DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.05.018

一种单调线性互补问题的 full-Newton 步不可行内点算法①

吴　珊[1]，　张明望[1]，　黄正伟[2]

1. 三峡大学 理学院，湖北 宜昌 443002；2. 三峡大学 经济与管理学院，湖北 宜昌 443002

摘要：对单调线性互补问题设计了一种新的 full-Newton 步不可行内点算法. 该算法是对 Liu Z 和 Sun W 提出的线性规划的 full-Newton 步不可行内点算法的改进和推广. 通过应用新的技术引理，证明了算法的多项式复杂性阶为 $O(nL)$，这与当前单调线性互补问题的不可行内点算法最好的迭代复杂性阶一致.

关　键　词：线性互补问题；full-Newton 步；不可行内点算法；多项式复杂性

中图分类号：O221.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)05-0106-08

互补问题是运筹学与计算数学的一个交叉研究领域，与数学规划、经济学、对策论、随机最优控制等学科关系密切，在科学研究和工程技术各领域有着广泛的应用. 线性规划、二次规划等最优化问题可转化为线性互补问题求解[1]. 本文讨论如下标准形式的单调线性互补问题：

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q} & \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=0 & \boldsymbol{s}\geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^{n}$，$\boldsymbol{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵.

原始-对偶内点算法是求解线性规划、凸规划、互补问题及其它一些优化模型的一类非常重要而有效的算法[2-5]，分为可行内点算法(IPM)和不可行内点算法(IIPM). IPM 开始于一个严格可行的内点并在迭代过程中一直保持可行性，然而许多实际问题很难找到严格可行的初始点，因此给算法的实现带来了一定的困难. IIPM 虽克服了寻找可行初始点的问题，但步长的选取仍比较困难. 2006 年，著名学者 Roos 提出了一个求解线性规划的 full-Newton 步不可行内点算法[6]，该算法使用 full-Newton 步，避免了线搜索，每次迭代由一个可行步(改善可行性)和几个中心步(拉回中心路径)构成，且多项式复杂性阶与现有不可行内点算法最好的复杂性阶一致. 随后，Mansouri，Roos 和 Gu 等对算法进行了简化[7]与改进[8]，使得可行步更“自然”，收敛分析得到简化，迭代的收敛界有所改善(虽然阶不变). 2007 年，Liu 和 Sun 通过改变可行步迭代方向，对线性规划提出了新的 full-Newton 步不可行内点算法[9]，并讨论了算法的多项式复杂性. 2011 年，Mansouri 等通过证明一组不等式，在收敛分析中克服了搜索方向的不正交等困难，将 Roos 提出的求解线性规划的 full-Newton 步不可行内点算法及其收敛结果推广到单调线性互补问题[10].

受文献[9-10]的启发，本文将 Liu 和 Sun 提出的 full-Newton 步不可行内点算法推广到单调线性互补

① 收稿日期：2015-04-13
基金项目：国家自然科学基金项目(71471102)；宜昌市科学技术研究与开发项目(A2012-302-25).
作者简介：吴　珊(1990-)，女，山西吕梁人，硕士研究生，主要从事最优化理论及应用研究.
通信作者：张明望，教授.

问题，得到算法的复杂性阶为$O(nL)$，这与当前最好的迭代复杂性阶一致.

文中记法：$\mathbb{R}^n$ 表示n维欧式空间；$\boldsymbol{e}$表示分量全为1的n维列向量；$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_\infty$分别表示向量的1-范数、2-范数和无穷范数；对于$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{X}$表示$\boldsymbol{x}$的对应分量构成的对角矩阵，即$\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$；对$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{xs}$表示对应分量乘积所得向量，即$\boldsymbol{xs}=(x_1s_1, x_2s_2, \cdots, x_ns_n)$；问题(1)的可行集记为$F:=\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})\in\mathbb{R}_+^{2n}: \boldsymbol{s}=\boldsymbol{Mx}+\boldsymbol{q}\}$，解集记为$F^*:=\{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{s}^*)\in F: (\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^*=0\}$；假设$F^*$是非空的，即问题(1)至少有一解.

1 预备知识

在不可行内点算法中，若对给定的精度$\varepsilon>0$，对偶间隙$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$和残余向量的范数$\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{Mx}-\boldsymbol{q}\|$均不超过$\varepsilon$，则称$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$是单调线性互补问题的$\varepsilon$-近似解. 本节给出了一个求解单调线性互补问题的full-Newton步不可行内点算法.

1.1 扰动问题

任意选取初始点$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{s}^0)>\boldsymbol{0}$，使得存在某个正实数$\mu^0$，满足$\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{s}^0=\mu^0\boldsymbol{e}$. 记初始点的残余向量为$\boldsymbol{r}^0=\boldsymbol{s}^0-\boldsymbol{Mx}^0-\boldsymbol{q}$，对任意$\nu\in(0, 1]$，考虑如下的扰动问题：

$$\boldsymbol{s}-\boldsymbol{Mx}-\boldsymbol{q}=\nu\boldsymbol{r}^0 \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})\geqslant\boldsymbol{0} \tag{P_ν}$$

注意到当$\nu=1$，那么$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})=(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{s}^0)$是$(P_\nu)$的一个严格可行解，即问题$(P_\nu)$满足内点条件(IPC).

引理1[10] 如果问题(1)是可行的，那么扰动问题(P_ν)满足IPC.

假设问题(1)可行且$0<\nu\leqslant1$，则根据引理1可知问题(P_ν)满足IPC，从而它的中心路径存在. 这意味着$\forall\mu>0$，方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{s}-\boldsymbol{Mx}-\boldsymbol{q}=\nu\boldsymbol{r}^0 \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})\geqslant\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{xs}=\mu\boldsymbol{e}\end{cases}$$

有唯一的解$(\boldsymbol{x}(\mu, \nu), \boldsymbol{s}(\mu, \nu))$，称之为$(P_\nu)$的$\mu$-中心. 由于$\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{s}^0=\mu^0\boldsymbol{e}$，所以$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{s}^0)$是$(P_1)$的$\mu^0$-中心，即$(\boldsymbol{x}(\mu^0, 1), \boldsymbol{s}(\mu^0, 1))=(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{s}^0)$. 接下来假定参数$\mu$和$\nu$总满足$\mu=\nu\mu^0$.

1.2 算法的描述

为了分析算法，引入$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}; \mu)$来度量迭代点$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$到$(P_\nu)$的$\mu$-中心的邻近程度，其定义如下：

$$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}; \mu):=\delta(\boldsymbol{v}):=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{-1}\|, \quad \boldsymbol{v}:=\sqrt{\frac{\boldsymbol{xs}}{\mu}} \tag{2}$$

由上可知，如果$\nu=1$，$\mu=\mu^0$，那么$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})=(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{s}^0)$是$(P_1)$的$\mu^0$-中心. 在算法开始时，选取初始点$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})=(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{s}^0)$和$\mu=\mu^0$，从而有$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}$和$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}; \mu)=0$. 接下来假设在每次迭代开始时，$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}; \mu)\leqslant\tau$，其中$\tau>0$.

算法的主迭代过程类似于文献[10]中的算法，其详细描述如下：

算法1 单调线性互补问题的原始-对偶不可行内点算法

Input

  阈值$0<\tau<1$；

  精度参数$\varepsilon>0$；

  障碍校正参数θ，$0<\theta<1$；

begin

  $\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{x}^0>\boldsymbol{0}$；$\boldsymbol{s}:=\boldsymbol{s}^0>\boldsymbol{0}$；$\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{s}^0=\mu^0\boldsymbol{e}$；$\mu:=\mu^0$；

  当$\max\{n\mu, \|r\|\}\geqslant\varepsilon$时

  begin

    $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}):=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})+(\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s})$；

$\mu:=(1-\theta)\mu$;

当 $\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s};\mu)\geqslant\tau$ 时

begin

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}):=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})+(\boldsymbol{\Delta x},\boldsymbol{\Delta s})$;

end

end

end

对单调线性互补问题，Mansouri 等[10] 用下列方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{M\Delta}^f\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s}=\theta\nu\boldsymbol{r}^0\\ \boldsymbol{s\Delta}^f\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x\Delta}^f\boldsymbol{s}=\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs}\end{cases}\tag{3}$$

定义可行步的迭代方向 $\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s}$，且经过可行步后新的迭代点为

$$(\boldsymbol{x}^f,\boldsymbol{s}^f)=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s})$$

中心步开始于迭代点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{x}^f,\boldsymbol{s}^f)$，并使新的迭代点靠近 μ-中心，迭代方向 $\boldsymbol{\Delta x}$ 和 $\boldsymbol{\Delta s}$ 仍采用原始-对偶牛顿方向，由方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{M\Delta x}-\boldsymbol{\Delta s}=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{s\Delta x}+\boldsymbol{x\Delta s}=\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs}\end{cases}$$

唯一确定. 经过中心步后新的迭代点表示为

$$(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+)=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x},\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\Delta s})$$

引理 2[10]　若 $\delta:=\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s};\mu)<1$，则 $\delta(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+;\mu)\leqslant\dfrac{\delta^2}{\sqrt{2(1-\delta^2)}}$.

推论 1[10]　若 $\delta:=\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s};\mu)<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则中心步后的迭代点是严格可行的且 $\delta(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+;\mu)\leqslant\delta^2$，这也表明经过中心步后新的迭代点对 μ－中心二次收敛.

由推论 1，容易得到中心步的迭代次数. 事实上，若 $\delta:=\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s};\mu)<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则经过 k 次中心步后，新的迭代点 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+)$ 对 (P_{ν^+}) 仍然是可行的，并满足

$$\delta(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+;\mu^+)\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2^k}$$

因此，至多经过

$$\left\lceil\log_2\left(\log_2\frac{1}{\tau^2}\right)\right\rceil$$

次中心步，迭代点 $(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+)$ 满足 $\delta(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+;\mu^+)\leqslant\tau$.

对线性规划，Mansouri 和 Roos[7] 将方程组(3) 中的第二式变为

$$\boldsymbol{s\Delta}^f\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x\Delta}^f\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}\tag{4}$$

从而定义新的可行步搜索方向 $\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s}$，一定程度上简化了收敛性分析，并证明了该算法的迭代复杂性阶与当前线性规划最好的迭代复杂性阶一致.

随后，Liu 和 Sun[9] 提出了新的可行步搜索方向，将方程组(3) 中的第二式变为

$$\boldsymbol{s\Delta}^f\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x\Delta}^f\boldsymbol{s}=\beta\boldsymbol{xs}\qquad\beta\in\left[-\frac{1}{2},0\right]\tag{5}$$

注意到(4) 式是(5) 式($\beta=0$) 的一种特殊情况. 遵循文献[9] 的思想，本文用下列方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s} = \theta\nu\boldsymbol{r}^0 \\ \boldsymbol{s}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s} = \beta\boldsymbol{x}\boldsymbol{s} \end{cases} \qquad \beta \in \left[-\frac{1}{17\sqrt{n}},\ 0\right] \tag{6}$$

定义可行步的搜索方向.

2 收敛性分析

2.1 可行步

正如在第1部分中的讨论，经过可行步，新的迭代点$(\boldsymbol{x}^f,\ \boldsymbol{s}^f)$满足$(P_{\nu+})$的可行性条件，但不一定满足非负性条件. 算法分析的关键是要证明经过可行步后使得$\delta(\boldsymbol{x}^f,\ \boldsymbol{s}^f;\ \mu^+) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$，从而保证迭代点$(\boldsymbol{x}^f,\ \boldsymbol{s}^f)$在$(P_{\nu+})$的$\mu^+$-中心处的某个邻域内且在该领域内迭代序列二次收敛.

记

$$\boldsymbol{d}_x^f := \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} \qquad \boldsymbol{d}_s^f := \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{s}} \tag{7}$$

其中$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{s}}{\mu}}$. 方程组(6)可表示为下列尺度方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{d}_x^f - \boldsymbol{d}_s^f = \theta\nu\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{r}^0 \\ \boldsymbol{d}_x^f + \boldsymbol{d}_s^f = \beta\boldsymbol{v} \end{cases}$$

其中$\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{s})$，$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$.

由方程组(6)中的第二式和(7)式得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^f\boldsymbol{s}^f &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{s} + (\boldsymbol{s}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s} = \\ &(1+\beta)\boldsymbol{x}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s} = (1+\beta)\mu\boldsymbol{v}^2 + \mu\boldsymbol{d}_x^f\boldsymbol{d}_s^f \end{aligned}$$

引理3[9]　迭代点$(\boldsymbol{x}^f,\ \boldsymbol{s}^f)$严格可行的充分必要条件是

$$(1+\beta)\boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{d}_x^f\boldsymbol{d}_s^f \geqslant \boldsymbol{0}$$

由(7)式，$\boldsymbol{x}^f$和$\boldsymbol{s}^f$可以写为

$$\boldsymbol{x}^f = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{d}_x^f}{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{d}_x^f)$$

$$\boldsymbol{s}^f = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{\Delta}^f\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} + \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{d}_s^f}{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{d}_s^f)$$

引理4[7]　以(2)式定义，令$\delta = \delta(\boldsymbol{v}^f)$，如果$\|\boldsymbol{d}_x^f\| < \frac{1}{\rho(\delta)}$且$\|\boldsymbol{d}_s^f\| < \frac{1}{\rho(\delta)}$，其中$\rho(\delta) := \delta + \sqrt{1+\delta^2}$，则迭代点$(\boldsymbol{x}^f,\ \boldsymbol{s}^f)$是严格可行的.

从引理4的证明[7]可知$\boldsymbol{v}$的分量满足以下条件：

$$\frac{1}{\rho(\delta)} \leqslant v_i \leqslant \rho(\delta) \qquad i = 1, \cdots, n \tag{8}$$

接下来定义

$$\omega_i := \omega_i(\boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{d}_{xi}^f|^2 + |\boldsymbol{d}_{si}^f|^2}$$

$$\omega := \omega(\boldsymbol{v}) := \|(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n)\|$$

因此

$$(\boldsymbol{d}_x^f)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_s^f \leqslant \|\boldsymbol{d}_x^f\|\ \|\boldsymbol{d}_s^f\| \leqslant \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{d}_x^f\|^2 + \|\boldsymbol{d}_s^f\|^2) \leqslant 2\omega^2 \tag{9}$$

$$|\boldsymbol{d}_{xi}^f\boldsymbol{d}_{si}^f| = |\boldsymbol{d}_{xi}^f|\ |\boldsymbol{d}_{si}^f| \leqslant \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{d}_{xi}^f\|^2 + \|\boldsymbol{d}_{si}^f\|^2) \leqslant 2\omega_i^2 \leqslant 2\omega^2,\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

假设$(1+\beta)\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{d}_x^f\boldsymbol{d}_s^f>\boldsymbol{0}$，根据引理 3 可知迭代点$(\boldsymbol{x}^f,\boldsymbol{s}^f)$严格可行，从而可估算$\delta(\boldsymbol{x}^f,\boldsymbol{s}^f;\mu^+)$的上界.

根据(2)式的定义可知

$$\delta(\boldsymbol{x}^f,\boldsymbol{s}^f;\mu^+):=\delta(\boldsymbol{v}^f):=\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{v}^f-\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{v}^f}\right\|$$

其中 $\boldsymbol{v}^f=\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{x}^f\boldsymbol{s}^f}{\mu^+}}$.

引理 5[9]　若$(1+\beta)\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{d}_x^f\boldsymbol{d}_s^f>\boldsymbol{0}$，则

$$4\delta^2(\boldsymbol{v}^f)\leqslant\frac{4(1-\theta)}{1+\beta}\delta^2+\frac{(\theta+\beta)^2n}{(1-\theta)(1+\beta)}+\frac{2\omega^2}{1-\theta}+2(1-\theta)\frac{\rho^4(\delta)\omega^2}{(1+\beta)((1+\beta)-2\rho^2(\delta)\omega^2)}$$

为了使 $\delta(\boldsymbol{v}^f)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即 $4\delta^2(\boldsymbol{v}^f)\leqslant 2$，由引理 5 可得

$$\frac{4(1-\theta)}{1+\beta}\delta^2+\frac{(\theta+\beta)^2n}{(1-\theta)(1+\beta)}+\frac{2\omega^2}{1-\theta}+2(1-\theta)\frac{\rho^4(\delta)\omega^2}{(1+\beta)((1+\beta)-2\rho^2(\delta)\omega^2)}\leqslant 2$$

引理 6[9]　假设 $\psi(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)$，其中 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 在给定的区间内单调递增，x_1 和 x_2 分别是 $\psi_1(x)=0$ 和 $\psi_2(x)=0$ 的根，若 x_* 是 $\psi(x)=0$ 的根，那么 $x_*\geqslant\min\{x_1,x_2\}$.

定义函数

$$\psi(t)=\frac{4(1-\theta)}{1+\beta}\delta^2+\frac{(\theta+\beta)^2n}{(1-\theta)(1+\beta)}+\frac{2t}{1-\theta}+2(1-\theta)\frac{\rho^4(\delta)t}{(1+\beta)((1+\beta)-2\rho^2(\delta)t)}-2$$

和

$$\psi_1(t)=\frac{4(1-\theta)}{1+\beta}\delta^2+\frac{(\theta+\beta)^2n}{(1-\theta)(1+\beta)}+\frac{2t}{1-\theta}-\frac{3}{2}$$

$$\psi_2(t)=2(1-\theta)\frac{\rho^4(\delta)t}{(1+\beta)((1+\beta)-2\rho^2(\delta)t)}-\frac{1}{2}$$

于是 $\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)$ 且 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 是 t 的单调递增函数. 用 t^*,t_1^*,t_2^* 分别表示 $\psi(t)=0$，$\psi_1(t)=0$ 和 $\psi_2(t)=0$ 的根，则 $t_*\geqslant\min\{t_1,t_2\}$，不难验证，

$$t_1^*=\left(\frac{3}{2}-\frac{4(1-\theta)\delta^2}{1+\beta}-\frac{(\theta+\beta)^2}{(1-\theta)(1+\beta)}n\right)\frac{(1-\theta)}{2}$$

$$t_2^*=\frac{(1+\beta)^2}{4(1-\theta)\rho(\delta)^4+2(1+\beta)\rho^2(\delta)}$$

取

$$0\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{8},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\alpha}{2\sqrt{2n}},\ -\frac{1}{2}\leqslant\beta\leqslant 0\tag{10}$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1$.

引理 7　以(2)式定义 $\delta=\delta(\boldsymbol{v})$，当 $0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{1}{8}$，$\rho(\delta)=\delta+\sqrt{1+\delta^2}$ 和 $\delta\leqslant\tau$ 时，有以下不等式

$$\rho(\delta)<1+2\tau,\ \rho^2(\delta)<1+5\tau,\ \rho^4(\delta)<1+14\tau$$

成立.

证　因为$\sqrt{1+\delta^2}<1+\delta$ 和$\delta<\tau$，所以

$$\rho(\delta)=\delta+\sqrt{1+\delta^2}<1+2\tau\tag{11}$$

利用 $0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{1}{8}$，可得

$$4\tau^2\leqslant\tau,\ 25\tau^2\leqslant 4\tau\tag{12}$$

根据(11)和(12)式，有

$$\rho^2(\delta) < (1+2\tau)^2 \leqslant 1+5\tau,\ \rho^4(\delta) < (1+5\tau)^2 \leqslant 1+14\tau$$

证毕.

由引理 7,(10) 式和$\frac{1}{2} \leqslant 1+\beta \leqslant 1$,可知

$$t_1^* \geqslant \frac{3}{8}\left(\frac{3}{2} - \frac{4\tau^2}{(1+\beta)}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{(\theta+\beta)^2 n}{(1+\beta)} \geqslant$$
$$\frac{3}{8}\left(\frac{3}{2} - 8\tau^2\right) - \theta^2 n = \frac{25}{64}$$

和

$$t_2^* \geqslant \frac{1}{4(2\rho^2(\delta) + 4\rho^4(\delta))} \geqslant$$
$$\frac{1}{8(1+5\tau) + 16(1+14\tau)} \geqslant \frac{1}{57}$$

从引理 5 的证明[9] 可知 ω^2 的另一个界为 t_3^*,即 $\omega^2 < t_3^*$,其中 $t_3^* = (1+\beta)\frac{1}{2\rho^2(\delta)}$. 不难得

$$t_3^* \geqslant \frac{1}{4\rho^2(\delta)} \geqslant \frac{1}{4(1+5\tau)} \geqslant \frac{2}{13} \tag{13}$$

根据引理 6 和(13) 式可知,如果 $\omega^2 \leqslant \min\{\frac{25}{64}, \frac{1}{57}, \frac{2}{13}\}$,即 $\omega \leqslant \frac{1}{\sqrt{57}}$,则有 $\delta(\boldsymbol{v}^f) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.2 $\|\boldsymbol{d}_x^f\|^2 + \|\boldsymbol{d}_s^f\|^2$ 的上界

引理 8[10] 令 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 及 $\boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}$ 是两个 n 维向量,$\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵,则线性方程组

$$\boldsymbol{MS}^{-1}\boldsymbol{Xu} - \boldsymbol{z} = \tilde{\boldsymbol{a}}$$
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{z} = \tilde{\boldsymbol{b}}$$

的解$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$满足下列关系式

$$\boldsymbol{Du} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{DMD})^{-1}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{Dz} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Du}$$
$$\|\boldsymbol{Du}\| \leqslant \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|$$
$$\|\boldsymbol{Du}\|^2 + \|\boldsymbol{Dz}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\,\|\boldsymbol{a}\|$$

其中:$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X})^{\frac{1}{2}}$,$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{b}}$,$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{a}}$.

根据引理 8,令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{d}_x^f$,$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}_s^f$,$\boldsymbol{a} = \theta\nu\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{r}^0$ 及 $\boldsymbol{b} = \beta\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}$,则

$$\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{d}_x^f\|^2 + \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{d}_s^f\|^2 \leqslant \|\beta\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\theta\nu\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}r^0 + \beta\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\|\,\|\theta\nu\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{r}^0\|$$

由范数的性质可知

$$\|\boldsymbol{d}_x^f\|^2 + \|\boldsymbol{d}_s^f\|^2 \leqslant \|\beta\boldsymbol{v}\|^2 + 2(\|\theta\nu\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{r}^0\| + \|\beta\boldsymbol{v}\|)\|\theta\nu\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{r}^0\| \tag{14}$$

假设正实数 ρ_p, ρ_d 对于某个点$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{s}^*) \in F^*$ 满足 $\|\boldsymbol{x}^*\|_\infty \leqslant \rho_p$ 和 $\max\{\|\boldsymbol{s}^*\|_\infty, \rho_p\|\boldsymbol{Me}\|_\infty, \|\boldsymbol{q}\|_\infty\} \leqslant \rho_d$. 与通常的不可行内点算法一样,选取初始点

$$\boldsymbol{x}^0 = \rho_p\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{s}^0 = \rho_d\boldsymbol{e},\ \mu^0 = \rho_p\rho_d$$

由文献[10] 中的(46) 式可知

$$\|\theta\nu\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{r}^0\| \leqslant \frac{3\theta}{\rho_p v_{\min}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \tag{15}$$

将(8) 式代入(15) 式,得

$$\|\theta\nu\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{r}^0\| \leqslant \frac{3\theta\rho(\delta)}{\rho_p}\|\boldsymbol{x}\|_1 \tag{16}$$

再将(16) 式代入(14) 式,得

$$\|\boldsymbol{d}_x^f\|^2 + \|\boldsymbol{d}_s^f\|^2 \leqslant \beta^2 n(1+2\delta)^2 + 2\left(\frac{3\theta\rho(\delta)}{\rho_p}\|\boldsymbol{x}\|_1 + \beta\sqrt{n}(1+2\delta)\right)\frac{3\theta\rho(\delta)}{\rho_p}\|\boldsymbol{x}\|_1 \tag{17}$$

引理 9[10]　设$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})$是$(P_\nu)$的可行点，$\delta=\delta(\boldsymbol{v})$如(2)式定义，$\rho(\delta)=\delta+\sqrt{\delta^2+1}$，$(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{s}^0)=(\rho_p\boldsymbol{e},\rho_d\boldsymbol{e})$，则有

$$\|\boldsymbol{x}\|_1\leqslant n\rho_p(2+\rho^2(\delta))\qquad \|\boldsymbol{s}\|_1\leqslant n\rho_p(2+\rho^2(\delta))$$

根据引理 9，(17) 式可化为

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{d}_x^f\|^2+\|\boldsymbol{d}_s^f\|^2\leqslant \beta^2 n(1+2\delta)^2+2(\frac{3\theta\rho(\delta)}{\rho_p}\|\boldsymbol{x}\|_1)^2+2\beta\sqrt{n}(1+2\delta)\frac{3\theta\rho(\delta)}{\rho_p}\|\boldsymbol{x}\|_1\leqslant\\ f(\delta):=\beta^2 n(1+2\delta)^2+2(3\theta\rho(\delta)n(2+\rho^2(\delta)))^2+\\ 6\beta\sqrt{n}(1+2\delta)\theta\rho(\delta)n(2+\rho^2(\delta))\end{aligned}\tag{18}$$

由(9) 和(18) 式可知，若取

$$\tau=\frac{1}{50},\ \theta=\frac{1}{52n},\ -\frac{1}{17\sqrt{n}}\leqslant\beta\leqslant 0\tag{19}$$

则 $f(\delta)\leqslant\frac{4}{57}$，即 $\omega\leqslant\frac{1}{\sqrt{57}}$，从而使得 $\delta(\boldsymbol{v}^f)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.3　迭代复杂性界

若迭代开始时，迭代点满足 $\delta(\upsilon)\leqslant\tau$，其中 τ,θ,β 按照(19) 式给出，则经过可行步之后，迭代点满足 $\delta(\boldsymbol{v}^f)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$.

根据 $\tau=\frac{1}{50}$ 可知，至多经过

$$\left\lceil\log_2(\log_2 50^2)\right\rceil=4\tag{20}$$

次中心步使得迭代点$(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+)$满足 $\delta(\boldsymbol{x}^+,\boldsymbol{s}^+;\mu)\leqslant\tau$.

由(20) 式知，每次主迭代由一次可行步和至多 4 次中心步组成，也就是说每次主迭代至多需要 5 次内迭代. 每次内迭代都需要重新计算一个新的迭代方向$(\boldsymbol{\Delta x},\boldsymbol{\Delta s})$，主迭代的总数不超过

$$\frac{1}{\theta}\log\frac{\max\{(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0,\ \|\boldsymbol{r}^0\|\}}{\varepsilon}$$

由(19) 式可知，总的内迭代数目的上界为

$$260n\log\frac{\max\{(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0,\ \|\boldsymbol{r}^0\|\}}{\varepsilon}$$

由上述分析可得如下定理：

定理 1　如果问题(1) 有最优解$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{s}^*)$且满足 $\|\boldsymbol{x}^*\|_\infty\leqslant\rho_p$ 和 $\|\boldsymbol{s}^*\|_\infty\leqslant\rho_d$，那么至多经过

$$260n\log\frac{\max\{(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0,\ \|\boldsymbol{r}^0\|\}}{\varepsilon}$$

次迭代，该算法就可以得到单调线性互补问题的 ε -近似解.

由定理 1 可知，该算法的多项式复杂性阶为 $O(nL)$.

注　定理 1 得到的算法迭代界是在假设问题(1) 存在某个最优解$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{s}^*)\in F^*$ 且满足 $\|\boldsymbol{x}^*\|_\infty\leqslant\rho_p$ 和 $\|\boldsymbol{s}^*\|_\infty\leqslant\rho_d$ 的条件下得到的. 如果假设不成立，则算法在执行过程中，可能经过某次可行步迭代后，邻近度量会超过$\frac{1}{\sqrt{2}}$. 若这种情况发生，则表明问题(1) 要么在 F^* 中不存在最优解，要么 ρ_p 和 ρ_d 的取值太小. 针对第二种情况，则可再取较大 ρ_p 和 ρ_d 运行，直到得到问题(1) 的 ε -近似解.

参考文献：

[1] 韩继业，修乃华，戚厚铎. 非线性互补理论与算法 [M]. 上海：上海科学出版社，2006.

[2] KARMARKAR N K. A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming [J]. Combinatorial Optimization，1984，4(4)：373－395.

[3] MIZUNO S. Polynomiality of Infeasible-Interior-Point Algorithms for Linear Programming [J]. Mathematical Programming，1994，67(1－3)：109－119.

[4] 雍龙泉，邓方安，陈　涛. 单调线性互补问题的一种内点算法 [J]. 数学杂志，2009，29(5)：681－686.

[5] 赵玉琴，张明望. 凸二次规划的一个 Mehrotra 型预估校正算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2009，31(9)：77－81.

[6] ROOS C. A Full-Newton Step $O(n)$ Infeasible Interior-Point Algorithm for Linear Optimization [J]. SIAM Journal on Optimi-Zation，2006，16(4)：1110－1136.

[7] MANSOURI H，ROOS C. Simplified $O(nL)$ Infeasible Interior-Point Algorithm for Linear Optimization Using Full-Newton Steps [J]. Optimization Methods and Soft-Ware，2007，22(3)：519－530.

[8] GU G，MANSOURI H，ZANGIABADI M，et al. Improved Full-Newton Step $O(nL)$ Infeasible Interior-Point Method for Linear Optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2010，145(2)：271－288.

[9] LIU Z，SUN W. An Infeasible Interior-Point Algorithm with Full-Newton Step for Linear Optimization [J]. Numerical Algorithms，2007，46(2)：173－188.

[10] MANSOURI H，ZANGIABADI M，PIRHAJI M. A Full-Newton Step $O(n)$ Infeasible-Interior-Point Algorithm for Linear Complementarity Problems [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2011，12(1)：545－561.

A New Full-Newton Step Infeasible Interior-Point Algorithm for Monotone Linear Complementarity Problem

WU Shan[1]，ZHANG Ming-wang[1]，HUANG Zheng-wei[2]

1. *College of Science，China Three Gorges University，Yichang Hubei 443002，China*；

2. *College of Economics & Management，China Three Gorges University，Yichang Hubei 443002，China*

Abstract：In this paper，a full-Newton step infeasible interior-point algorithm is proposed for solving the monotone linear complementarity problem. The algorithm is an improvement and generalization of the full-Newton step infeasible interior-point algorithm for linear optimization proposed by Liu and Sun (Numer Algor 46:173－188，2007). By using some technical lemmas，the polynomial iteration complexity is obtained，namely，$O(nL)$，which coincides with the currently best known iteration bound for infeasible interior-point methods for the monotone linear complementarity problem.

Key words：linear complementarity problem；full-Newton step；infeasible interior-point algorithm；polynomial complexity

责任编辑　张　枸