第 38 卷第 4 期　西南大学学报(自然科学版)　2016 年 4 月
Vol. 38 No. 4　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Apr. 2016

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.04.013

逆的对偶 Brunn-Minkowski 不等式[①]

杨　林[1]，　罗　淼[1,2]，　侯林波[3]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 贵州师范大学 数学与计算机科学学院，贵阳 550001；
3. 黄河科技学院 民族学院，郑州 450063

摘要：运用逆的 Hölder 不等式给出了逆的对偶 Minkowski 不等式以及逆的对偶 Brunn-Minkowski 不等式.

关　键　词：逆的 Hölder 不等式；逆的 Minkowski 不等式；逆的对偶 Brunn-Minkowski 不等式

中图分类号：**O186.5**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673－9868(2016)04－0085－05

记 $\mathbb{R}^n$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 维欧氏空间，B 和 S^{n-1} 分别为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球与单位球面. 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点集，若对任意两点 $x, y\in K$，都有 $(1-\lambda)x+\lambda y\in K(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则称 K 为凸集. 若 K 为完备凸集，则称 K 为凸体. 若点 $z\in \operatorname{int} K$，与 K 中任一点 z' 构成的线段 $[z, z']$ 包含于 K，则称 K 为关于点 z 的星集. 关于点 z 的星集 K 的径向函数为

$$\rho(K, z, u)=\max\{\lambda\geqslant 0 : z+\lambda u\in K\}\qquad u\in S^{n-1}$$

若星集 K 的径向函数关于 u 连续，则称 K 为星体. 若 z 为原点 o，则星体 K 的径向函数 $\rho(K, o, u)$ 简记为 $\rho_K(u)$. 用 $\boldsymbol{S}_o^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点的星体之集，星体 K 的体积用 $V(K)$ 表示. 本文中仅考虑关于原点的星体，关于其它点的星体也具有相同的结论.

文献[1] 探究了星体的对偶混合体积，建立了经典对偶 Brunn-Minkowski 理论，它与由 Brunn，Minkowski，Blaschke，Aleksandrov 等开创的经典的凸体理论有着密切的联系，其主旨思路是将凸体理论中的凸体、支持函数、Minkowski 和、混合体积等基本概念对应到更广义的星体、径向函数、Minkowski 径向和、对偶混合体积等(参见文献[2－5]). 引入 p-径向和后，并与分析学结合，星体理论的内容更加丰富(参见文献[6－9]).

若 K_1, K_2 为凸体，且 $\lambda, \mu\geqslant 0$(不同时为 0)，则 K_1 与 K_2 的 Minkowski 和 $\lambda K_1+\mu K_2$ 定义为

$$\lambda K_1+\mu K_2=\{\lambda x+\mu y : x\in K_1,\ y\in K_2\}$$

若 K 为凸体，$\lambda\geqslant 0$，K 的 Minkowski 标量积为 $\lambda K=\{\lambda x : x\in K\}$.

若 $K_1, K_2\in\boldsymbol{S}_o^n$，且 $\lambda, \mu\geqslant 0$(不同时为 0)，则 K_1 与 K_2 的 Minkowski 径向和 $\lambda K_1\tilde{+}\mu K_2$ 定义为(参见文献[1])：

$$\lambda K_1\tilde{+}\mu K_2=\{\lambda x\tilde{+}\mu y : x\in K_1,\ y\in K_2\}$$

$$x\tilde{+}y=\begin{cases}x+y & x, o, y \text{ 共线}\\ o & \text{否则}\end{cases}$$

① 收稿日期：2015－11－04
基金项目：贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字 LKS[2011]16)；国家自然科学基金项目(11401486，11161007).
作者简介：杨　林(1988－)，男，贵州铜仁人，硕士研究生，主要从事积分几何与凸几何分析的研究.
通信作者：侯林波，讲师.

由径向函数的定义知

$$\rho_{\lambda K_1 \tilde{+} \mu K_2}(u) = \lambda \rho_{K_1}(u) + \mu \rho_{K_2}(u)$$

若对 $K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n$，$\lambda > 0$，有 $K_1 = \lambda K_2$，则称 K_1 与 K_2 互为膨胀.

对 $K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n$，$K_1$ 与 K_2 的一阶对偶混合体积 $\widetilde{V}_1(K_1, K_2)$ 定义为(参见文献[2-3])

$$\widetilde{V}_1(K_1, K_2) = \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(K_1 \tilde{+} \varepsilon K_2) - V(K_1)}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_{K_1}(u)^{n-1} \rho_{K_2}(u) \mathrm{d}S(u) \tag{1}$$

文献[2]得到了对偶 Minkowski 不等式与对偶 Brunn-Minkowski 不等式，分别为：

$$\widetilde{V}_1(K_1, K_2) \leqslant V(K_1)^{\frac{n-1}{n}} V(K_2)^{\frac{1}{n}} \qquad K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n \tag{2}$$

与

$$V(K_1 \tilde{+} K_2)^{\frac{1}{n}} \leqslant V(K_1)^{\frac{1}{n}} + V(K_2)^{\frac{1}{n}} \qquad K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n \tag{3}$$

不等式(2),(3)中等号成立当且仅当 K_1 与 K_2 互为膨胀.

对 $K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n$ 及 $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$\lambda, \mu > 0$，$K_1$ 与 K_2 的 p-径向和 $\lambda \cdot K_1 \tilde{+}_p \mu \cdot K_2$ 定义为

$$\rho_{\lambda \cdot K_1 \tilde{+}_p \mu \cdot K_2}(u)^p = \lambda \rho_{K_1}(u)^p + \mu \rho_{K_2}(u)^p$$

其中 $\lambda \cdot K = \lambda^{\frac{1}{p}} K$. 与(1)式对应的 p-对偶混合体积 $\widetilde{V}_p(K_1, K_2)$ 定义为(参见文献[7])

$$\widetilde{V}_p(K_1, K_2) = \frac{p}{n} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(K_1 \tilde{+}_p \varepsilon \cdot K_2) - V(K_1)}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_{K_1}(u)^{n-p} \rho_{K_2}(u)^p \mathrm{d}S(u) \tag{4}$$

对 $p > 0$，由 Hölder 不等式[10]及(4)式可得 p-对偶 Minkowski 不等式

$$\widetilde{V}_p(K_1, K_2) \leqslant V(K_1)^{\frac{n-p}{n}} V(K_2)^{\frac{p}{n}} \qquad K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n \tag{5}$$

等号成立当且仅当 K_1 与 K_2 互为膨胀.

运用 Minkowski 不等式可得 p-对偶 Brunn-Minkowski 不等式(参见文献[7])

$$V(K_1 \tilde{+}_p K_2)^{\frac{p}{n}} \leqslant V(K_1)^{\frac{p}{n}} + V(K_2)^{\frac{p}{n}} \qquad K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n \tag{6}$$

等号成立当且仅当 K_1 与 K_2 互为膨胀.

不等式(2),(3)分别是不等式(5),(6)的特例，在本文中我们将研究不等式(5)与(6)的逆，即是否存在 $c_1, c_2 \geqslant 1$，使得：

$$V(K_1)^{\frac{n-p}{n}} V(K_2)^{\frac{p}{n}} \leqslant c_1 \widetilde{V}_p(K_1, K_2) \qquad K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n \tag{7}$$

与

$$V(K_1)^{\frac{p}{n}} + V(K_2)^{\frac{p}{n}} \leqslant c_2 V(K_1 \tilde{+}_p K_2)^{\frac{p}{n}} \qquad K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n \tag{8}$$

对这一问题，文献[11]给出了肯定的回答，本文得出另一新的结果. 关于逆的几何不等式问题探究吸引了不少数学探究者(参见文献[11-12]).

引理 1[13] 若 $0 < m_1 \leqslant a \leqslant M_1$，$0 < m_2 \leqslant b \leqslant M_2$，$\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} = 1$，$p_i > 1(i = 1, 2)$，则

$$\max\{C_{(p_1, p_2)}(M_1, m_2), C_{(p_1, p_2)}(m_1, M_2)\} a^{\frac{1}{p_1}} b^{\frac{1}{p_2}} \geqslant \frac{a}{p_1} + \frac{b}{p_2}$$

等号成立当且仅当$(a, b) = (m_1, M_2)$或$(a, b) = (M_1, m_2)$，其中

$$C_{(p_1, p_2)}(x, y) = \frac{\dfrac{x}{p_1} + \dfrac{y}{p_2}}{x^{\frac{1}{p_1}} y^{\frac{1}{p_2}}}$$

由 Young 不等式$\frac{x^{p_1}}{p_1}+\frac{y^{p_2}}{p_2}\geqslant xy(x,y\geqslant 0)$知 $C_{(p_1,p_2)}(x,y)\geqslant 1$.

设 $f(x)$ 为可测集 X 上的正值可测函数，定义范数

$$\|f(x)\|_p=\left(\int_X f(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\qquad p\neq 0$$

引理 2(逆的 Hölder 不等式)　设 $f_i(x)(i=1,2)$ 为可测闭集 X 上满足 $m_i\leqslant f_i(x)\leqslant M_i$ 的正值连续函数. 记：

$$T_{(p_1,p_2)}(m_i,M_i,X_i)=\max\left\{C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{m_1^{p_1}}{X_1},\frac{M_2^{p_2}}{X_2}\right),C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{M_1^{p_1}}{X_1},\frac{m_2^{p_2}}{X_2}\right)\right\}$$

$$X_i=\|f\|_{p_i}^{p_i}$$

若 $p_i>1$，$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$ 且 $f_i(x)^{p_i}$ 可积，则

$$\prod_{i=1}^{2}\|f_i(x)\|_{p_i}\leqslant T_{(p_1,p_2)}(m_i,M_i,X_i)\left\|\prod_{i=1}^{2}f_i(x)\right\|_1\tag{9}$$

证　设 $x_i=\frac{f_i(x)^{p_i}}{X_i}$，$X_i=\|f\|_{p_i}^{p_i}$，则有$\frac{m_i^{p_i}}{X_i}\leqslant x_i\leqslant\frac{M_i^{p_i}}{X_i}$. 运用引理 1 得

$$\max\left\{C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{M_1^{p_1}}{X_1},\frac{m_2^{p_2}}{X_2}\right),C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{m_1^{p_1}}{X_1},\frac{M_2^{p_2}}{X_2}\right)\right\}\frac{f_1(x)f_2(x)}{X_1^{\frac{1}{p_1}}X_2^{\frac{1}{p_2}}}\geqslant\frac{f_1^{p_1}(x)}{p_1X_1}+\frac{f_2^{p_2}(x)}{p_2X_2}$$

两端同时积分即得

$$\max\left\{C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{M_1^{p_1}}{X_1},\frac{m_2^{p_2}}{X_2}\right),C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{m_1^{p_1}}{X_1},\frac{M_2^{p_2}}{X_2}\right)\right\}\left\|\prod_{i=1}^{2}f_i(x)\right\|_1\geqslant\prod_{i=1}^{2}\|f_i(x)\|_{p_i}$$

令

$$\max\left\{C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{M_1^{p_1}}{X_1},\frac{m_2^{p_2}}{X_2}\right),C_{(p_1,p_2)}\left(\frac{m_1^{p_1}}{X_1},\frac{M_2^{p_2}}{X_2}\right)\right\}=T_{(p_1,p_2)}(m_i,M_i,X_i)$$

即得不等式(9).

运用引理 2，我们得到逆的 p-对偶 Minkowski 不等式.

定理 1　若 $K_1,K_2\in\boldsymbol{S}_o^n$，$0<p<n$，$T_{\left(\frac{n}{n-p},\frac{n}{p}\right)}(m_i,M_i,X_i)$ 同引理 2，则

$$V(K_1)^{\frac{n-p}{n}}V(K_2)^{\frac{p}{n}}\leqslant T_{\left(\frac{n}{n-p},\frac{n}{p}\right)}(m_i,M_i,X_i)\widetilde{V}_p(K_1,K_2)\tag{10}$$

证　设：

$$f_1(u)=\rho_{K_1}(u)^{n-p}\qquad f_2(u)=\rho_{K_2}(u)^p$$

$$p_1=\frac{n}{n-p}\qquad p_2=\frac{n}{p}$$

将它们代入引理 2 即得不等式(10).

当 $p=1$ 时，不等式(10) 为不等式(2) 的逆，即：

推论 1　若 $K_1,K_2\in\boldsymbol{S}_o^n$，$T_{\left(\frac{n}{n-1},n\right)}(m_i,M_i,X_i)$ 同引理 2，则

$$V(K_1)^{\frac{n-1}{n}}V(K_2)^{\frac{1}{n}}\leqslant T_{\left(\frac{n}{n-1},n\right)}(m_i,M_i,X_i)\widetilde{V}_1(K_1,K_2)$$

运用引理 2 可得逆的 Minkowski 不等式：

引理 3　设 $f_i(x)(i=1,2)$ 为可测闭集 X 上满足 $m_i\leqslant f_i(x)\leqslant M_i$ 的正值连续函数. 若 $p>1$，并记：

$$w=\min\left\{\sum_{i=1}^{2}f_i(x)\right\}\qquad W=\max\left\{\sum_{i=1}^{2}f_i(x)\right\}\qquad X_3=\left\|\sum_{i=1}^{2}f_i(x)\right\|_{p-1}^{p-1}$$

$$c_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}=$$
$$\max\left\{T_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}(m_1, w^{p-1}, M_1, W^{p-1}, X_1, X_3), T_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}(m_2, w^{p-1}, M_2, W^{p-1}, X_2, X_3)\right\}$$

则

$$\sum_{i=1}^{2}\| f_i(x)\|_p \leqslant c_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}\left\|\sum_{i=1}^{2} f_i(x)\right\|_p \tag{11}$$

证 由

$$\left\|\sum_{i=1}^{2} f_i(x)\right\|_p^p=\left\| f_1(x)\left(\sum_{i=1}^{2} f_i(x)\right)^{p-1}\right\|_1+\left\| f_2(x)\left(\sum_{i=1}^{2} f_i(x)\right)^{p-1}\right\|_1$$

对等号右边两式分别运用引理 2，有：

$$\| f_1(x)\|_p\left\|\sum_{i=1}^{2} f_i(x)\right\|_p^{p-1}\leqslant$$
$$T_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}(m_1, w^{p-1}, M_1, W^{p-1}, X_1, X_3)\left\| f_1(x)\left(\sum_{i=1}^{2} f_i(x)\right)^{p-1}\right\|_1 \tag{12}$$
$$\| f_2(x)\|_p\left\|\sum_{i=1}^{2} f_i(x)\right\|_p^{p-1}\leqslant$$
$$T_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}(m_2, w^{p-1}, M_2, W^{p-1}, X_2, X_3)\left\| f_1(x)\left(\sum_{i=1}^{2} f_i(x)\right)^{p-1}\right\|_1 \tag{13}$$

令

$$c_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}=$$
$$\max\left\{T_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}(m_1, w^{p-1}, M_1, W^{p-1}, X_1, X_3), T_{\left(p,\frac{p}{p-1}\right)}(m_2, w^{p-1}, M_2, W^{p-1}, X_2, X_3)\right\}$$

将(12),(13) 两不等式对应相加即得不等式(11).

运用引理 3，我们得到如下逆的 p -对偶 Brunn-Minkowski 不等式：

定理 2 若 $K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n$，$0<p<n$，$c_{\left(\frac{n}{p},\frac{n}{n-p}\right)}$ 同引理 3，则

$$V(K_1)^{\frac{p}{n}}+V(K_2)^{\frac{p}{n}}\leqslant c_{\left(\frac{n}{p},\frac{n}{n-p}\right)} V(K_1 \widetilde{+}_p K_2)^{\frac{p}{n}} \tag{14}$$

证 因为

$$V(K_1 \widetilde{+}_p K_2)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}[\rho_{K_1}(u)^p+\rho_{K_2}(u)^p]^{\frac{n}{p}}\mathrm{d}x$$

则可令：

$$f_1(u)=\rho_{K_1}(u)^p \qquad f_2(u)=\rho_{K_2}(u)^p$$

运用引理 3 即可得证定理 2.

当 $p=1$ 时，不等式(14) 为不等式(3) 的逆，即：

推论 2 若 $K_1, K_2 \in \boldsymbol{S}_o^n$，$c_{\left(n,\frac{n}{n-1}\right)}$ 同引理 3，则

$$V(K_1)^{\frac{1}{n}}+V(K_2)^{\frac{1}{n}}\leqslant c_{\left(n,\frac{n}{n-1}\right)} V(K_1 \widetilde{+} K_2)^{\frac{1}{n}}$$

参考文献：

[1] LUTWAK E. Dual Mixed Volumes [J]. Pac J Math，1975，58(2)：531－538.

[2] LUTWAK E. Intersection Bodies and Dual Mixed Volumes [J]. Adv Math，1988，71(2)：232－261.

[3] LUTWAK E. Centroid Bodies and Dual Mixed Volumes [J]. Proc London Math Soc，1990，60(2)：365－391.

[4] SCHNEIDER R. Convex Bodies：The Brunn-Minkowski Theory [M]. 2th ed. New York：Cambridge Univ Press，2014.

[5] 杨 琴，罗 淼. 平面上几个对偶 Brunn-Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：74－78.

[6] GRINBERG E，ZHANG G. Convolutions，Transforms，and Convex Bodies [J]. Proc London Math Soc，1999，78(3)：77－115.

[7] HABERL C. L_p Intersection Bodies [J]. Adv Math，2008，217(6)：2599－2624.

[8] WANG W D，LENG G S. L_p-Dual Mixed Quermass Integrals [J]. Indian J Pure Appl Math，2005，36(4)：177－188.

[9] 李小燕，何斌吾. 对偶 Brunn-Minkowski-Firey 定理 [J]. 数学杂志，2005，25(5)：545－548.

[10] HARDY G，LITTLEWOOD J，PÓLYA G. Inequalities [M]. New York：Cambridge Univ Press，1934.

[11] 赵长健. 对偶 Brunn-Minkowski 不等式的逆 [J]. 数学年刊：2014，35(6)：697－704.

[12] 张增乐，罗　森，陈方维. 对偶 Brunn-Minkowski 不等式的逆 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：27－30.

[13] ZHUANG Y D. On Inverses of the Hölder Inequality [J]. J Math Anal Appl，1991，161(2)：566－575.

Reverse Dual Brunn-Minkowski Inequality

YANG　Lin[1]，　LUO　Miao[1,2]，　HOU Lin-bo[3]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；

2. School of Mathematics and Computer Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550001，China；

3. School of Nationalities，Huanghe Science and Technology College，Zhengzhou 450063，China

Abstract：In this paper，by applying reverse Hölder's inequality，we obtain the reverse dual Minkowski inequality and the reverse dual Brunn-Minkowski inequality.

Key words：reverse Hölder's inequality；reverse Minkowski inequality；reverse dual Brunn-Minkowski inequality

责任编辑　廖　坤