DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.04.012

带有临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性①

任正娟, 商彦英

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 利用 Nehari 流形方法, 研究了在 $N=4$ 的情况下, 带有临界指数的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = u^3+\lambda u^q & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

正解的存在性.

关 键 词: 临界指数; Kirchhoff 方程; Nehari 流形; 集中紧性原理; Ekeland 变分原理

中图分类号: O177.91 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2016)04-0078-07

本文研究如下 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = u^3+\lambda u^q & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^4$ 是一个有界的光滑区域, 参数 a,b,λ 都是正实数, 且 $0<q<1$.

自从文献[1] 利用变分法研究了 Kirchhoff 型方程, 该类方程就开始被广泛研究. 近年来, 带有临界指数的 Kirchhoff 方程更是出现了大量新的研究成果[2-8]. 特别地, 当 $N=4$, $1\leqslant q<3$ 时, 文献[7] 得到了方程正解的存在性. 在本文中, 我们主要研究 $0<q<1$ 的情况. 当 $N=3$, $0<q<1$ 时, 文献[5] 利用 Nehari 流形得到了正解的存在性. 可是当 $N=4$ 时, 由于非线性项的次数与临界指数相同, 这使得方程变得更加复杂, 导致在文献[5] 的条件下结论不再成立. 为了克服这一困难, 本文加强了对参数 b 的要求, 同样得到了 Kirchhoff 方程正解的存在性.

1 预备知识

在本文中, 方程(1) 对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{4}\int_{\Omega}(u^+)^4\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega}(u^+)^{1+q}\mathrm{d}x \qquad u\in H_0^1(\Omega)$$

其中 $H_0^1(\Omega)$ 是 Sobolev 空间, 范数

$$\|u\|=\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

我们知道方程(1) 的解和泛函 I 的临界点是一一对应的, 那如果存在 $u\in H_0^1(\Omega)$, 对 $\forall\,\phi\in H_0^1(\Omega)$ 满足

① 收稿日期: 2015-09-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(11071267); 中央高校基本业务费专项资金项目(XDJK2016C119).

作者简介: 任正娟(1991-), 女, 陕西渭南人, 硕士研究生, 主要从事非线性分析的研究.

通信作者: 商彦英, 副教授.

$$\langle I'(u), \phi\rangle = \left(a + b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\int_{\Omega}(\nabla u, \nabla \phi)\mathrm{d}x - \int_{\Omega}(u^+)^3\phi \mathrm{d}x - \lambda\int_{\Omega}(u^+)^q\phi \mathrm{d}x = 0$$

则称 u 是方程(1)的弱解. 另外,我们知道方程(1)的解如果存在,就一定可以在对应的Nehari流形上找到. 首先,我们定义 Nehari 流形为

$$\Lambda = \left\{u \in H_0^1(\Omega): a\|u\|^2 + b\|u\|^4 - \int_{\Omega}(u^+)^4\mathrm{d}x - \lambda\int_{\Omega}(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x = 0\right\} \tag{2}$$

并且把它分为 3 部分:

$$\Lambda^+ = \left\{u \in \Lambda: a(1-q)\|u\|^2 + b(3-q)\|u\|^4 > (3-q)\int_{\Omega}(u^+)^4\mathrm{d}x\right\} \tag{3}$$

$$\Lambda^0 = \left\{u \in \Lambda: a(1-q)\|u\|^2 + b(3-q)\|u\|^4 = (3-q)\int_{\Omega}(u^+)^4\mathrm{d}x\right\} \tag{4}$$

$$\Lambda^- = \left\{u \in \Lambda: a(1-q)\|u\|^2 + b(3-q)\|u\|^4 < (3-q)\int_{\Omega}(u^+)^4\mathrm{d}x\right\} \tag{5}$$

在本文中,我们定义

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\Omega}|u|^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}$$

引理 1 假设 $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$,那么存在 $\tilde{\lambda} > 0$,使得当 $0 < \lambda < \tilde{\lambda}$ 时,有 $\Lambda^{\pm} \neq \varnothing$,同时 $\Lambda^0 = \{0\}$.

证 令

$$\Phi(t) = at^{1-q}\|u\|^2 + bt^{3-q}\|u\|^4 - t^{3-q}\int_{\Omega}(u^+)^4\mathrm{d}x$$

那么

$$\Phi'(t) = t^{-q}\left[a(1-q)\|u\|^2 + (3-q)t^2(b\|u\|^4 - |u^+|_4^4)\right]$$

一方面,若 $b\|u\|^4 - |u^+|_4^4 \geqslant 0$,则 $\Phi'(t) > 0$ 恒成立,因此 $\Phi(t)$ 是严格递增的($\Phi(0) = 0$),那么,存在唯一的 $t^+ > 0$,使得 $\Phi(t^+) = \lambda\int_{\Omega}|u|^{1+q}\mathrm{d}x$ 且 $\Phi'(t^+) > 0$,从而有 $t^+u \in \Lambda^+$. 另一方面,如果 $b\|u\|^4 - |u^+|_4^4 < 0$,令 $\Phi'(t) = 0$,解得

$$t_{\max} = \left(\frac{a(1-q)\|u\|^2}{(3-q)(|u^+|_4^4 - b\|u\|^4)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

显然,当 $0 < t < t_{\max}$ 时,$\Phi'(t) > 0$;当 $t > t_{\max}$ 时,$\Phi'(t) < 0$. 则根据单调性得到,$\Phi(t)$ 在 $t_{\max}$ 处取得最大值,其中

$$\Phi(t_{\max}) = \frac{2a}{3-q}\left[\frac{a(1-q)}{3-q}\right]^{\frac{1-q}{2}} \frac{\|u\|^{3-q}}{(|u^+|_4^4 - b\|u\|^4)^{\frac{1-q}{2}}} > 0$$

由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式,我们有:

$$\int_{\Omega}(u^+)^{1+q}\mathrm{d}x \leqslant |\Omega|^{\frac{3-q}{4}} |u^+|_4^{1+q} \leqslant |\Omega|^{\frac{3-q}{4}} S^{-\frac{1+q}{2}} \|u\|^{1+q} \tag{6}$$

$$S^2\int_{\Omega}(u^+)^4\mathrm{d}x \leqslant \|u\|^4 \tag{7}$$

当

$$0 < \lambda < \tilde{\lambda} = \frac{2a}{3-q}\left[\frac{a(1-q)}{3-q}\right]^{\frac{1-q}{2}} \frac{S^{\frac{3-q}{2}}}{(1-bS^2)^{\frac{1-q}{2}}} |\Omega|^{\frac{q-3}{4}}$$

时,通过(6),(7)式,有

$$\Phi(t_{\max})-\lambda\int_\Omega (u^+)^{1+q}\mathrm{d}x \geqslant \frac{2a}{3-q}\left[\frac{a(1-q)}{3-q}\right]^{\frac{1-q}{2}}\frac{\|u\|^{3-q}}{(|u^+|_4^4-b\|u\|^4)^{\frac{1-q}{2}}}-\lambda|\Omega|^{\frac{3-q}{4}}S^{-\frac{1+q}{2}}\|u\|^{1+q}\geqslant$$

$$\|u\|^{1+q}\left\{\frac{2a}{3-q}\left[\frac{a(1-q)}{3-q}\right]^{\frac{1-q}{2}}\frac{S^{1-q}}{(1-bS^2)^{\frac{1-q}{2}}}-\lambda|\Omega|^{\frac{3-q}{4}}S^{-\frac{1+q}{2}}\right\}>0 \tag{8}$$

那么显然存在唯一的正数 $t^+<t_{\max}$，使得

$$\Phi(t^+)=\lambda\int_\Omega (u^+)^{1+q}\mathrm{d}x$$

同样也存在唯一的正数 $t^->t_{\max}$ 满足 $\Phi(t^-)=\lambda\int_\Omega (u^+)^{1+q}\mathrm{d}x$. 并且得到 $\Phi'(t^+)>0$，$\Phi'(t^-)<0$. 从而有 $t^+u\in\Lambda^+$，$t^-u\in\Lambda^-$. 下面证明 $\Lambda^0=\{0\}$，假设 $u_0\in\Lambda^0$ 且 $u_0\neq 0$，那么 u_0 一定满足：

$$a(1-q)\|u_0\|^2+b(3-q)\|u_0\|^4-(3-q)\int_\Omega (u_0{}^+)^4\mathrm{d}x=0 \tag{9}$$

$$a\|u_0\|^2+b\|u_0\|^4-\int_\Omega (u_0{}^+)^4\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega |u_0{}^+|^{1+q}\mathrm{d}x=0 \tag{10}$$

当 $0<\lambda<\tilde{\lambda}$ 时，结合(8),(9) 和(10) 式，有

$$0<\frac{2a}{3-q}\left[\frac{a(1-q)}{3-q}\right]^{\frac{1-q}{2}}\frac{\|u_0\|^{3-q}}{(|u_0{}^+|_4^4-b\|u_0\|^4)^{\frac{1-q}{2}}}-\lambda|\Omega|^{\frac{3-q}{4}}S^{-\frac{1+q}{2}}\|u_0\|^{1+q}<$$

$$\frac{2a}{3-q}\left[\frac{a(1-q)}{3-q}\right]^{\frac{1-q}{2}}\frac{\|u_0\|^{3-q}}{(|u_0{}^+|_4^4-b\|u_0\|^4)^{\frac{1-q}{2}}}-\lambda\int_\Omega (u_0{}^+)^{1+q}\mathrm{d}x=0$$

得到矛盾，即证得当 $0<\lambda<\tilde{\lambda}$ 时，$\Lambda^0=\{0\}$.

引理 2　I 在 Λ 上是强制且下方有界的，并且 $c_0=\inf\limits_{u\in\Lambda^+} I(u)<0$.

证　任取 $u\in\Lambda$，利用(2),(7) 式，得到

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{4}\int_\Omega (u^+)^4\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega (u^+)^{1+q}\mathrm{d}x>$$

$$\frac{a}{4}\|u\|^2-\frac{\lambda(3-q)}{4(1+q)}S^{-\frac{1+q}{2}}\|u\|^{1+q}$$

由于 $0<q<1$，那么 I 在 Λ 上是强制且下方有界的. 另外，任取 $u\in\Lambda^+$，那么

$$I(u)\leqslant\frac{-(1-q)a\|u\|^2-(3-q)b\|u\|^4+(3-q)|u^+|_4^4}{4(1+q)}\leqslant 0$$

另外，由(2),(3) 式，我们知道至少存在 1 个 u，使得 $I(u)<0$. 即证得

$$c_0=\inf_{u\in\Lambda^+} I(u)<0$$

引理 3[5]　对 $u\in\Lambda$，$\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$，$\varphi>0$，存在 $\varepsilon>0$ 和连续函数 $t=t(s)>0(s\in\mathbb{R}$，$|s|<\varepsilon)$，满足：

$$t(0)=1 \qquad t(s)(u+s\varphi)\in\Lambda$$

$$\langle t'(0),\varphi\rangle=\frac{(2a+4b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x-(1+q)\lambda\int_\Omega (u^+)^{q-1}u\varphi\mathrm{d}x-4\int_\Omega (u^+)^2u\varphi\mathrm{d}x}{a(1-q)\|u\|^2+b(3-q)\|u\|^4-(3-q)\int_\Omega (u^+)^4\mathrm{d}x} \tag{11}$$

引理 4　对 $\forall U\in\Lambda^-$，$\forall u\in\Lambda^+$，存在 $T_1,T_2>0$，使得 $\|U\|\geqslant T_1$，$\|u\|\leqslant T_2$.

证　对 $\forall U\in\Lambda^-$，通过(5),(7) 式有

$$(1-q)a\|u\|^2<(1-q)a\|u\|^2+(3-q)b\|u\|^4<(3-q)|u^+|_4^4<(3-q)\frac{\|u\|^4}{S^2}$$

即

$$\| U \| > \left[\frac{a(1-q)}{3-q}\right]^{\frac{1}{2}} S = T_1$$

对任意的 $u \in \Lambda^+$，结合(2),(3) 和(7) 式，则有

$$2a \| u \|^2 < \lambda(3-q) | u^+ |_{1+q}^{1+q} < \lambda(3-q) \frac{\| u \|^{1+q}}{S^{\frac{1+q}{2}}}$$

即

$$\| u \| < \left[\frac{\lambda(3-q)}{2a}\right]^{\frac{1}{1-q}} S^{\frac{1+q}{2(q-1)}} = T_2$$

2 主要结果及证明

定理 1 假设 $a > 0$，$0 < b < \frac{1}{S^2}$，那么存在 $\lambda_* > 0$，使得当 $0 < \lambda < \lambda_*$ 时，方程(1) 至少有 1 个正解 u_*，且 $u_* \in \Lambda^+$.

证 利用 Ekeland 变分原理，得到极小化序列 $\{u_n\} \subset \Lambda^+ \cup \Lambda^0$，满足：

(i) $I(u_n) < c_0 + \frac{1}{n}$；

(ii) $I(u) \geqslant I(u_n) - \frac{1}{n} \| u - u_n \|$，$\forall u \in \Lambda^+ \cup \Lambda^0$.

由于 $I(u_n) = I(| u_n |)$，假设 $u_n(x) \geqslant 0$，显然，$\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的，则存在子列(仍记为$\{u_n\}$) 及 $u_* \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_* & x \in H_0^1(\Omega) \\ u_n \to u_* & x \in L^s(\Omega),\ 1 \leqslant s < 4 \\ u_n(x) \to u_*(x) & \text{a.e. } x \in \Omega \end{cases}$$

下面证明 u_* 就是方程(1) 的正解，且 $u_* \in \Lambda^+$.

第 1 步 证明当 $n \to \infty$ 时，有 $\| I'(u_n) \| \to 0$. 首先证明 u_* 不恒为 0. 假设 $u_* \equiv 0$，由条件(i) 有

$$\frac{1}{4} | u_n^+ |_4^4 \geqslant \frac{a}{2} \| u_n \|^2 + \frac{b}{4} \| u_n \|^4 - c_0$$

由于 $u_n \in \Lambda^+ \cup \Lambda^0$，那么

$$\begin{aligned} 0 \leqslant a(1-q) \| u_n \|^2 + b(3-q) \| u_n \|^4 - (3-q) | u_n^+ |_4^4 < \\ 4(3-q)c_0 + o(1) < 0 \end{aligned}$$

得出矛盾. 接下来证明：当 $n \to \infty$ 时，有 $\| I'(u_n) \| \to 0$. 利用引理 3，令 $t = u_n$，$\omega = \omega_\sigma$，那么有：

$$t_n(\sigma) = t\left(\sigma \frac{I'(u_n)}{\| I'(u_n) \|}\right)$$

$$\omega_\sigma = t_n(\sigma)\left(u_n - \sigma \frac{I'(u_n)}{\| I'(u_n) \|}\right) \in \Lambda$$

$$\frac{\| u_n - \omega_\sigma \|}{n} \geqslant I(u_n) - I(\omega_\sigma) =$$

$$(1 - t_n(\sigma))\langle I'(\omega_\sigma), u_n \rangle + \sigma t_n(\sigma)\left\langle I'(\omega_\sigma), \frac{I'(u_n)}{\| I'(u_n) \|}\right\rangle + o(\sigma) \tag{2}$$

整理(2) 式，两边同时除以 σ，并且当 $\sigma \to 0$ 时，同时取极限，有

$$\frac{1}{n}(1 + | t'_n(0) | \| u_n \|) \geqslant - t'_n(0)\langle I'(u_n), u_n \rangle + \| I'(u_n) \| = \| I'(u_n) \|$$

由$\{u_n\}$ 的有界性，一定存在正数 C_0，使得

$$\| I'(u_n) \| \leqslant \frac{\max\{C_0, 1\}}{n}(1+|t'_n(0)|)$$

下面只要证明$\{t'_n(0)\}$是有界的即可. 由(11)式我们知道，存在一个正数C_1，使得

$$|t'_n(0)| \leqslant \frac{C_1}{\left| a(1-q)\|u_n\|^2 + b(3-q)\|u_n\|^4 - (3-q)\int_\Omega (u_n^+)^4 \mathrm{d}x \right|} = \frac{C_1}{\left| 2a\|u_n\|^2 - \lambda(3-q)\int_\Omega (u_n^+)^{1+q} \mathrm{d}x \right|}$$

显然，如果存在正数C_2，使得

$$2a\|u_n\|^2 - \lambda(3-q)|u_n|_{1+q}^{1+q} < -C_2$$

那么结论显然成立. 不难发现，其实只要证明

$$\liminf_{n\to\infty} 2a\|u_n\|^2 - \lambda(3-q)|u_n^+|_{1+q}^{1+q} < 0$$

成立即可. 通过(2),(3) 和(4) 式，有

$$2a\|u_n\|^2 - \lambda(3-q)|u_n^+|_{1+q}^{1+q} = -\left[a(1-q)\|u_n\|^2 + b(3-q)\|u_n\|^4 - (3-q)\int_\Omega (u_n^+)^4 \mathrm{d}x\right] \leqslant 0$$

下面利用反证法，假设

$$2a\|u_n\|^2 - \lambda(3-q)|u_n^+|_{1+q}^{1+q} = 0$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty} 2a\|u_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \lambda(3-q)|u_n^+|_{1+q}^{1+q} = \lambda(3-q)|u_*^+|_{1+q}^{1+q}$$

不妨令

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = A$$

得到

$$2aA = \lambda(3-q)|u_*^+|_{1+q}^{1+q}$$

且有

$$|u_n^+|_4^4 \to \frac{1-q}{3-q}aA + bA^2$$

由于当$0<\lambda<\tilde{\lambda}$时，(8) 式成立，那么

$$0 < \frac{2a}{3-q}\left[\frac{a(1-q)}{3-q}\right]^{\frac{1-q}{2}} \frac{A^{\frac{3-q}{2}}}{\left(\frac{aA(1-q)}{3-q} + bA^2 - bA^2\right)^{\frac{1-q}{2}}} - \frac{2aA}{3-q} = \frac{2aA}{3-q} - \frac{2aA}{3-q} = 0$$

得到矛盾.

第 2 步　证明当$n\to\infty$时，有$\|u_n\| \to \|u_*\|$. 由$\{u_n\}$的有界性，我们设$\|u_n\| \to T(T>0)$，通过集中紧性原理，一定存在子序列(不妨记为$\{u_n\}$)，使得：

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup |\nabla u_*|^2 + \sum_{i\in\Gamma} \mu_i \sigma_{a_i}$$

$$|u_n|^4 \rightharpoonup |u_*|^4 + \sum_{i\in\Gamma} \nu_i \sigma_{a_i}$$

其中Γ是至多可数的指标集，序列$\{a_i\} \subset \Omega$，σ_{a_i}是a_i处的 Dirac 质量. 且满足：

$$\nu_i, \mu_i \geqslant 0 \qquad S\nu_i^{\frac{1}{2}} \leqslant \mu_i$$

当$\varepsilon>0$足够小时，令$\varphi_\varepsilon^i(x)$是光滑的截断函数，并且满足$0 \leqslant \varphi_\varepsilon^i(x) \leqslant 1$，其中

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon^i(x) = 1 & |x-a_i| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \varphi_\varepsilon^i(x) = 0 & |x-a_i| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

那么$\{\varphi_\varepsilon^i(x)u_n\}$是有界的，从而$\langle I'(u_n),\varphi_\varepsilon^i(x)u_n\rangle\to 0$，整理有

$$(a+b\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n^+\nabla(\varphi_\varepsilon^i(x)u_n^+)\mathrm{d}x=$$

$$-(a+b\|u_n\|^2)\int_\Omega \varphi_\varepsilon^i(x)|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega \varphi_\varepsilon^i(x)(u_n^+)^{1+q}\mathrm{d}x+\int_\Omega \varphi_\varepsilon^i(x)(u_n^+)^4\mathrm{d}x+o(1)$$

而由于$\{u_n\}$的有界性，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}(a+b\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n^+\nabla\varphi_\varepsilon^i(x)u_n^+\mathrm{d}x=0$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left[-(a+b\|u_n\|^2)\int_\Omega \varphi_\varepsilon^i(x)|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega \varphi_\varepsilon^i(x)(u_n^+)^{1+q}\mathrm{d}x+\int_\Omega \varphi_\varepsilon^i(x)(u_n^+)^4\mathrm{d}x\right]=0$$

通过文献[6]，得到

$$\nu_i\geqslant(a+bT^2)\mu_i\geqslant a\mu_i$$

解得$\nu_i\geqslant aS^2$. 下面只要证明Γ是空的即可得到

$$|u_n|_4^4\to|u_*|_4^4$$

假设存在$i\in\Gamma$，使得$\nu_i\geqslant aS^2$，因为

$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega|\nabla u_n|^2\varphi_\varepsilon^i(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla u_*|^2\varphi_\varepsilon^i(x)\mathrm{d}x+\sum_{j\in\Gamma}\mu_j\varphi_\varepsilon^i(a_j)+o(1)$$

令$\varepsilon\to 0$，得到

$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\mu_i\varphi_\varepsilon^i(x)+o(1)\geqslant aS^2+o(1)$$

而在引理 4 中，当

$$\lambda<\bar{\lambda}=\frac{2}{3-q}a^{\frac{3-q}{2}}S^{\frac{1+q}{2}}S^{1-q}$$

时，解得$\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x<aS^2$，矛盾. 即证得$\Gamma$是空的，所以有

$$|u_n|_4^4\to|u_*|_4^4$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}(a+b\|u_n\|^2)\int_\Omega|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x=\lambda|u_*^+|_{1+q}^{1+q}+|u_*^+|_4^4$$

另外，

$$(a+bT^2)\int_\Omega\nabla u_n^+\nabla\varphi\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega(u_*^+)^q\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega(u_*^+)^3\varphi\mathrm{d}x\qquad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$$

显然成立. 综上所述，有

$$(a+bT^2)\int_\Omega|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega(u_*^+)^{q+1}\mathrm{d}x+\int_\Omega(u_*^+)^4\mathrm{d}x$$

进一步得到

$$T=\|u_*\|$$

即

$$\|u_n\|\to\|u_*\|$$

最后说明u_*是方程(1)的正解且$u_*\in\Lambda^+$. 当$\lambda_*=\min\{\tilde{\lambda},\bar{\lambda}\}$时，对$\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$，$u_*$满足$\langle I'(u_*),\varphi\rangle=0$，即证得$u_*$是方程(1)的弱解且$u_*\in\Lambda$. 而由$\|u_*\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|\leqslant T_2$，得$u_*\in\Lambda^+$. 因

$$\langle I'(u_*),\phi\rangle=\left(a+b\int_\Omega|\nabla u_*|^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega(\nabla u_*,\nabla\phi)\mathrm{d}x-\int_\Omega(u_*{}^+)^3\phi\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega(u_*{}^+)^q\phi\mathrm{d}x=0$$

从而

$$\int_{\Omega}(\nabla u_{*}, \nabla \phi)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

对于所有的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 成立，即 $-\Delta u_{*} \geqslant 0$. 由强极大值原理得 u_{*} 是方程(1) 的正解.

参考文献：

[1] TARANTELLO G. On Nonhomogeneous Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent [J]. Annales de $l'I$. H. P. Analyse Non Lineaire，1992(3)：281－304.

[2] BREZIS H，NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Commum Pure Appl Anal，1983，36(4)：437－477.

[3] LIU X，SUN Y J. Multiplicity Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Singularity [J]. Commum Pure Appl Anal，2013，12(2)：721－733.

[4] CHENG B T. New Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for Nonlocal Elliptic Kirchhoff Type Problems [J]. J Math Annal Appl，2012，394(2)：488－495.

[5] SUN Y J，LIU X. Existence of Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Critical Exponent [J]. J Partial Differ Equ，2012，25(2)：187－198.

[6] AMBROSETTI A，BREZIS H，CECAMI G. Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems [J]. J Funct Anal，1994，122：519－543.

[7] DAISUKE N. The Critical Problem of Kirchhoff Type Elliptic Equations in Dimension Four [J]. J Differ Equ，2014，257(4)：1168－1193.

[8] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：60－63.

Existence of Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Critical Exponent

REN Zheng-juan，　SHANG Yan-ying

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，using the methods of Nehari manifold，we deal with the existence of solutions for the Kirchhoff type problems with critical exponent in bounded domain where $N=4$：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = u^3 + \lambda u^q & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Key words：critical exponent；Kirchhoff-type problem；Nehari manifold；the concentration compactness principle；Ekeland's variational principle

责任编辑　廖　坤