)} b_n^{i+2j+2} F_\sigma^{n}(b_n - d\sigma^2 b_n^{-1}\log b_n) \int_{0}^{1-d\sigma^2 b_n^{-2}\log b_n} |y - 1|^j \mathrm{d}y \leqslant$$

$$\sigma^{-2(j+1)} b_n^{i+j+1} F_\sigma^{n-1}(b_n - d\sigma^2 b_n^{-1}\log b_n) \int_{0}^{\infty} (y + b_n)^j F_\sigma(-y) \mathrm{d}y +$$

$$\sigma^{-2(j+1)} b_n^{i+2j+2} F_\sigma^{n}(b_n - d\sigma^2 b_n^{-1}\log b_n) \int_{0}^{1} (1 - y)^j \mathrm{d}y =$$

$$\sum_{s=0}^{j} C_s^j \sigma^{-2(j+1)} b_n^{i+j+s+1} F_\sigma^{n-1}(b_n - d\sigma^2 b_n^{-1}\log b_n) \int_{0}^{\infty} y^{j-s} F_\sigma(-y) \mathrm{d}y +$$

$$\sigma^{-2(j+1)} b_n^{i+2j+2} F_\sigma^{n}(b_n - d\sigma^2 b_n^{-1}\log b_n) \int_{0}^{1} (1 - y)^j \mathrm{d}y \to 0$$

引理 5　对于任意的 $i \geqslant 0$，则有

$$\lim_{x \to +\infty} x^i (1 - F_k^n(a_n x + b_n)) = 0 \tag{4}$$

证　由文献[1]中定理 2 和文献[5]中引理 3，对于充分大的 $x > 0$，有麦克斯韦分布下的尾部表示：

$$1 - F_\sigma(x) = c(x) \exp\left(-\int_1^x \frac{g(t)}{f(t)} \mathrm{d}t\right)$$

其中，当 $x \to +\infty$ 时，$c(x) \to c$，$g(t) \to 1$，并且在 $(1, +\infty)$ 上，辅助函数

$$f(t) = \sigma^2 t^{-1} > 0$$

且

$$\lim_{x \to +\infty} f'(t) = 0$$

我们重申 $1 - F_\sigma(b_n) = n^{-1}$ 且 $a_n = f(b_n)$. 由类似于文献[8]引理 2.2 的证明，对于 $x > 0$，任意的 $\varepsilon > 0$ 和充分大的 n，可得

$$1 - F_\sigma^n(a_n x + b_n) \leqslant (1 + \varepsilon)^2 (1 + \varepsilon x)^{-\varepsilon^{-1} + 1} \tag{5}$$

取 $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{i + 2}$，由(5)式有

$$0 \leqslant \lim_{x \to +\infty} x^i (1 - F_\sigma^n(a_n x + b_n)) \leqslant \lim_{x \to +\infty} (1 + \varepsilon)^2 x^i (1 + \varepsilon x)^{-i-1} = 0$$

结论得证.

引理 6　设 $h_n(x) = n\log F_\sigma(a_n x + b_n) + \exp(-x)$，$0 < d < 1$，赋范常数 a_n 和 b_n 由(2)式给出. 对充分大的 n 和所有的 $x > -d\log b_n$，有 $|h_n(x)| < 3$ 一致成立.

证　对充分大的 $x > 0$，由分部积分法可得，

$$1 - F_\sigma(x) = \sigma^2 f_\sigma(x) x^{-1} + r(x) = \sigma^2 f_\sigma(x) x^{-1}(1 + \sigma^2 x^{-2}) - s(x) \tag{6}$$

其中

$$0 < r(x) < \sigma^3 f_\sigma(x) x^{-3} \qquad s(x) > 0 \tag{7}$$

令

$$\phi_n(x) = 1 - F_\sigma(a_n x + b_n)$$

且

$$n\log F_\sigma(a_n x + b_n) = -n\phi_n(x) - \mathbb{R}_n(x)$$

由于当 $0 < x < 1$ 时，

$$-x - \frac{x^2}{2(1 - x)} < \log(1 - x) < -x$$

从而，

$$0<\mathbb{R}_n(x)<\frac{n\phi_n^2(x)}{2(1-\phi_n(x))}$$

因此，

$$|h_n(x)|=|-n\phi_n(x)+\exp(-x)-\mathbb{R}_n(x)|\leqslant|-n\phi_n(x)+\exp(-x)|+\mathbb{R}_n(x) \tag{7}$$

对充分大的 n 和 $x>-d\log b_n$，则有

$$\phi_n(x)<\phi_n(-da_n\log n)=1-F_\sigma(b_n-d\sigma^2b_n^{-1}\log b_n)<c_1<1$$

并且由引理1可得

$$0<\mathbb{R}_n(x)<\frac{1}{2(1-c_1)}\frac{(1-F_\sigma(a_nx+b_n))^2}{1-F_\sigma(b_n)}<$$

$$\frac{b_n^{1+2d}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma(1-c_1)}\frac{(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^2(1+\sigma^2b_n^{-2}(1-d\sigma^2b_n^{-2}\log b_n)^{-2})}{(1+\sigma^2b_n^{-2})^{-1}}\exp\left(-\frac{b_n^2}{2\sigma^2}\right)<1 \tag{8}$$

又对于 $x\geqslant0$，则有

$$|-n\phi_n(x)+\exp(-x)|\leqslant n\phi_n(x)+\exp(-x)\leqslant n(1-F_\sigma(b_n))+1=2 \tag{9}$$

所以，由(7),(8)和(9)式可得，对于 $x\geqslant0$，有 $|h_n(x)|<3$.

下面，我们讨论 $-d\log b_n<x<0$ 的情形. 由(5)和(6)式可得，

$$-n\phi_n(x)+\exp(-x)=-\frac{1-F_\sigma(a_nx+b_n)}{1-F_\sigma(b_n)}+\exp(-x)=\exp(-x)(1+\sigma^2b_n^{-2}x)C_n(x)$$

其中，

$$C_n(x)=-\frac{1-\sigma\mu(a_nx+b_n)b_n^{-2}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-2}}{1+\sigma\mu(b_n)b_n^{-2}}\exp\left(-\frac{\sigma^2b_n^{-2}x^2}{2}\right)+(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-1}$$

并且 $0<\mu(x)<1$.

注意到当 $x>0$ 时，$1-x<\exp(-x)<1$，从而

$$C_n(x)<-\frac{(1-\sigma\mu(a_nx+b_n)b_n^{-2}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-2})(1-\frac{\sigma^2b_n^{-2}x^2}{2})}{1+\sigma b_n^{-2}}+(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-1}<$$

$$\frac{1}{4}\sigma^2b_n^{-2}x^2+\frac{1}{2}\sigma b_n^{-2}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-2}+(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-1}$$

并且

$$\begin{aligned}C_n(x)>&-\frac{1-\sigma\mu(a_nx+b_n)b_n^{-2}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-2}}{1+\sigma\mu(b_n)b_n^{-2}}+(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-1}>\\&-(1-\sigma\mu(a_nx+b_n)b_n^{-2}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-2})+(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-1}>\\&-\sigma^2b_n^{-2}x(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-1}\end{aligned}$$

因此，对于 $-d\log b_n<x<0$，可得

$$|C_n(x)|<\frac{1}{4}\sigma^2b_n^{-2}x^2+\frac{1}{2}\sigma b_n^{-2}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-2}+(1+\sigma^2b_n^{-2}|x|)(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-1}$$

所以，对于所有的 $-d\log b_n<x<0$ 和充分大的 n，有

$$\begin{aligned}&|-n\phi_n(x)+\exp(-x)|<\exp(-x)(1+\sigma^2b_n^{-2}x)|C_n(x)|<\\&(1+\sigma^2b_n^{-2}x)\Big[\frac{1}{4}d^2\sigma^2b_n^{-2+d}(\log b_n)^2+\\&\frac{1}{2}\sigma b_n^{-2+d}(1-d\sigma^2b_n^{-2}\log b_n)^{-2}+(1+d\sigma^2b_n^{-2}\log b_n)\times\\&(b_n^{-d}-d\sigma^2b_n^{-2-d}\log b_n)^{-1}\Big]<2\end{aligned} \tag{10}$$

一致成立. 结合(7),(8)和(10)式可得，对于所有的 $-d\log b_n<x<0$ 和充分大的 n，有 $|h_n(x)|<3$ 一致成立. 结论得证.

引理 7　对于充分大的 n 和所有的 $x>-d\log b_n$，有 $x^r b_n^2[b_n^2(F_\sigma^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x)]$ 是被与 n 独立的可积函数控制的，其中 $r>0$，$0<d<1$，a_n 和 b_n 由(2) 给出，并且

$$k(x)=2^{-1}\exp(-x)\sigma^2(x^2-2x)$$

证　由引理 6 可得，对于充分大的 n，有

$$b_n^2[b_n^2(F_\sigma^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x)]<$$
$$b_n^2[b_n^2h_n(x)-k(x)]\Lambda(x)+b_n^4h_n^2(x)[2^{-1}+\exp(3)]\Lambda(x)$$

其中

$$h_n(x)=n\log F_\sigma(a_nx+b_n)+\exp(-x)$$

下面，我们证明 $b_n^2[b_n^2h_n(x)-k(x)]$ 和 $b_n^2h_n(x)$ 都是被 $m(x)\exp(-x)$ 控制的，其中，$m(x)$ 是一个关于 x 的多项式. 由于这两种情形的证明类似，因此，在这里我们只给出 $b_n^2[b_n^2h_n(x)-k(x)]$ 被 $m(x)\exp(-x)$ 控制的证明. 注意到

$$b_n^2[b_n^2h_n(x)-k(x)]=b_n^4[-n\phi_n(x)+\exp(-x)-b_n^{-2}k(x)]-b_n^4\mathbb{R}_n(x) \tag{11}$$

由(8) 式可得，对于充分大的 n 和所有的 $x>-d\log b_n$，有

$$b_n^4\mathbb{R}_n(x)<\frac{b_n^5(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^2(1+\sigma^2b_n^{-2}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-2})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma(1-c_1)(1+\sigma^2b_n^{-2})^{-1}}\exp\left(-\frac{b_n^2}{2\sigma^2}-2x\right)<$$
$$\frac{b_n^{5+d}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^2(1+\sigma^2b_n^{-2}(1-d\sigma^2b_n^{-2}\log b_n)^{-2})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma(1-c_1)(1+\sigma^2b_n^{-2})^{-1}}\exp(-x)\exp\left(-\frac{b_n^2}{2\sigma^2}\right)<\exp(-x) \tag{12}$$

容易验证，对于充分大的 n 和所有的 $x>-d\log b_n$ 有 $a_nx+b_n>0$. 由引理 1，对于 $x>-d\log b_n$ 有

$$\frac{1-F_\sigma(a_nx+b_n)}{1-F_\sigma(b_n)}<\frac{\sigma^2(a_nx+b_n)^{-1}(1+\sigma^2(a_nx+b_n)^{-2})f_\sigma(a_nx+b_n)}{\sigma^2b_n^{-1}(1+\sigma^2b_n^{-2})^{-1}f_\sigma(b_n)}<$$
$$2\exp(-x) \tag{13}$$

由引理 3[5] 可得

$$\frac{1-F_\sigma(b_n)}{1-F_\sigma(a_nx+b_n)}\exp(-x)=B_\sigma(n,x)\exp\left(\int_0^x\left(\frac{a_n(a_nt+b_n)}{\sigma^2}-\frac{a_n}{a_nt+b_n}-1\right)\mathrm{d}t\right)$$

其中

$$B_\sigma(n,x)=\frac{1+\sigma^2b_n^{-2}-\sigma^4b_n^{-4}+O(b_n^{-6})}{1+\sigma^2(a_nx+b_n)^{-2}-\sigma^4(a_nx+b_n)^{-4}+O(b_n^{-6})}$$

注意到对于 $x>-d\log b_n$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}B_\sigma(n,x)=1$ 一致成立. 因此，

$$b_n^4[-n\phi_n(x)+\exp(-x)-b_n^{-2}k(x)]=$$
$$\frac{1-F_\sigma(a_nx+b_n)}{1-F_\sigma(b_n)}b_n^4\left[-1+\frac{1-F_\sigma(b_n)}{1-F_\sigma(a_nx+b_n)}\exp(-x)(1-k(x)\exp(x)b_n^{-2})\right]=$$
$$\frac{1-F_\sigma(a_nx+b_n)}{1-F_\sigma(b_n)}[G_n(x)+H_n(x)-I_n(x)+J_n(x)] \tag{14}$$

其中：

$$G_n(x)=b_n^4(B_\sigma(n,x)-1),\ H_n(x)=$$
$$b_n^4B_\sigma(n,x)\left(\int_0^x\left(\frac{a_n(a_nt+b_n)}{\sigma^2}-\frac{a_n}{a_nt+b_n}-1\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\sigma^2(x^2-2x)b_n^{-2}\right)$$
$$I_n(x)=\frac{1}{2}b_n^2B_\sigma(n,x)\sigma^2(x^2-2x)\int_0^x\left(\frac{a_n(a_nt+b_n)}{\sigma^2}-\frac{a_n}{a_nt+b_n}-1\right)\mathrm{d}t$$
$$J_n(x)=b_n^4B_\sigma(n,x)\left(1-\frac{1}{2}\sigma^2(x^2-2x)b_n^{-2}\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(\int_0^x\left(\frac{a_n(a_nt+b_n)}{\sigma^2}-\frac{a_n}{a_nt+b_n}-1\right)\mathrm{d}t\right)^k}{k!}$$

首先，考虑 $G_n(x)$ 的界. 对于充分大的 n 和所有的 $x>-d\log b_n$，有

$$|G_n(x)|<(1-\sigma^4b_n^{-4}(1+\sigma^2b_n^{-2}x)^{-4})^{-1}\times$$

$$[\sigma^2 b_n^2(1+\sigma^2 b_n^{-2}x)^{-2}\mid(1+\sigma^2 b_n^{-2}x)^2-1\mid+\sigma^4\mid 1-(1+\sigma^2 b_n^{-2}x)^{-4}\mid+O(b_n^{-2})]<$$
$$(1-\sigma^4 b_n^{-4}(1-d\sigma^2 b_n^{-2}\log b_n)^{-4})^{-1}\times$$
$$[\sigma^2(1-d\sigma^2 b_n^{-2}\log b_n)^{-2}(\sigma^4 b_n^{-2}x^2+2\sigma^2\mid x\mid)+\sigma^4+\sigma^4(1-d\sigma^2 b_n^{-2}\log b_n)^{-4}+O(b_n^{-2})]<$$
$$2(x^2+2\sigma^2\mid x\mid+2\sigma^4) \tag{15}$$

类似地，对于 $H_n(x)$,$I_n(x)$,$J_n(x)$ 的界，对于所有的 $x>-d\log b_n$，当 n 充分大时，则

$$\mid H_n(x)\mid<\sigma^2\mid\sigma^{-2}-d\mid^{-1}x^2 \tag{16}$$

$$\mid I_n(x)\mid<\sigma^2(x^2+2\mid x\mid)[2^{-1}\sigma^2x^2+\mid\sigma^{-2}-d\mid^{-1}\mid x\mid] \tag{17}$$

并且

$$\mid J_n(x)\mid<\left(1+\frac{1}{2}\sigma^2(x^2+2\mid x\mid)\right)\left(\frac{1}{2}\sigma^2x^2+\frac{\mid x\mid}{\mid\sigma^{-2}-d\mid}\right)^2\exp\left(\frac{d}{\mid\sigma^{-2}-d\mid}\right) \tag{18}$$

因此，结合(11)-(18)式，结论得证.

定理1的证明 对一切正整数 r，有

$$\int_{-\infty}^{0}\mid x\mid^r f_\sigma(x)\mathrm{d}x<+\infty$$

从而，由文献[8]中命题2.1(iii)知

$$\lim_{n\to\infty}m_r(n)=\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{M_n-b_n}{a_n}\right)^r=m_r=\int_{-\infty}^{+\infty}x^r\mathrm{d}\Lambda(x)=(-1)^r\Gamma^{(r)}(1)$$

其中 $\Gamma^{(r)}(1)$ 表示伽玛函数 $\Gamma(\cdot)$ 的 r 阶导数在 $x=1$ 处的值. 因此，对于充分大的 n，$m_r(n)$ 是有限的，且

$$m_r(n)-m_r=\int_{-\infty}^{+\infty}x^r\mathrm{d}(F_\sigma(a_nx+b_n)-\Lambda(x))$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{0}\mid x\mid^r f_\sigma(x)\mathrm{d}x<+\infty$$

从而可得

$$\lim_{x\to-\infty}\mid x\mid^r F_\sigma(x)=0$$

结合 C_r 不等式知

$$0\leqslant\limsup_{x\to-\infty}\mid x\mid^r F_\sigma^n(a_nx+b_n)\leqslant\lim_{y\to-\infty}\frac{2^{r-1}(\mid y\mid^r+\mid b_n^r\mid)}{a_n^r}F_\sigma^n(y)=0$$

从而

$$\lim_{x\to-\infty}x^rF_\sigma^n(a_nx+b_n)=0 \tag{19}$$

因此，由(4)和(19)式，可得

$$\lim_{x\to+\infty}x^r(F_\sigma^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))=\lim_{x\to+\infty}x^r(1-\Lambda(x))-\lim_{x\to+\infty}x^r(1-F_\sigma^n(a_nx+b_n))=0$$

并且

$$\lim_{x\to-\infty}x^r(F_\sigma^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))=\lim_{x\to-\infty}x^rF_\sigma^n(a_nx+b_n)-\lim_{x\to-\infty}x^r\Lambda(x)=0$$

因此，由分部积分法可得，

$$m_r(n)-m_r=-r\int_{-\infty}^{+\infty}x^{r-1}(F_\sigma^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))\mathrm{d}x \tag{20}$$

并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{r+1}\exp(-2x)\Lambda(x)\mathrm{d}x=-(r+1)m_r+m_{r+1} \tag{21}$$

由(4),(20)和(21)式，引理2-7以及控制收敛定理，当 $n\to\infty$ 时，则

$$b_n^2[b_n^2(m_r(n)-m_r)+2^{-1}r\sigma^2(m_{r+1}-m_r)]=$$
$$-r\int_{-\infty}^{-d\log b_n}b_n^2[b_n^2x^{r-1}(F_\sigma^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-x^{r-1}k(x)\Lambda(x)]\mathrm{d}x-$$

$$r\int_{-d\log b_n}^{+\infty} b_n^2[b_n^2 x^{r-1}(F_\sigma^n(a_n x+b_n)-\Lambda(x))-x^{r-1}k(x)\Lambda(x)]\mathrm{d}x \to$$
$$-r\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w(x)+\frac{k^2(x)}{2}\right)x^{r-1}\Lambda(x)\mathrm{d}x=$$
$$r\sigma^4\left(\frac{1}{2}(r-3)m_r-\frac{1}{2}(r+3)m_{r+1}+\frac{1}{8}(r+3)m_{r+2}\right)$$

定理得证.

参考文献：

[1] 刘　豹，付　颖. 麦克斯韦分布的逐点收敛速度 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2013，35(5)：80—83.

[2] LIU C D，LIU B. Convergence Rate of Extremes from Maxwell Sample [J]. Journal of Inequalities and Applications，2013(1)：477.

[3] HUANG J W，CHEN S Q. Convergence Rate of Extremes of Generalized Maxwell Distribution [DB/OL]. (2014—9—16)[2014—12—9]. http：//eprints. ma. man. ac. uk/2176/.

[4] NAIR K A. Asymptotic Distribution and Moments of Normal Extremes [J]. Annals of Probability，1981，9(1)：150—153.

[5] 黄建文，刘衍民，罗远峰. 麦克斯韦分布最大值的高阶渐近展开式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(9)：1—4.

[6] MCCORD J R. On Asymptotic Moments of Extreme Statistics [J]. Annals of Mathematical Statistics，1964，35(4)：1738—1745.

[7] PICKANDS J. Moment Convergence of Sample Extremes [J]. Annals of Mathematical Statistics，1968，39(3)：881—889.

[8] RESNICK S I. Extreme Value，Regular Variation，and Point Processes [M]. New York：Springer，1987：39—64.

[9] LIAO X，PENG Z X，NADARAJAH S. Tail Properties and Asymptotic Expansions for the Maximum of the Logarithmic Skew-Normal Distribution [J]. Journal of Applied Probability，2013，50(3)：900—907.

[10] LIAO X，PENG Z X，NADARAJAH S. Asymptotic Expansions for Moments of Skew-Normal Extremes [J]. Statistics and Probability Letters，2013，83(5)：1321—1329.

[11] LIAO X，PENG Z X，NADARAJAH S，et al. Rates of Convergence of Extremes from Skew-Normal Samples [J]. Statistics and Probability Letters，2014，84(1)：40—47.

[12] 章毓波，彭作祥. t 分布的极值分布渐近展开 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2014，36(3)：67—70.

Asymptotic Expansion of the Moment of Extreme Value from Maxwell Distribution

HUANG Jian-wen，　ZHANG　Peng，　LIU Yan-min，　REN Ze-rong

School of Mathematics and Computational Science，Zunyi Normal College，Zunyi Guizhou 563002，China

Abstract：In this paper，we derive the high-order asymptotic expansion of the moment of normalized maxima for Maxwell distribution. As a byproduct，we deduce the convergence rate of the moment of normalized maxima to the moment of the corresponding extreme value distribution.

Key words：expansion of moment；extreme-value distribution；maxima；Maxwell distribution

责任编辑　张　枸