DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.04.010

高维空间中一类奇异 Kirchhoff 型问题正解的存在性[①]

刘芮琪，　吴行平，　唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：利用变分方法研究了在四维及以上空间中的一类次临界奇异 Kirchhoff 型问题

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = f(x)u^p + g(x)u^{-\gamma} & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

并获得了该问题正解的存在性.

关　键　词：Kirchhoff 型问题；奇异；正解；变分方法

中图分类号：**O176.3**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673-9868(2016)04-0067-05

考虑如下奇异 Kirchhoff 型方程：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = f(x)u^p + g(x)u^{-\gamma} & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 4)$ 是一个非空有界开集，并且 $a, b > 0$，$0 < p < 2^* - 1$，$0 < \gamma < 1$ 为常数，其中临界指数 $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. 系数函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是满足一定条件的非零非负函数. Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数为

$$\| u \| = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

空间 $L^s(\Omega)(0 < s < \infty)$ 的范数为

$$|u|_s = \left(\int_{\Omega} |u|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}$$

当 $N = 3$ 时，文献[1-4]研究了方程(1)解的存在性以及多重性. 2013 年，文献[1]研究了 $3 < p < 5$ 的情况，利用 Nehari 流形的方法获得了方程(1)的两个正解的存在性. 当 $p = 5$ 时，文献[2]利用变分方法和扰动方法，证明得到了方程(1)的两个正解. 最近，文献[3]研究了 $p = 3$ 的情况，利用极小极大方法和 Nehari 方法，获得了方程(1)的正解的存在性、多解性以及唯一性. 特别地，当 $0 < p < 3$ 时，文献[4]利用变分方法得到了正解的存在性. 文献[5-6]研究了 Kirchhoff 型问题的多解性. 近期，文献[7]在四维空间中研究

① 收稿日期：2015-09-21
基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).
作者简介：刘芮琪(1990-)，女，四川眉山人，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.
通信作者：吴行平，教授.

一类Kirchhoff型问题解的存在性. 受到此启发，本文将研究在高维空间中方程(1)正解的存在情况. 我们定义 I 为方程(1)对应的能量泛函，即

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{p+1}\int_\Omega f(x)(u^+)^{p+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega g(x)(u^+)^{1-\gamma}\mathrm{d}x$$

其中 $u^{\pm}=\max\{\pm u(x),\,0\}$. 如果 $u\in H_0^1(\Omega)$ 且 $u>0$，并满足

$$(a+b\|u\|^2)\int_\Omega(\nabla u,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)(u^+)^p\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x)(u^+)^{-\gamma}\varphi\mathrm{d}x=0\qquad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\tag{2}$$

我们称 u 是方程(1)的解. 本文主要的结果是：

定理 1　假设 $a,b>0$，$0<p<2^*-1$，$0<\gamma<1$，且 $f\in L^{\frac{2^*}{2^*-1-p}}(\Omega)$ 和 $g\in L^{\frac{2^*}{2^*-1+\gamma}}(\Omega)$ 都是非零非负函数，则方程(1)至少有 1 个正解 u_0，且满足 $I(u_0)<0$.

证　我们分两步来证明定理 1.

第 1 步　首先证明泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中能达到全局极小值点，也就是，存在 $u_0\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$I(u_0)=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)}I(u)$$

根据 Sobolev 不等式和 Hölder 不等式，可以得到：

$$\int_\Omega f(x)(u^+)^{p+1}\mathrm{d}x\leqslant|f|_{\frac{2^*}{2^*-1-p}}|u|_{2^*}^{p+1}\leqslant C_1|f|_{\frac{2^*}{2^*-1-p}}\|u\|^{p+1}\tag{3}$$

$$\int_\Omega g(x)(u^+)^{1-\gamma}\mathrm{d}x\leqslant|g|_{\frac{2^*}{2^*-1+\gamma}}|u|_{2^*}^{1-\gamma}\leqslant C_2|g|_{\frac{2^*}{2^*-1+\gamma}}\|u\|^{1-\gamma}\tag{4}$$

这里 $C_1,C_2>0$ 为常数. 再由(3)和(4)式，我们能得到

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{p+1}\int_\Omega f(x)(u^+)^{p+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega g(x)(u^+)^{1-\gamma}\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{C_1}{p+1}|f|_{\frac{2^*}{2^*-1-p}}\|u\|^{p+1}-\frac{C_2}{1-\gamma}|g|_{\frac{2^*}{2^*-1+\gamma}}\|u\|^{1-\gamma}$$

由于 $a,b>0$，$0<\gamma<1$，同时在 $N\geqslant4$ 时 $1<p+1<4$，所以我们可以知道泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是强制且下方有界的. 因此，令 $m=\inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)}I(u)$ 是有定义的，且 $m<0$.

接下来，我们证明泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中能到达 m，即证存在 $u_0\in H_0^1(\Omega)$，使得 $I(u_0)=m$. 由下确界的定义可知，存在极小化序列 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}I(u_n)=m<0$$

存在 $\{u_n\}$ 的子列(为了方便我们仍记为 $\{u_n\}$)，存在 $u_0\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u_0 & H_0^1(\Omega)\\ u_n\to u_0 & L^s(\Omega),\ 1\leqslant s<2^*\\ u_n(x)\to u_0(x) & \text{a.e. } x\in\Omega\end{cases}\tag{5}$$

当 $n\to\infty$ 时都成立.

由于 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的，从而根据 Sobolev 嵌入定理可知，存在常数 $C_3>0$，使得 $|u_n|_{2^*}\leqslant C_3<\infty$. 对 $\forall\varepsilon>0$，给定的 $\delta>0$，当 $E\subset\Omega$ 且 $\mathrm{meas}(E)<\delta$ 时，根据(4)式和 $\int_E|g(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1+\gamma}}\mathrm{d}x$ 的绝对连续性可得

$$\int_E g(x)(u_n^+)^{1-\gamma}\mathrm{d}x\leqslant|u_n|_{2^*}^{1-\gamma}\left(\int_E|g(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1+\gamma}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-1+\gamma}{2^*}}\leqslant$$

$$C_3^{1-\gamma}\left(\int_E|g(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1+\gamma}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-1+\gamma}{2^*}}<\varepsilon$$

从而依据 Vitali 收敛定理[8]，我们可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x)(u_n^+)^{1-\gamma}\mathrm{d}x=\int_\Omega g(x)(u_0^+)^{1-\gamma}\mathrm{d}x \tag{6}$$

使用同样的方法，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)(u_n^+)^{p+1}\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)(u_0^+)^{p+1}\mathrm{d}x \tag{7}$$

再令 $w_n=u_n-u_0$，根据(5) 式，可得：

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega |\nabla w_n|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega |\nabla u_0|^2\mathrm{d}x+o(1) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2=&\left(\int_\Omega |\nabla w_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2\mathrm{d}x\right)^2+\\&2\int_\Omega |\nabla w_n|^2\mathrm{d}x\int_\Omega |\nabla u_0|^2\mathrm{d}x+o(1)\end{aligned} \tag{9}$$

这里 $o(1)$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小量. 再结合(5)－(9) 式，我们可得

$$\begin{aligned}m=&I(u_n)+o(1)=\\&I(u_0)+\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{b}{2}\int_\Omega |\nabla w_n|^2\mathrm{d}x\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+o(1)\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，我们可知 $m\geqslant I(u_0)$. 再根据 m 的定义，即得到 $I(u_0)=m$.

第 2 步　我们证明 u_0 是方程(1) 的正解. 由第 1 步中的 $I(u_0)=m<0$，可知 $u_0\not\equiv 0$.

首先，证明 $u_0>0$ 在 Ω 中几乎处处成立. 根据第一步可知，$\forall\psi\in H_0^1(\Omega)$，$\psi\geqslant 0$，对 $\forall t>0$，$t\in\mathbb{R}$，有$(u_0+t\psi)\in H_0^1(\Omega)$，当 $t>0$ 充分小时，我们有

$$\begin{aligned}0\leqslant&\liminf_{t\to 0^+}\frac{I(u_0+t\psi)-I(u_0)}{t}=\\&a\int_\Omega(\nabla u_0,\nabla\psi)\mathrm{d}x+b\|u_0\|^2\int_\Omega(\nabla u_0,\nabla\psi)\mathrm{d}x-\\&\frac{1}{p+1}\lim_{t\to 0^+}\int_\Omega f(x)\frac{((u_0+t\psi)^+)^{p+1}-(u_0^+)^{p+1}}{t}\mathrm{d}x-\\&\frac{1}{1-\gamma}\limsup_{t\to 0^+}\int_\Omega g(x)\frac{((u_0+t\psi)^+)^{1-\gamma}-(u_0^+)^{1-\gamma}}{t}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{10}$$

由中值定理可得：

$$\frac{1}{p+1}\int_\Omega f(x)\frac{((u_0+t\psi)^+)^{p+1}-(u_0^+)^{p+1}}{t}\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)((u_0+\eta t\psi)^+)^p\psi\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega g(x)\frac{((u_0+t\psi)^+)^{1-\gamma}-(u_0^+)^{1-\gamma}}{t}\mathrm{d}x=\int_\Omega g(x)((u_0+\theta t\psi)^+)^{-\gamma}\psi\mathrm{d}x$$

其中，当 $\theta\to 0^+$，$\eta\to 0^+$ 时，对几乎所有的 $x\in\Omega$，有：

$$((u_0+\eta t\psi)^+)^p\psi\to(u_0^+)^p\psi$$

$$((u_0+\theta t\psi)^+)^{-\gamma}\psi\to(u_0^+)^{-\gamma}\psi$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\frac{1}{p+1}\lim_{t\to 0^+}\int_\Omega f(x)\frac{((u_0+t\psi)^+)^{p+1}-(u_0^+)^{p+1}}{t}\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)(u_0^+)^p\psi\mathrm{d}x \tag{11}$$

由 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to 0^+}\int_\Omega g(x)\frac{((u_0+t\psi)^+)^{1-\gamma}-(u_0^+)^{1-\gamma}}{t}\mathrm{d}x\geqslant\\&\liminf_{t\to 0^+}\int_\Omega g(x)\frac{((u_0+t\psi)^+)^{1-\gamma}-(u_0^+)^{1-\gamma}}{t}\mathrm{d}x=\\&(1-\gamma)\liminf_{t\to 0^+}\int_\Omega g(x)((u_0+\theta t\psi)^+)^{-\gamma}\psi\mathrm{d}x\geqslant\end{aligned}$$

$$(1-\gamma)\int_\Omega g(x)(u_0^+)^{-\gamma}\phi\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

结合(10)-(12)式，对 $\forall\psi\in H_0^1(\Omega)$ 且 $\psi\geqslant 0$，我们可得

$$(a+b\|u_0\|^2)\int_\Omega(\nabla u_0,\nabla\psi)\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)(u_0^+)^p\psi\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x)(u_0^+)^{-\gamma}\psi\mathrm{d}x\geqslant 0 \tag{13}$$

所以，我们有

$$\int_\Omega(\nabla u_0,\nabla\psi)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

再根据强极大值原理即证得 $u_0>0$ 在 Ω 几乎处处成立.

其次，我们还需要证明 u_0 是方程(1)的解. 事实上，只需要验证 u_0 满足(2)式即可. 特别地，对 u_0，存在 $\delta\in(0,1)$ 使得当 $|t|\leqslant\delta$ 时，都有 $(1+t)u_0\in H_0^1(\Omega)$，我们定义 $k:[-\delta,\delta]\longrightarrow\mathbb{R}$ 且

$$k(t)=I((1+t)u_0)$$

则 $k(t)$ 在 $t=0$ 时达到极小值. 因此

$$k'(t)|_{t=0}=a\|u_0\|^2+b\|u_0\|^4-\int_\Omega f(x)(u_0^+)^{p+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x)(u_0^+)^{1-\gamma}\mathrm{d}x=0 \tag{14}$$

假设 $\phi\in H_0^1(\Omega)$，$\varepsilon>0$，我们定义

$$\Psi\equiv(u_0^++\varepsilon\phi)^+$$

在(13)式中我们取 $\psi=\Psi$，再结合(14)式可得

$$\begin{aligned}
0\leqslant&\int_\Omega(a+b\|u_0\|^2)(\nabla u_0,\nabla\Psi)\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)(u_0^+)^p\Psi\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x)(u_0^+)^{-\gamma}\Psi\mathrm{d}x=\\
&\int_{\{x|_{u_0^++\varepsilon\phi}>0\}}(a+b\|u_0\|^2)(\nabla u_0,\nabla(u_0^++\varepsilon\phi))\mathrm{d}x-\\
&\int_{\{x|_{u_0^++\varepsilon\phi}>0\}}f(x)(u_0^+)^p(u_0^++\varepsilon\phi)\mathrm{d}x-\int_{\{x|_{u_0^++\varepsilon\phi}>0\}}g(x)(u_0^+)^{-\gamma}(u_0^++\varepsilon\phi)\mathrm{d}x=\\
&a\|u_0\|^2+b\|u_0\|^4-\int_\Omega f(x)(u_0^+)^{p+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x)(u_0^+)^{1-\gamma}\mathrm{d}x+\\
&\varepsilon\int_\Omega[(a+b\|u_0\|^2)(\nabla u_0,\nabla\phi)-f(x)(u_0^+)^p\phi-g(x)(u_0^+)^{-\gamma}\phi]\mathrm{d}x-\\
&\int_{\{x|_{u_0^++\varepsilon\phi}\leqslant 0\}}(a+b\|u_0\|^2)(\nabla u_0,\nabla(u_0^++\varepsilon\phi))\mathrm{d}x+\\
&\int_{\{x|_{u_0^++\varepsilon\phi}\leqslant 0\}}[f(x)(u_0^+)^p(u_0^++\varepsilon\phi)+g(x)(u_0^+)^{-\gamma}(u_0^++\varepsilon\phi)]\mathrm{d}x<\\
&\varepsilon\int_\Omega[(a+b\|u_0\|^2)(\nabla u_0,\nabla\phi)-f(x)(u_0^+)^p\phi-g(x)(u_0^+)^{-\gamma}\phi]\mathrm{d}x-\\
&\varepsilon\int_{\{x|_{u_0^++\varepsilon\phi}\leqslant 0\}}[(a+b\|u_0\|^2)(\nabla u_0,\nabla\phi)\mathrm{d}x-f(x)(u_0^+)^p\phi-g(x)(u_0^+)^{-\gamma}\phi]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，

$$\mathrm{meas}(\{x|_{u_0^++\varepsilon\phi}<0\})\to 0$$

两边同时除以 ε，让 $\varepsilon\to 0^+$，可得

$$(a+b\|u_0\|^2)\int_\Omega(\nabla u_0,\nabla\phi)\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)(u_0^+)^p\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x)(u_0^+)^{-\gamma}\phi\mathrm{d}x\geqslant 0$$

再依据 $\phi\in H_0^1(\Omega)$ 的任意性可知

$$(a+b\|u_0\|^2)\int_\Omega(\nabla u_0,\nabla\phi)\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)(u_0^+)^p\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x)(u_0^+)^{-\gamma}\phi\mathrm{d}x=0$$

从而 u_0 是方程(1)的解.

参考文献：

[1] LIU X，SUN Y J. Multiple Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Singularity [J]. Commun Pure Appl Anal，2013，12(2)：721－733.

[2] LEI C Y，LIAO J F，TANG C L. Multiple Positive Solutions for Kirchhoff Type of Problems with Singularity and Critical Exponents [J]. J Math Anal Appl，2015，421：521－538.

[3] LIAO J F，ZHANG P，LIU J，et al. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Kirchhoff Type Problems with Singularity [J]. J Math Anal Appl，2015，430(2)：1124－1148.

[4] 廖家锋. 一类奇异 Kirchhoff 型问题正解的存在性 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2016，39(1)：103－106.

[5] 廖家锋，张　鹏，唐春雷. 一类渐近 4 次线性 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(8)：19－22.

[6] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：60－63.

[7] NAIMEN D. The Critical Problem of Kirchhoff Type Elliptic Equations in Dimension Four [J]. J Differential Equations，2014，257(4)：1168－1193.

[8] RUDIN W. Real and Complex Analysis [M]. New York：Mc Graw-Hill，1966.

Existence of Positive Solutions for a Class of Singular Kirchhoff Type Problems in Higher Dimensional Space

LIU Rui-qi，　WU Xing-ping，　TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this article，we study a class of singular Kirchhoff type problems in higher dimensional space

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = f(x)u^p + g(x)u^{-\gamma} & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

By the variational methods，the existence of positive solutions is obtained.

Key words：Kirchhoff type problem；singularity；positive solution；variational method

责任编辑　廖　坤