DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.04.009

一类具有广义次临界条件的 Kirchhoff 方程解的存在性与多重性[①]

段 誉， 张云艳， 孙 歆

贵州工程应用技术学院 理学院，贵州 毕节 551700

摘要：研究了一类 Kirchhoff 型方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(x,u)\qquad x\in\mathbb{R}^N$$

利用变分方法获得方程解的存在性和多解性定理，改进和统一了相关结论.

关 键 词：Kirchhoff 方程；变分法；多解性

中图分类号：O176.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2016)04-0061-06

考虑如下无界区域上的 Kirchhoff 型方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(x,u)\qquad x\in\mathbb{R}^N \tag{1}$$

其中 $a>0$，$b\geqslant 0$，$N=1,2,3$，$f\in C(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. 近年来，无界区域上的 Kirchhoff 型方程解的存在性和多解性引起众多学者的兴趣[1-6]. 经典的山路定理是处理此问题的常用方法，这通常要求非线性项满足次临界条件(g_0)：

$$|f(x,t)|\leqslant C(1+|t|^{q-1})\qquad 2<q<2^*$$

其中 $2^*=\dfrac{2N}{N-2}$，$N\geqslant 3$；$2^*=+\infty$，$N=1,2$. 且满足(AR)条件：存在 $\mu>4$，使得

$$0<\mu F(x,t)\leqslant f(x,t)u$$

由于经典的(AR)条件要求过于苛刻，导致许多函数并不满足此条件，于是众多学者致力于弱化此条件，并给出了一系列的弱化条件[1-5].

本文给出了非线性项 f 在满足比上述条件都要弱的局部广义单调性条件和广义次临界条件下，方程(1)解的存在性和多解性结果. 本文的结论推广和统一了已有文献的相关结果.

本文主要结果如下：

定理 1 假设 V 和 f 满足如下假设条件：

(V) $V\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$，满足 $\inf V(x)\geqslant a_1>0$，$\lim\limits_{x\to\infty}V(x)=+\infty$；

(g_1) $f\in C(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，$\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{f(x,t)}{|t|^{2^*-1}}=0$ 关于 $x\in\mathbb{R}^N$ 一致成立；

---

① 收稿日期：2015-04-24

基金项目：国家自然科学基金项目(11361003)；贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字 LKB[2013]24，黔科合 LH 字[2015]7595，黔科合 LH 字[2014]7535).

作者简介：段 誉(1981-)，男，河南驻马店人，讲师，主要从事非线性分析的研究.

(g_2) $\lim\limits_{|t|\to 0}\dfrac{f(x,t)}{t}=0$ 关于 $x\in\mathbb{R}^N$ 一致成立;

(g_3) $\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{F(x,t)}{t^4}=+\infty$ 关于 $x\in\mathbb{R}^N$ 一致成立;

(g_4) 存在常数 $r>0$ 和 $C>0$,使得当 $|t|\geqslant r$ 时,$tf(x,t)-4F(x,t)\geqslant -Ct^2$ 关于 $x\in\mathbb{R}^N$ 一致成立.

则方程(1)至少存在1个非平凡解.另外,若 f 关于 t 是奇函数,则方程(1)存在一列高能量解.

注1　条件(g_4)是一个局部性条件,显然比文献[1]中的条件(f_4')、文献[2]中的条件(f_4)、文献[3]中的条件(f_4)及(f_5)、文献[4]中的条件$(f_4)'$等全局性条件中任一条件都要弱.尽管文献[3]中的条件(f_7)、文献[4]中的条件(f_3)、文献[5]中的条件(f_3)也是局部性条件,但其均能导出条件(g_4),因此条件(g_4)要弱些.另外,文献[2]中的条件(f_5)也是局部性条件,但(f_5)中的常数 C_0 需满足条件

$$C_0<\frac{\beta(\mu-2)}{r^2}$$

但在条件(g_4)中,我们去掉了这个限制条件.

注2　显然条件(g_1)是比(g_0)更弱的广义次临界条件.存在函数满足条件(g_1)但不满足(g_0),如

$$F(t)=\frac{t^{2^*}}{\ln(t^2+\mathrm{e})}$$

因此,我们的结论可看作是上述已有文献的相关结果的推广和统一.

令

$$E=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}(a|\nabla u|^2+V(x)u^2)\,\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

E 中内积和范数定义如下:

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}(a\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)\,\mathrm{d}x$$

$$\|u\|=\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

则 E 是一个Hilbert空间,且在条件(V)下嵌入映射 $E\hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ 是紧的(连续的),其中 $2\leqslant s<2^*$ ($2\leqslant s\leqslant 2^*$).众所周知,求解方程(1)的弱解等价于确定下列泛函的临界点:

$$I(u)=\frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x$$

在条件(V)和(g_1)下,$I\in C^1(E,\mathbb{R})$,并且

$$\langle I'(u),v\rangle=\left(a+b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)uv\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x$$

因为 $E\hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ 及 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 是可分的Hilbert空间,所以 E 存在一列可数的正交基$\{e_i\}$.设 $X_i=\mathbb{R}e_i$,令:

$$Y_k=\bigoplus_{i=1}^{k}X_i\qquad Z_k=\bigoplus_{i=k+1}^{\infty}X_i\qquad k\in\mathbb{N}$$

则 Y_k 是一有限维子空间,且 $E=Y_k\oplus Z_k$.

在本文中,常数 C,C_i 在不同的地方可表示不同的常数.为了证明定理1,下面我们给出几个引理:

引理1　假设条件(V)和(g_1)-(g_4)成立,则 I 满足Cerami条件.

证　首先,证明 I 的任一Cerami序列有界.设$\{u_n\}$是泛函 I 的任一Cerami序列,即对 $\forall c\in\mathbb{R}$,

$$I(u_n)\to c\qquad (1+\|u_n\|)I'(u_n)\to 0\qquad n\to\infty\tag{2}$$

由条件(g_1)和(g_2)知,对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $C_\varepsilon>0$,有

$$|f(x,t)|\leqslant\varepsilon(|t|+|t|^{2^*-1})+C_\varepsilon|t|^{p-1}\tag{3}$$

关于$(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$一致成立，其中$2\leqslant p<2^*$. 从而有

$$|F(x,t)|=\left|\int_0^1 f(x,st)t\,\mathrm{d}s\right|\leqslant(|t|^2+|t|^{2^*})+C_\varepsilon|t|^p \tag{4}$$

结合(3)和(4)式，对$\forall x\in\mathbb{R}^N$及$|t|\leqslant r$，有

$$|tf(x,t)-4F(x,t)|\leqslant 5(\varepsilon(|t|^2+|t|^{2^*})+C_\varepsilon|t|^p)\leqslant C_1t^2 \tag{5}$$

其中

$$C_1=5(\varepsilon(1+r^{2^*-2})+C_\varepsilon r^{p-2})$$

由条件(g_4)和(5)式知

$$tf(x,t)-4F(x,t)\geqslant -C_2t^2\qquad \forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \tag{6}$$

由于$\{u_n\}$是泛函I的任一 Cerami 序列，故存在一个常数$C_3>0$，使得

$$I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle\leqslant C_3 \tag{7}$$

下面利用反证法证明$\{u_n\}$有界. 假设$\|u_n\|\to\infty$，令$v_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则$\|v_n\|=1$. 从而存在子列(不妨仍记为$\{v_n\}$)及$v\in E$，满足：

$$\begin{cases}v_n\rightharpoonup v & x\in E\\ v_n\to v & x\in L^p(\mathbb{R}^N),\ 2\leqslant p<2^*\\ v_n(x)\to v(x) & \text{a. e. } x\in\mathbb{R}^N\end{cases} \tag{8}$$

下面分$v\neq 0$和$v=0$两种情况导出矛盾：

当$v\neq 0$时，令$A=\{x\in\mathbb{R}^N: v(x)\neq 0\}$. 显然，$\mathrm{meas}(A)>0$，且当$x\in A$时，

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\infty$$

根据条件(g_3)，有

$$\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^4}|v_n|^4\to+\infty\qquad n\to\infty$$

由 Fatou 引理知

$$\liminf_{n\to\infty}\int_A\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^4}|v_n|^4\mathrm{d}x\to+\infty \tag{9}$$

由条件(g_3)知，存在常数$L>0$，使得

$$F(x,t)\geqslant 0\qquad |t|>L,\ \forall x\in\mathbb{R}^N$$

再根据(4)式知

$$F(x,t)\geqslant -C_4t^2\qquad \forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$$

其中

$$C_4=(\varepsilon(1+L^{2^*-2})+C_\varepsilon L^{p-2})$$

从而有

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus A}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^4}\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbb{R}^N\setminus A}\frac{-C_4|u_n|^2}{\|u_n\|^4}\mathrm{d}x\geqslant\frac{-C_5}{\|u_n\|^2}$$

这意味着

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus A}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^4}\mathrm{d}x\geqslant 0 \tag{10}$$

综合(9)和(10)式得

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^4}\mathrm{d}x\geqslant+\infty \tag{11}$$

由(2)式得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^4}\mathrm{d}x=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\|u_n\|^2}+\frac{b}{4\|u_n\|^4}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^4}\right)\leqslant\frac{b}{4a^2}$$

这显然与(11)式矛盾.

当 $v=0$ 时，利用(6),(7)和(8)式，我们有

$$\frac{C_3}{\|u_n\|^2}\geqslant\frac{1}{\|u_n\|^2}\left(I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle\right)=$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right]\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{4}\left(1-C_2\int_{\mathbb{R}^N}{v_n}^2\mathrm{d}x\right)$$

令 $n\to\infty$，则有 $0\geqslant\frac{1}{4}$，这显然是矛盾的.

综上所述，$\{u_n\}$ 在 E 中有界.

其次，证明$\{u_n\}$ 在 E 中强收敛. 因为$\{u_n\}$ 在 E 中有界，所以存在一个子列(不妨仍记为$\{u_n\}$)及 $u\in E$，满足：

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u & x\in E\\ u_n\to u & x\in L^p(\mathbb{R}^N),\ 2\leqslant p<2^*\\ u_n(x)\to u(x) & \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^N\end{cases}\tag{12}$$

根据 Hölder 不等式、(3)式及$\{u_n\}$的有界性知，对任意的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$C_\varepsilon|u_n|_p^{p-1}|u_n-u|_p+$$
$$\varepsilon|u_n|_{2^*}^{2^*-1}|u_n-u|_{2^*}+\varepsilon|u_n|_2|u_n-u|_2\leqslant$$
$$C_\varepsilon|u_n|_p^{p-1}|u_n-u|_p+C_6\varepsilon$$

因此，由(12)式和 ε 的任意性知

$$\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\qquad n\to\infty\tag{13}$$

同理可证

$$\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\qquad n\to\infty\tag{14}$$

由文献[3]中的引理 2 知，若在 E 中，$\{u_n\}$有界且 $u_n\rightharpoonup u$，则

$$b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\qquad n\to\infty\tag{15}$$

由(2),(12),(13),(14)和(15)式知

$$\|u_n-u\|^2\leqslant\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle+\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x+$$
$$b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x=o(1)$$

这就证明了 $u_n\to u(x\in E)$，即 I 满足 Cerami 条件.

引理 2 假设条件$(g_1)-(g_2)$成立，则存在 $\rho,\alpha>0$，使得 $I|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha>0$.

证　由(4)式知，对充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$I(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*} + C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1}{4}\|u\|^2 - C_7\|u\|^p - \varepsilon C_8\|u\|^{2^*} \geqslant$$

$$\frac{1}{8}\|u\|^2 - C_7\|u\|^p$$

因此，取充分小的 $\rho \in (0, 1)$，使得

$$\frac{1}{8} - C_7\rho^{p-2} > 0$$

令

$$\alpha = \rho^2\left(\frac{1}{8} - C_7\rho^{p-2}\right)$$

从而有 $I|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha > 0$.

引理 3　假设条件$(g_1)-(g_4)$成立，则对 E 的任一有限维子空间 $\widetilde{E}$，存在常数 $\mathbb{R} = \mathbb{R}(\widetilde{E})$，使得对 $\forall u \in \widetilde{E}\backslash B_{\mathbb{R}}$，$I(u) \leqslant 0$ 成立.

证　设 $\widetilde{E} \subset E$ 是任一有限维子空间，则存在常数 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\widetilde{E} \subset Y_m$. 由有限维子空间中范数的等价性知，存在常数 $C_9 > 0$，使得

$$\|u\|_4 \geqslant C_9\|u\| \tag{16}$$

由条件$(g_1)-(g_3)$知，对任意的 $M > \dfrac{b}{4a^2C_9^4}$，存在常数 $C_M > 0$，使得

$$F(x, u) \geqslant M|u|^4 - C_M|u|^2 \qquad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \tag{17}$$

根据(16)和(17)式知，当 $u \in \widetilde{E}$ 时，有

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^N}F(x, u)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4a^2}\|u\|^4 - M\|u\|_4^4 + C_M\|u\|_2^2 \leqslant$$

$$C_{10}\|u\|^2 + \left(\frac{b}{4a^2} - MC_9^4\right)\|u\|^4$$

因为

$$M > \frac{b}{4a^2C_9^4}$$

所以存在一个充分大的常数 $R = R(\widetilde{E}) > 0$，满足 $I(u) \leqslant 0$，$u \in \widetilde{E}\backslash B_{\mathbb{R}}$.

定理 1 的证明

由引理 2 知，$I|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha > 0$. 再由引理 3 知，存在一个点 $e \in E$，$\|e\| > \rho$，使得 $I(e) < 0$. 结合引理 1 和文献[7]中的定理 2.2 知，方程(1)至少存在 1 个非平凡解.

由于 f 关于 t 是奇函数，故能量泛函 I 是偶泛函. 由引理 2 知

$$I|_{\partial B_\rho \cap Y_k} \geqslant \alpha > 0$$

再由引理 3 知，对任一有限维子空间 $\widetilde{E} \subset E$，存在常数 $R = R(\widetilde{E})$，使得

$$I(u) \leqslant 0 \qquad u \in \widetilde{E}\backslash B_{\mathbb{R}}$$

结合引理 1 和文献[7]中的定理 9.12 知，方程(1)存在一列高能量解.

参考文献：

[1] CHEN S W, LIU S B. Standing Waves For 4-Superlinear Schrödinger-Kirchhoff Equations [J]. Math Methods Appl Sci, 2015, 38(11): 2185－2193.

[2] NIE J J. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Calss of Schrödinger-Kirchhoff-Type Equations [J]. J Math Anal Appl, 2014, 417(1): 65－79.

[3] WU X. Existence of Nontrivial Solutions and High Energy Solutions for Schrödinger-Kirchhoff-Type Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Anal, 2011, 12(2): 1278－1287.

[4] LIU W, HE X M. Multiplicity of High Energy Solutions for Superlinear Kirchhoff Equations [J]. J Appl Math Comput, 2012, 39(1/2): 473－487.

[5] YE Y W, TANG C L. Multiple Solutions for Kirchhoff-Type Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. J Math Plays, 2013, 54(8): 1－16.

[6] 陈尚杰，李　麟. 关于 $\mathbb{R}^N$ 上非齐次 Kirchhoff 方程的注记 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2012, 37(7): 13－16.

[7] RABINOWITZ P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1986.

[8] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 60－63.

Existence and Multiplicity of Solutions to Kirchhoff Type Equation Involving General Subcritical Growth

DUAN Yu, ZHANG Yun-yan, SUN Xin

College of Science, Guizhou University of Engineering Science, Bijie Guizhou 551700, China

Abstract: In this paper, we consider the Kirchhoff type equation

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(x,u) \qquad x\in\mathbb{R}^N$$

Existence and multiplicity of nontrivial solutions are obtained for the equation above via the variational methods. Our results improve and unify some related results.

Key words: Kirchhoff type equation; variational method; multiplicity

责任编辑　廖　坤