第 38 卷第 4 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2016 年 4 月
Vol. 38 No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr. 2016

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.04.007

一个矩阵 F -范数不等式的推广①

伍俊良，　石聪聪

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要：首先给出一个关于算术几何均值与 Cauchy-Schwarz 不等式的矩阵 F -范数不等式的推广形式，然后得到了一个矩阵酉不变范数下的 Cauchy-Schwarz 插值不等式.

关　键　词：矩阵不等式；F -范数；算术几何均值；Cauchy-Schwarz 不等式；酉不变范数

中图分类号：O151.21　　文献标志码：A　　文章编号：1673 - 9868(2016)04 - 0050 - 04

近年来，数值不等式与矩阵不等式之间的联系引起许多学者的注意. 人们不断发现，许多数值不等式对于矩阵的一些特征量或者矩阵的一些范数形式也成立，这为人们研究矩阵理论提供了新的思路，那就是基于许多优美的数值不等式，人们能否寻找到更多的矩阵不等式(如特征值不等式、奇异值不等式、扰动不等式、展形等以及各种形式的范数不等式，如 F -范数、P -范数、2 -范数等)，进而用于解决其它学科的问题. 文献[1]基于这种思想，得到一个关于算术几何均值与 Cauchy-Schwarz 不等式的矩阵范数不等式. 本文将给出文献[1]的结果在 F -范数条件下的一种新的形式，它使得文献[1]的结果成为本文结果的特例.

数值型的算术几何均值不等式与 Cauchy-Schwarz 不等式是我们所熟知的，众多文献表明，对于矩阵，也有类似于数值形式的算术几何均值不等式与 Cauchy-Schwarz 不等式，比如最典型的就是如下两个矩阵不等式：

$$2\|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\| \qquad \|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\|\,\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\|$$

它们分别类似于数值形式的算术几何均值不等式与 Cauchy-Schwarz 不等式. 基于这两种矩阵不等式，各种推广形式的矩阵不等式不断呈现. 文献[2]对已有不等式 $2\|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\|$ 进行推广，得到 $2\|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\|$. 文献[3]在已有结论 $\|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\|\,\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\|$ 的基础上得到更为一般的不等式 $\|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\|\,\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\|$(其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}$ 皆为任意 n 阶矩阵，$\|\cdot\|$ 表示酉不变范数).

对于数值形式的 Young 不等式及其它的各种扩展形式，如(p,q) -型的 Young 不等式：

$$a^p b^q \leqslant \frac{p}{p+q}a^{p+q} + \frac{q}{p+q}b^{p+q}$$

其中 $a,b,p,q > 0$，人们也得到许多相应形式的矩阵不等式. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \geqslant 0$ 时，矩阵酉不变范数不等式

$$\|\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^q\| \leqslant \frac{p}{p+q}\|\boldsymbol{A}^{p+q}\boldsymbol{X}\| + \frac{q}{p+q}\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+q}\| \tag{1}$$

也成立. 由此，它为人们研究矩阵理论提供了丰富的想像空间，文献[4]引入变量 r，得到比(1)式更一般的结果，那就是当 $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 0$ 时，

$$\|\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^q\| \leqslant \frac{p-q+r}{p-q+2r}\|\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}\| + \frac{r}{p-q+2r}\|\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\| \tag{2}$$

---

① 收稿日期：2015 - 06 - 02
基金项目：国家自然科学基金项目(70872123).
作者简介：伍俊良(1958 -)，男，四川岳池人，教授，博士研究生导师，主要从事线性与多线性问题的研究.

成立.文献[4]还表明,

$$f(r)=\frac{p-q+r}{p-q+2r}\|\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}\|+\frac{r}{p-q+2r}\|\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\|$$

是单调函数,进而又得到如下包含参数 r 的更一般化的范数不等式

$$\|\boldsymbol{A}^{p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q}\|\leqslant\frac{p-q+r}{p-q+2r}\|\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}\|+\frac{r}{p-q+2r}\|\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\|\leqslant$$
$$\frac{p}{p+q}\|\boldsymbol{A}^{p+q}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|+\frac{q}{p+q}\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+q}\|$$

最近,文献[1]得到一个将矩阵范数不等式

$$2\|\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|$$

与

$$\|\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}\|^{2}\leqslant\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\|\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|$$

统一起来的插值不等式

$$\|\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}\|^{2}\leqslant\|q\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}+(1-q)\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|\|(1-q)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}+q\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|$$

其中 $q\in[0,1]$.基于这一思想,我们考虑能否将

$$2\|\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|$$

与

$$\|\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|^{2}\leqslant\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\|\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|$$

统一起来得到一个酉不变范数不等式

$$\|\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|^{2}\leqslant\|q\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+(1-q)\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|\|(1-q)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+q\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|$$

本文将证明在F-范数情形下推断是正确的.在这个推断下,同时给出几个相关的结论,其中包括对 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|^{2}\leqslant\|\boldsymbol{A}^{2}\boldsymbol{X}\|\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2}\|$ 进行推广得到如下一个插值不等式

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|^{2}\leqslant\|\boldsymbol{A}^{p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2-p}\|\|\boldsymbol{A}^{2-p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{2}\boldsymbol{X}\|\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2}\| \tag{3}$$

其中 $p\in[1,2]$.当 $p\in[1,2]$ 时,我们将证明 $f(p)=\|\boldsymbol{A}^{p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2-p}\|\|\boldsymbol{A}^{2-p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p}\|$ 是单调的.

定理1 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}$ 及任意实数 $q\in[0,1]$,有

$$\|\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|_{F}^{2}\leqslant\|q\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+(1-q)\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|_{F}\|(1-q)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+q\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|_{F}$$

证 对不等式的左右两边平方,有

$$\|\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|_{F}^{4}\leqslant\|q\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+(1-q)\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|_{F}^{2}\|(1-q)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+q\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|_{F}^{2} \tag{4}$$

为叙述方便,记:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}_{1}\qquad \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}=\boldsymbol{B}_{1}$$

显然不等式(4)的左边为

$$(\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}))^{2}=(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{B}_{1}^{*}))^{2}$$

不等式(4)的右边为

$$I=\|q\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+(1-q)\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|_{F}^{2}\|(1-q)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}+q\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\|_{F}^{2}=$$
$$[\mathrm{tr}(q\boldsymbol{A}_{1}^{*}+(1-q)\boldsymbol{B}_{1}^{*})(q\boldsymbol{A}_{1}+(1-q)\boldsymbol{B}_{1})][\mathrm{tr}((1-q)\boldsymbol{A}_{1}^{*}+q\boldsymbol{B}_{1}^{*})((1-q)\boldsymbol{A}_{1}+q\boldsymbol{B}_{1})]$$

由于:

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*})\qquad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_{1}^{*}\boldsymbol{A}_{1}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X})$$

即

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1}=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_{1}^{*}\boldsymbol{A}_{1}$$

故

$$I=[\mathrm{tr}(q^{2}\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{A}_{1}+2q(1-q)\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1}+(1-q)^{2}\boldsymbol{B}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1})][\mathrm{tr}((1-q)^{2}\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{A}_{1}+2q(1-q)\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{B}+q^{2}\boldsymbol{B}_{1}^{*}\boldsymbol{B})]=$$
$$q^{1}(1-q)^{2}[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{A}_{1})^{2}+(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1})^{2}]+2q^{3}(1-q)[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{A}_{1})+(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1})](\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{B})+$$
$$2q(1-q)^{3}[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{A}_{1})+(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1})](\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1})+[q^{4}+(1-q)^{4}](\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{A}_{1})(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1})+$$
$$4q^{2}(1-q)^{2}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{B}_{1})^{2}$$

因为 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，故

$$I\geqslant 2q^2(1-q)^2(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{A}_1)(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{B}_1)+4q^3(1-q)[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{A}_1)(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{B}_1)]^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)+$$
$$4q(1-q)^3[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{A}_1)(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{B}_1)]^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)+[q^4+(1-q)^4](\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{A}_1)(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{B}_1)+$$
$$q^2(1-q)^2(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1^*)^2$$

如果记 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，则：

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^*=\sum_{i,j}^{n}|a_{ij}|^2\qquad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^*=\sum_{i,j}^{n}|b_{ij}|^2\qquad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1^*=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}b_{ij}^*$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\Big(\sum_{i,j}^{n}|a_{ij}|^2\Big)\Big(\sum_{i,j}^{n}|b_{ij}|^2\Big)\geqslant\Big(\sum_{i,j}^{n}a_{ij}b_{ij}^*\Big)^2$$

得

$$(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^*)(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^*)\geqslant(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1^*)^2$$

故

$$\|q\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+(1-q)\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\|_F^2\|(1-q)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+q\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\|_F^2\geqslant$$
$$2q^2(1-q)^2(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)^2+4q^3(1-q)(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)^2+4q(1-q)^3(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)^2+$$
$$[q^4+(1-q)^4](\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)^2+4q^2(1-q)^2(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)^2=$$
$$[2q^2(1-q)^2+4q^3(1-q)+4q(1-q)^3+q^4+(1-q)^4+4q^2(1-q)^2](\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)^2=$$
$$(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)^2$$

而$(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^*\boldsymbol{B}_1)^2$ 即为(4) 式的左端，证毕.

推论 1　对于任意矩阵 $\boldsymbol{X}$ 及 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$，有不等式

$$\|\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^q\|_F^2\leqslant\|v\boldsymbol{A}^{2p}\boldsymbol{X}+(1-v)\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2q}\|_F\|(1-v)\boldsymbol{A}^{2p}\boldsymbol{X}+v\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2q}\|_F$$

其中 $p,q\geqslant 0$，$v\in[0,1]$.

由文献[4] 添加变量 r 得到 Young 不等式的如下推广形式：

$$\|\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^q\|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}\|^{\frac{p-q+r}{p-q+2r}}\|\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\|^{\frac{r}{p-q+2r}}$$

则有：

定理 2　对于任意矩阵 $\boldsymbol{X}$ 及 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$，有

$$\|\boldsymbol{A}^{\frac{p+q}{2}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{\frac{p+q}{2}}\|_F^2\leqslant\|v\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}+(1-v)\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\|_F\|(1-v)\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}+v\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\|_F$$

其中 $p\geqslant 0$，$q\geqslant r\geqslant 0$，$v\in[0,1]$.

证　与定理 1 的证明完全类似，导出

$$\mathrm{tr}((\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^q)^*\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^q)\leqslant$$
$$\|v\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}+(1-v)\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\|_F\|(1-v)\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}+v\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\|_F$$

而 $\left\|\boldsymbol{A}^{\frac{p+q}{2}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{\frac{p+q}{2}}\right\|_F^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{p+q}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}^{p+q}\boldsymbol{X})$，即可证得.

注 1　在定理 2 中取 $v=\dfrac{1}{2}$，$p=p+r$，$1=p+q$，那么定理 2 中的不等式右边即为著名的 Heinz 均值. 从而定理 2 与文献[2] 中的结论

$$\|\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\|\leqslant\left\|\frac{\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{1-p}+\boldsymbol{A}^{1-p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^p}{2}\right\|$$

在 F-范数意义下是相同的. 它表明定理 2 是文献[2] 的结果在 F-范数意义下的推广.

推论 2　对于任意矩阵 $\boldsymbol{X}$，及 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$，任意的 $p\in[1,2]$，有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|_F^2\leqslant\|\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2-p}\|_F\|\boldsymbol{A}^{2-p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^p\|_F$$

注 2　取定理 2 中的 $v=1$，$p=p+r$，$2=p+q$. 推论 2 中的不等式为算术几何的插值不等式的推广形式. 下面将进一步说明推论 2 中的不等式对于酉不变范数也成立.

由文献[4]中的定理2.12可知，对于任意矩阵 $\boldsymbol{X}$，及 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$，$p\geqslant q>0$，得到函数

$$f(r)=\|\boldsymbol{A}^{p+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{q-r}\|^{\frac{p-q+r}{p-q+2r}}\|\boldsymbol{A}^{q-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p+r}\|^{\frac{r}{p-q+2r}}$$

在$[0,q]$上是单调增的.

定理3　对于任意矩阵 $\boldsymbol{X}$，及 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$，函数

$$f(p)=\|\boldsymbol{A}^{p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2-p}\|\ \|\boldsymbol{A}^{2-p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2}\|$$

在$[1,2]$上是单调增的.

证　取文献[4]中定理2.12的 $p=q=1$，则

$$f(r)=\|\boldsymbol{A}^{1+r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{1-r}\|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{A}^{1-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{1+r}\|^{\frac{1}{2}}$$

在$[0,1]$上单调增.取 $p=1+r$，得

$$g(p)=\|\boldsymbol{A}^{p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2-p}\|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{A}^{2-p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p}\|^{\frac{1}{2}}$$

在$[1,2]$是单调增的.

注3　对于任意矩阵 $\boldsymbol{X}$ 及 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$，任意的 $p\in[1,2]$，有下面的插值不等式成立：

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\|^{2}\leqslant\|\boldsymbol{A}^{p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2-p}\|\ \|\boldsymbol{A}^{2-p}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{p}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}^{2}\boldsymbol{X}\|\ \|\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2}\|$$

此不等式为矩阵酉不变范数的Cauchy-Schwarz不等式的插值形式.

参考文献:

[1] AUDENAERT K M R. Interpolating Between the Arithmetic-Geometric Mean and Cauchy-Schwarz Matrix Norm Inequalities [J]. Operators and Matrices, 2015, 9(2): 475-479.

[2] BHATIA R, DAVIS C. More Matrix Forms of the Arithmetic-Geometric Mean Inequality [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1993, 14(1): 132-136.

[3] BHATIA R. Matrix Analysis [M]. New York: Springer, 1997: 266.

[4] SABABHEH M. Interpolated Inequalities for Unitarily Invariant Norms [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2015, 475: 240-250.

A Generalized Matrix Inequality For F-Norm

WU Jun-liang,　SHI Cong-cong

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: This paper presents a generalized matrix inequality for F-norm about arithmetic-geometric mean and Cauchy-Schwarz inequality. An interpolated Cauchy-Schwarz matrix inequality for unitarily invariant norm is obtained.

Key words: matrix inequality; F-norm; arithmetic-geometric mean; Cauchy-Schwarz inequality; unitarily invariant norm

责任编辑　廖　坤