DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.04.011

一类带有临界项的 Kirchhoff 型问题正解的存在性[①]

朱同亮， 吴行平

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了全空间中一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程

$$\left(a+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\lambda b\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta u+bu)=\lambda u^q+u^5 \qquad x\in\mathbb{R}^3,\ u\in H^1(\mathbb{R}^3)$$

运用山路定理和 Brézis-Lieb 引理，得出该方程至少有 1 个正解.

关 键 词：临界指数；山路定理；Brézis-Lieb 引理；正解

中图分类号：O177.91 **文献标志码：A** **文章编号：**1673-9868(2016)04-0072-06

本文研究了如下一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程：

$$\left(a+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\lambda b\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta u+bu)=\lambda u^q+u^5 \qquad x\in\mathbb{R}^3,\ u\in H^1(\mathbb{R}^3) \tag{1}$$

其中 $a>0$，$b>0$，$\lambda>0$，$3<q<5$. 在有界区域中，如下 Kirchhoff 型方程：

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{2}$$

已经被广泛研究[1-2]. 许多学者考虑了关于 f 在零点和无穷远处的可解性条件，包括超线性情况和次线性情况. 在无界区域中，方程(2)也被很多学者所研究[3-4]. 文献[4]考虑了如下的 Kirchhoff 型方程：

$$\left(a+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\lambda b\int_{\mathbb{R}^N}u^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta u+bu)=f(u) \tag{3}$$

通过截断的方法，对于充分小的正数 λ，得到了方程(3)至少存在 1 个正解. 近年来，受到文献[5]的启发，很多学者对带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型问题越来越有兴趣. 文献[3]考虑了如下方程：

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+u=f(x,u)+u^5 & x\in\mathbb{R}^3\\ u\in H^1(\mathbb{R}^3),\ u>0 & x\in\mathbb{R}^3\end{cases} \tag{4}$$

通过 Nehari 方法，得到了方程(3)至少有 1 个正的基态解.

受到文献[3-4]的启发，我们考虑文献[4]中的临界指数情况. 主要困难是山路值的估计，以及 $H^1(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$ 不是紧嵌入，其中 $q\in(2,6]$. 本文主要结果如下：

---

① 收稿日期：2015-09-24

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).

作者简介：朱同亮(1990-)，男，江西赣州人，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.

通信作者：吴行平，教授.

定理 1 假设 a, b, λ 均为正数，$3 < q < 5$，那么方程(1) 至少存在 1 个正解.

为了求方程(1) 的正解，我们考虑如下 C^1 泛函：

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^6\mathrm{d}x \tag{5}$$

也就意味着对于任意的 $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$，有

$$\langle I'(u), v\rangle = a\langle u, v\rangle + \lambda\|u\|^2\langle u, v\rangle - \lambda\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^q v\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^5 v\mathrm{d}x \tag{6}$$

其中

$$u^+ = \max\{u, 0\}$$

且

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u \cdot \nabla v + buv)\,\mathrm{d}x$$

$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ 是 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中的范数，$|u|_s^s = \int_{\mathbb{R}^3}|u|^s\mathrm{d}x$ 是 $L^s(\mathbb{R}^3)(s \in [2, 6])$ 中的范数. 我们知道，$H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)(q \in [2, 2^*])$ 是连续的，$H = H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 是由 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中径向函数构成的子空间，则 $H \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)(q \in (2, 2^*))$ 是紧嵌入. 此外，最佳 Sobolev 常数

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}}$$

可以由 $U_\varepsilon(x) = \frac{(3\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}(x \in \mathbb{R}^3)$ 达到. 这个达到函数 $\bigcup_\varepsilon(x)$ 是如下方程的解：

$$-\Delta u = u^5 \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

下面我们来证明泛函 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件，并且估计临界值.

引理 1 假设 $c \in (0, \Lambda)$，其中

$$\Lambda = \frac{\lambda a S^3}{4} + \frac{\lambda^3 S^6}{24} + \frac{(\lambda^2 S^4 + 4aS)^{\frac{3}{2}}}{24}$$

那么对于 $3 < q < 5$，I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证 假设$\{u_n\}$ 是$(\mathrm{PS})_c$ 序列，即当 $n \to \infty$ 时，有：

$$I(u_n) \to c \qquad I'(u_n) \to 0 \tag{7}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} c + o(\|u_n\|) = I(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle I'(u_n), u_n\rangle \geqslant \\ \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{q+1}\right)\|u_n\|^2 + \lambda\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q+1}\right)\|u_n\|^4 + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{6}\right)|u_n|_6^6 \geqslant \\ \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{q+1}\right)\|u_n\|^2 \end{aligned}$$

因此，$\{u_n\}$ 是有界的. 于是，存在一个子列$\{u_n\}$ 和 $u \in H$，使得

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & u \in H \\ u_n \to u & u \in L^s(\mathbb{R}^3),\ s \in (2, 6) \\ u_n(x) \to u(x) & \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{8}$$

进一步，假设 $w_n = u_n - u$，断言 $\|w_n\| \to 0$. 否则，令 $\|w_n\| \to l$，l 是正常数. 根据(8) 式，计算得到：

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + o(1) \tag{9}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2\right)^2 + 2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + o(1) \tag{10}$$

此外，由 Brézis-Lieb 引理，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} |w_n|^6 \mathrm{d}x + o(1) \tag{11}$$

一方面，因为

$$\langle I'(u_n),\ u_n\rangle = o(1)$$

所以有

$$a\|w_n\|^2 + a\|u\|^2 + \lambda\|w_n\|^4 + \lambda\|u\|^4 + 2\lambda\|w_n\|^2\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} (w_n{}^+)^6 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^6 \mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^{q+1} \mathrm{d}x = o(1) \tag{12}$$

另一方面，由(7) 式得

$$\lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n),\ u\rangle = 0$$

也即

$$a\|u\|^2 + \lambda l^2\|u\|^2 + \lambda\|u\|^4 - \lambda\int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^{q+1} \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^6 \mathrm{d}x = 0 \tag{13}$$

因此，根据(12) 和(13) 式，我们有

$$a\|w_n\|^2 + \lambda\|w_n\|^4 + \lambda\|w_n\|^2\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} (w_n)^6 \mathrm{d}x = o(1) \tag{14}$$

从而得到

$$al^2 + \lambda l^4 + \lambda l^2\|u\|^2 \leqslant \frac{l^6}{S^3}$$

也即

$$l^2 \geqslant \frac{\lambda S^3 + \sqrt{\lambda^2 S^6 + 4S^3(a + \lambda\|u\|^2)}}{2} \tag{15}$$

因此

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^{q+1} \mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^6 \mathrm{d}x = \frac{a}{4}\|u\|^2 + \lambda\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^{q+1} \mathrm{d}x + \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^6 \mathrm{d}x - \frac{\lambda l^2\|u\|^2}{4} \geqslant -\frac{\lambda l^2\|u\|^2}{4} \tag{16}$$

根据(14) 和(15) 式，得到

$$I(u) = I(u_n) - \frac{a}{2}\|w_n\|^2 - \frac{\lambda}{4}\|w_n\|^4 - \frac{\lambda}{2}\|w_n\|^2\|u\|^2 + \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |w_n{}^+|^6 \mathrm{d}x + o(1) = I(u_n) - \frac{a}{3}\|w_n\|^2 - \frac{\lambda}{12}\|w_n\|^4 - \frac{\lambda}{3}\|w_n\|^2\|u\|^2 + o(1)$$

当 $n \to \infty$ 时，有

$$I(u) = c - \left(\frac{a}{3}l^2 + \frac{\lambda}{12}l^4 + \frac{\lambda}{3}l^2\|u\|^2\right) \leqslant$$

$$c-\frac{\lambda a S^3}{4}-\frac{1}{24}\lambda^3 S^6-\frac{aS}{6}\sqrt{\lambda^2 S^4+4(a+\lambda\|u\|^2)S}-\frac{\lambda^2 S^4}{24}\sqrt{\lambda^2 S^4+4(a+\lambda\|u\|^2)S}-$$

$$\frac{1}{24}\left(3\lambda^2 S^3+\lambda S\sqrt{\lambda^2 S^4+4(a+\lambda\|u\|^2)S}\right)\|u\|^2-\frac{\lambda l^2}{4}\|u\|^2\leqslant$$

$$c-\left(\frac{\lambda a S^3}{4}+\frac{\lambda^3 S^6}{24}+\frac{(\lambda^2 S^4+4aS)^{\frac{3}{2}}}{24}\right)-\frac{\lambda l^2}{4}\|u\|^2=$$

$$c-\Lambda-\frac{\lambda l^2}{4}\|u\|^2<-\frac{\lambda l^2}{4}\|u\|^2$$

这与(16)式矛盾，因此泛函 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

引理 2

$$0<c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))<\Lambda$$

其中 $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H):\gamma(0)=0,\ \gamma(1)=tu\}$.

证　对 $\forall\varepsilon>0$，考虑如下达到函数：

$$U_\varepsilon(x)=\frac{(3\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}\qquad x\in\mathbb{R}^3$$

并且有

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla U_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}|U_\varepsilon|^6\mathrm{d}x=S^{\frac{3}{2}}$$

定义一个截断函数 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$，$0\leqslant\varphi\leqslant1$. 固定 $0<R<1$，使得 $B_{2R}(0)\subset H$. 当 $|x|\leqslant R$ 时，$\varphi(x)=1$；当 $|x|\geqslant 2R$ 时，$\varphi(x)=0$；当 $R<|x|<2R$ 时，$0<\varphi(x)<1$. 此外，令

$$w_\varepsilon=\varphi U_\varepsilon\qquad v_\varepsilon=\frac{w_\varepsilon}{|w_\varepsilon|_6^6}$$

因此有

$$|\nabla v_\varepsilon|_2^2=S+O(\varepsilon)$$

并且对 $\forall s\in[2,6)$，有

$$|v_\varepsilon|_s^s=\begin{cases}O\left(\varepsilon^{\frac{s}{2}}\right) & s\in[2,3)\\ O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\log\varepsilon|\right) & s=3\\ O\left(\varepsilon^{\frac{6-s}{2}}\right) & s\in[3,6)\end{cases}$$

我们设

$$h(t)=I(tv_\varepsilon)=\frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2+\frac{\lambda t^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4-\frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3}v_\varepsilon^{\ q+1}\mathrm{d}x-\frac{t^6}{6}$$

由于：

$$\lim_{t\to+\infty}h(t)=-\infty\qquad \lim_{t\to0^+}h(t)=0$$

因此，当 $t>0$ 时，$h(t)$ 有最大值点 $t_\varepsilon>0$，则$\{t_\varepsilon\}$有正的下界. 否则，存在序列$\{\varepsilon_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}t_{\varepsilon_n}=0$ 且 $h(t_{\varepsilon_n})=\max\limits_{t\geqslant0}h(t)$. 则当 $n\to\infty$ 时，有

$$0<\alpha\leqslant c\leqslant\max_{t\geqslant0}I(tv_\varepsilon)=\max_{t\geqslant0}h(t)=h(t_{\varepsilon_n})\to0$$

这是不可能的. 因此，存在常数 $C_1>0$，使得对 $\forall\varepsilon>0$，都有 $t_\varepsilon\geqslant C_1$. 令

$$g(t)=\frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2+\frac{\lambda t^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4-\frac{t^6}{6}$$

则

$$
\begin{aligned}
\max_{t\geqslant 0} g(t) = & \frac{\lambda^3}{24}\|v_\varepsilon\|^{12} + \frac{\lambda a}{4}\|v_\varepsilon\|^6 + \frac{\lambda^2\|v_\varepsilon\|^8}{24}\sqrt{\lambda^2\|v_\varepsilon\|^8 + 4a\|v_\varepsilon\|^2} + \\
& \frac{4a\|v_\varepsilon\|^2}{24}\sqrt{\lambda^2\|v_\varepsilon\|^8 + 4a\|v_\varepsilon\|^2} = \\
& \frac{\lambda^3}{24}\|v_\varepsilon\|^{12} + \frac{\lambda a}{4}\|v_\varepsilon\|^6 + \frac{1}{24}(\lambda^2\|v_\varepsilon\|^8 + 4a\|v_\varepsilon\|^2)^{\frac{3}{2}} = \\
& \frac{\lambda a S^3}{4} + \frac{\lambda^3 S^6}{24} + \frac{(\lambda^2 S^4 + 4aS)^{\frac{3}{2}}}{24} + O(\varepsilon) = \\
& \Lambda + O(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\|v_\varepsilon\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\varepsilon|^2 + b{v_\varepsilon}^2 \mathrm{d}x = S + O(\varepsilon) + bO(\varepsilon) = S + O(\varepsilon)
$$

得到：

$$
\|v_\varepsilon\|^6 = S^3 + O(\varepsilon) \qquad \|v_\varepsilon\|^8 = S^4 + O(\varepsilon) \qquad \|v_\varepsilon\|^{12} = S^6 + O(\varepsilon)
$$

所以

$$
\begin{aligned}
c \leqslant & \max_{t\geqslant 0} I(tv_\varepsilon) = I(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \\
& \frac{a{t_\varepsilon}^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{\lambda {t_\varepsilon}^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{\lambda {t_\varepsilon}^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3} {v_\varepsilon}^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{{t_\varepsilon}^6}{6} \leqslant \\
& \max_{t\geqslant 0} g(t) - \frac{\lambda {t_\varepsilon}^{q+1}}{q+1}|v_\varepsilon|_{q+1}^{q+1} \leqslant \\
& \Lambda + O(\varepsilon) - \frac{C_1^{q+1}}{q+1}|v_\varepsilon|_{q+1}^{q+1} = \\
& \Lambda + O(\varepsilon) - O(\varepsilon^{\frac{5-q}{2}})
\end{aligned}
$$

由于 $3 < q < 5$，易知 $c < \Lambda$.

定理 1 的证明

我们先来证明泛函 I 具有山路结构. 一方面，

$$
\begin{aligned}
I(u) = & \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(u^+)^6\mathrm{d}x \geqslant \\
& \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{4}\|u\|^4 - C_2\|u\|^{q+1} - \frac{1}{6S^3}\|u\|^6
\end{aligned}
$$

因此，存在常数 $\alpha > 0$，使得 $I(u) \geqslant \alpha$ 对 $\forall u \in \{u \in H: \|u\| = r\}$ 成立，其中 $r > 0$ 充分小. 另一方面，由引理 2 知，存在 $u_0 \in H$，$u_0 \neq 0$，使得

$$
\sup_{t\geqslant 0} I(tu_0) < \Lambda
$$

并且

$$
I(tu_0^+) = \frac{t^2}{2}\|u_0\|^2 + \frac{\lambda t^4}{4}\|u_0\|^4 - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3}(u_0^+)^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(u_0^+)^6\mathrm{d}x
$$

显然，

$$
\lim_{t\to+\infty} I(tu_0^+) \to -\infty
$$

因此，我们选择 $t_0 > 0$，使得 $\|t_0u_0^+\| > r$ 且 $I(t_0u_0^+) \leqslant 0$. 结合引理 1 和引理 2，应用山路定理，方程(1)有一个弱解 u. 因为 $\langle I'(u), u^-\rangle = 0$，其中 $u^- = \min\{u, 0\}$，从而 $u \geqslant 0$，最后由强极大值原理，我们得到 u

是方程(1)的正解.

参考文献:

[1] SUN J J, TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions for Kirchhoff Type Equations [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(4): 1212-1222.

[2] JUNIOR J S, FIGUEIREDO G J. Multiplicity of Solutions for a Kirchhoff Equation with Subcritical or Critical Growth [J]. Differential Integral Equations, 2012, 25(25): 853-868.

[3] LI G B, YE H Y. Existence of Positive Solutions for Nonlinear Kirchhoff Type Problems in $\mathbb{R}^3$ with Critical Sobolev Exponent [J]. Math Meth Appl Sci, 2014, 37(16): 2570-2584.

[4] LI Y H, LI F Y, SHI J P. Existence of a Positive Solution to Kirchhoff Type Problems Without Compactness Conditions [J]. J Differential Equations, 2012, 253(7): 2285-2294.

[5] BRÉZIS H, NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36: 437-477.

[6] XIE Q L, WU X P, TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions for Kirchhoff Type Problem with Critical Exponent [J]. Commun Pure Appl Anal, 2013, 12(6): 2273-2786.

The Existence of Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Critical Exponent

ZHU TONG-liang, WU XING-ping

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we study a class of Kirchhoff type problem with critical exponent in $\mathbb{R}^3$

$$\left(a+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\lambda b\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta u+bu)=\lambda u^q+u^5 \qquad x\in\mathbb{R}^3,\ u\in H^1(\mathbb{R}^3)$$

By Mountain Pass Lemma and Brézis-Lieb Lemma, we obtainat least one positive solution.

Key words: critical exponent; mountain pass lemma; Brezis-Lieb lemma; positive solution

责任编辑 廖 坤