

定数截尾情形 Lomax 分布形状参数的估计^①

龙 兵¹, 张明波²

1. 荆楚理工学院 数理学院, 湖北 荆门 448000; 2. 中山大学 数学与计算科学学院, 广州 510275

摘要: 首先给出了 Lomax 分布在定数截尾场合下形状参数 θ 的极大似然估计; 其次由“平均剩余寿命”的概念得到了形状参数的逆矩估计, 当取先验分布为指数分布时给出了参数 θ 的 Bayes 估计及区间估计; 然后通过随机模拟对几个估计进行了比较, 最后用一个实例给出了不同截尾样本下形状参数的点估计和区间估计.

关键词: Lomax 分布; 逆矩估计; 贝叶斯估计; 区间估计

中图分类号: O212.8

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2016)07-0101-08

由于 Lomax 分布具有单调的失效率, 是数理统计中的一类重要分布, 并且在寿命试验数据处理中起着重要的作用, 因此有很多统计学者对此分布进行了研究, 产生了较为丰富的研究成果. 文献[1-8]用贝叶斯方法在不同损失函数及先验分布下, 当尺度参数已知时讨论了形状参数的估计问题; 文献[9]研究了 Lomax 分布次序统计量的性质和渐近分布; 文献[10]利用完全样本数据研究了两个参数的区间估计和假设检验; 文献[11]根据次序统计量的分布, 在缺失数据样本下得到了 Lomax 分布尺度参数的点估计及优化置信区间. 当进行寿命试验时, 经常会出现截尾样本, 针对这类样本数据进行统计推断已经产生了很丰富的研究成果; 文献[12]由不完全信息的随机截尾试验数据, 通过贝叶斯方法得到了几何分布参数的估计; 文献[13]在左截尾右删失数据下研究了指数分布参数多变点的贝叶斯估计问题. 然而针对定数截尾样本, 研究 Lomax 分布形状参数贝叶斯估计的文献尚未见到, 本文将就这个问题进行探讨.

两参数 Lomax 分布的概率密度函数为

$$f(x; \theta, \lambda) = \frac{\theta}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-(\theta+1)} \quad x > 0, \lambda > 0, \theta > 0 \quad (1)$$

其分布函数为

$$F(x; \theta, \lambda) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\theta} \quad x > 0, \lambda > 0, \theta > 0 \quad (2)$$

其中: λ 为尺度参数, θ 为形状参数.

由定义易得, 当 $\theta > 1$ 时 Lomax 分布的期望 $E(X) = \frac{\lambda}{\theta - 1}$.

对一些高可靠性的产品进行寿命试验常采用定数截尾方式, 具体方案如下: 先从一批寿命分布为(1)的产品中, 随机抽取 n 个样品进行截尾寿命试验, 到有 r 个样品失效时停止试验, 设失效数据为 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(r)}$, 本文假设尺度参数 λ 已知, 将基于这些试验数据来研究形状参数的估计问题.

1 形状参数 θ 的极大似然估计

设 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(r)}$ 为来自 Lomax 分布(1)的样本容量为 n 的定数截尾样本(为方便起见, 可

① 收稿日期: 2015-03-06

基金项目: 湖北省教育厅重点科研项目(D20134301); 荆楚理工学院院级科研项目(ZR201504).

作者简介: 龙 兵(1973-), 男, 湖北荆门人, 副教授, 理学硕士, 主要从事数理统计的研究.

将 $X_{(i)}$ 下标数字外的括号省略, 下文用 X_i 表示第 i 个最小观测值), 当 $r = n$ 时为全样本情形.

令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, 样本 x 的似然函数为

$$L(x | \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(x_i; \theta, \lambda) \right] \bar{F}^{n-r}(x_r; \theta, \lambda) \quad (3)$$

把(1),(2)式代入(3)式, 可得

$$L(x | \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\theta}{\lambda} \right)^r \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{x_i}{\lambda} \right)^{-(\theta+1)} \left(1 + \frac{x_r}{\lambda} \right)^{-\theta(n-r)} \quad (4)$$

对数似然函数为

$$\begin{aligned} \ln L(x | \theta) &= \ln \frac{n!}{(n-r)!} + r \ln \theta - r \ln \lambda - (\theta + 1) \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda} \right) - \theta(n-r) \ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda} \right) \\ \frac{\partial \ln L(x | \theta)}{\partial \theta} &= \frac{r}{\theta} - \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda} \right) - (n-r) \ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

以后为方便起见, 令

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{X_i}{\lambda} \right) & t &= \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda} \right) \\ M &= (n-r) \ln \left(1 + \frac{X_r}{\lambda} \right) & m &= (n-r) \ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

由

$$\frac{\partial \ln L(x | \theta)}{\partial \theta} = 0$$

解得

$$\theta = \frac{r}{t + m}$$

由于

$$\frac{\partial^2 \ln L(x | \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{r}{\theta^2} < 0$$

因此形状参数 θ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta}_M = \frac{r}{t + m}$$

2 形状参数 θ 的逆矩估计

先看下面的概念. 设产品寿命 $X \sim F(x)$. 称产品正常工作到时刻 x_0 后还能正常工作的平均时间为该产品在时刻 x_0 的平均剩余寿命, 记为 $M_X(x_0)$.

由文献[14]知

$$M_X(x_0) = \frac{1}{R(x_0)} \{ E(X) - \int_0^{x_0} R(x) dx \}$$

其中 $R(x) = 1 - F(x)$.

当 $\theta > 1$ 时, Lomax 分布的数学期望 $E(X) = \frac{\lambda}{\theta - 1}$, 且

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} R(x) dx &= \int_0^{x_0} \left(1 + \frac{x}{\lambda} \right)^{-\theta} dx = -\frac{\lambda}{\theta - 1} \left[\left(1 + \frac{x_0}{\lambda} \right)^{-\theta+1} - 1 \right] \\ M_X(x_0) &= \left(1 + \frac{x_0}{\lambda} \right)^{\theta} \left\{ \frac{\lambda}{\theta - 1} + \frac{\lambda}{\theta - 1} \left[\left(1 + \frac{x_0}{\lambda} \right)^{-\theta+1} - 1 \right] \right\} = \\ &\quad \frac{\lambda}{\theta - 1} \left(1 + \frac{x_0}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

在时刻 x_r , 未失效的 $n - r$ 个受试样品的平均剩余寿命为 $M_X(x_r)$, 则 $x_r + M_X(x_r)$ 即为时刻 x_r 每

一未失效样品的期望寿命,因此 $\sum_{i=1}^r x_i + (n-r)[x_r + M_X(x_r)]$ 为 n 个受试样品的期望寿命的总和.

根据矩估计的替换原理,建立如下方程

$$\frac{\lambda}{\theta-1} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^r x_i + (n-r) \left[x_r + \frac{\lambda}{\theta-1} \left(1 + \frac{x_r}{\lambda} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

解得

$$\theta = \frac{r\lambda + \sum_{i=1}^r x_i}{\sum_{i=1}^r x_i + (n-r)x_r}$$

由于 $\theta > 1$, 因此形状参数 θ 的逆矩估计为

$$\hat{\theta} = \max \left\{ 1, \frac{r\lambda + \sum_{i=1}^r x_i}{\sum_{i=1}^r x_i + (n-r)x_r} \right\}$$

另外, 当 θ 已知, 且 $\theta > 1$ 时, 由(5)式也可得到尺度参数 λ 的逆矩估计为

$$\hat{\lambda} = \frac{(\theta-1) \sum_{i=1}^r x_i + \theta(n-r)x_r}{r}$$

3 形状参数 θ 的贝叶斯估计

对于似然函数(4), 引进前面的记号, 则

$$L(x | \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \theta^r e^{-(t+m)\theta} \lambda^{-r} e^{-t} \propto \theta^r e^{-(t+m)\theta} \quad (6)$$

若取形状参数 θ 的先验分布为指数分布, 其密度函数为

$$\pi(\theta) = \mu e^{-\mu\theta} \quad \theta > 0 \quad \mu > 0 \quad (7)$$

其中 μ 为超参数. 由(6), (7)式, 根据贝叶斯公式可得到 θ 的后验密度函数

$$\pi(\theta | x) = \frac{L(x | \theta)\pi(\theta)}{\int_0^\infty L(x | \theta)\pi(\theta)d\theta} \propto \theta^r e^{-(t+m+\mu)\theta} \quad (8)$$

即

$$\theta | x \sim Ga(r+1, t+m+\mu)$$

下面将在几类不同的损失函数下, 给出形状参数 θ 的贝叶斯估计.

定理1 在平方损失函数 $L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2$ 下, 若形状参数 θ 的先验分布为指数分布(7), 则 Lomax 分布(2)中参数 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B = \frac{r+1}{t+m+\mu}$$

证 由于在平方损失函数下, 参数的贝叶斯估计为后验分布的均值, 因此

$$\hat{\theta}_B = E(\theta | x) = \frac{r+1}{t+m+\mu} \quad (9)$$

定理2 在 Linex 损失函数 $L(\theta, \delta) = e^{c(\delta-\theta)} - c(\delta-\theta) - 1$, ($c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$) 下, 若取形状参数 θ 的先验分布为指数分布(7), 则 Lomax 分布(2)中参数 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BL} = -\frac{r+1}{c} \ln \frac{t+m+\mu}{t+m+\mu+c} \quad (10)$$

证 由于后验风险

$$R(\delta | x) = E[L(\theta, \delta)] = e^{c\delta} E(e^{-c\theta} | x) + cE(\theta | x) - c\delta - 1$$

可以证明当决策函数 $\delta = -c^{-1} \ln E(e^{-c\theta} | x)$ 时, 风险函数达到最小值, 因此可得到 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BL} = -c^{-1} \ln E(e^{-c\theta} | x)$$

而

$$\begin{aligned} E(e^{-c\theta} | x) &= \frac{\int_0^{+\infty} \theta^r e^{-(t+m+\mu+c)\theta} d\theta}{\int_0^{+\infty} \theta^r e^{-(t+m+\mu)\theta} d\theta} = \\ &= \frac{(t+m+\mu+c)^{-(r+1)} \Gamma(r+1)}{(t+m+\mu)^{-(r+1)} \Gamma(r+1)} = \left(\frac{t+m+\mu}{t+m+\mu+c} \right)^{r+1} \end{aligned}$$

因此形状参数 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BL} = -c^{-1} \ln \left(\frac{t+m+\mu}{t+m+\mu+c} \right)^{r+1} = -\frac{r+1}{c} \ln \frac{t+m+\mu}{t+m+\mu+c}$$

定理 3 在熵损失函数 $L(\theta, \delta) = \frac{\delta}{\theta} - \ln \frac{\delta}{\theta} - 1$ 下, 若取形状参数 θ 的先验分布为指数分布(7), 则 Lomax 分布(2) 中参数 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BE} = \frac{r}{t+m+\mu} \quad (11)$$

证 后验风险函数

$$R(\delta | x) = E[L(\theta, \delta)] = \delta E\left(\frac{1}{\theta} | x\right) + E(\ln \theta | x) - \ln \delta - 1$$

可以证明当 $\delta = \frac{1}{E(\theta^{-1} | x)}$ 时, 后验风险达到最小值, 因此对已知的后验分布(8), 在熵损失函数下参数 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BE} = \frac{1}{E(\theta^{-1} | x)}$$

由于

$$E(\theta^{-1} | x) = \frac{\int_0^{+\infty} \theta^{r-1} e^{-(t+m+\mu)\theta} d\theta}{\int_0^{+\infty} \theta^r e^{-(t+m+\mu)\theta} d\theta}$$

令 $(t+m+\mu)\theta = y$, 则

$$E(\theta^{-1} | x) = \frac{(t+m+\mu)^{-r} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{r-1} dy}{(t+m+\mu)^{-(r+1)} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^r dy} = \frac{t+m+\mu}{r}$$

因此 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BE} = \frac{1}{E(\theta^{-1} | x)} = \frac{r}{t+m+\mu}$$

定理 4 在对称熵损失函数 $L(\theta, \delta) = \frac{\delta}{\theta} + \frac{\theta}{\delta} - 2$ 下, 若取形状参数 θ 的先验分布为指数分布(7), 则 Lomax 分布(2) 中参数 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BSE} = \frac{\sqrt{r(r+1)}}{t+m+\mu} \quad (12)$$

证 对参数 θ 同时求后验期望, 得到后验风险为

$$R(\delta | t) = E[L(\theta, \delta)] = \delta E\left(\frac{1}{\theta} | x\right) + \frac{1}{\delta} E(\theta | x) - 2$$

当 $\delta = \sqrt{\frac{E(\theta | x)}{E(\theta^{-1} | x)}}$ 时, 上式达到最小值, 因此在对称熵损失函数下 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BSE} = \sqrt{\frac{E(\theta | x)}{E(\theta^{-1} | x)}}$$

由于

$$E(\theta | x) = \frac{r+1}{t+m+\mu} \quad E(\theta^{-1} | x) = \frac{t+m+\mu}{r}$$

因此在对称熵损失函数下, θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{BSE} = \sqrt{\frac{E(\theta | x)}{E(\theta^{-1} | x)}} = \frac{\sqrt{r(r+1)}}{t+m+\mu}$$

4 形状参数 θ 的贝叶斯区间估计

前面已经讨论了参数 θ 的点估计问题, 下面将研究 θ 的贝叶斯可信区间.

若取形状参数 θ 的共轭先验分布为指数分布(7), 则由后验分布的核函数(8) 式得到 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta | x) = \frac{(t+m+\mu)^{r+1}}{\Gamma(r+1)} e^{-(t+m+\mu)\theta} \cdot \theta^r \quad \theta > 0 \quad (13)$$

因此可得下面的定理.

定理 5 若 Lomax 分布(2) 中形状参数 θ 的后验分布为(13), 对任意 $0 < \alpha < 1$, 则 θ 的可信水平为 $1 - \alpha$ 的可信区间为

$$\left(\frac{1}{2(t+m+\mu)} \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r+2), \frac{1}{2(t+m+\mu)} \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r+2) \right) \quad (14)$$

证 对于密度函数(13), 令 $2(t+m+\mu)\theta = Y$, 则 Y 的密度函数为

$$\begin{aligned} h(y) &= \pi\left(\frac{y}{2(t+m+\mu)} | x\right) \frac{1}{2(t+m+\mu)} = \\ &= \frac{(t+m+\mu)^{r+1}}{\Gamma(r+1)} e^{-\frac{1}{2}y} \left[\frac{y}{2(t+m+\mu)}\right]^r \cdot \frac{1}{2(t+m+\mu)} = \\ &= \frac{1}{2^{r+1}\Gamma(r+1)} e^{-\frac{1}{2}y} \cdot y^r \quad y > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式正是自由度为 $2r+2$ 的卡方分布的密度函数, 即 $Y \sim \chi^2(2r+2)$.

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r+2) < Y < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r+2)\} = \\ &= P\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r+2) < 2(t+m+\mu)\theta < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r+2)\} = \\ &= P\left\{\frac{1}{2(t+m+\mu)} \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2r+2) < \theta < \frac{1}{2(t+m+\mu)} \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2r+2)\right\} \end{aligned}$$

5 超参数 μ 的估计

前面得到的形状参数 θ 的贝叶斯估计中, 由于超参数 μ 未知, 因此需要估计. 根据文献[15] 用极大似然法来估计 μ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty f(x; \theta, \lambda) \pi(\theta) d\theta = \int_0^\infty \frac{\theta}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-(\theta+1)} \mu e^{-\mu\theta} d\theta = \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \int_0^\infty \theta e^{-\left[\ln\left(1+\frac{x}{\lambda}\right) + \mu\right]\theta} d\theta \end{aligned}$$

令

$$\left[\ln\left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) + \mu\right]\theta = y$$

则

$$f(x) = \frac{\mu}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) + \mu\right]^{-2} \int_0^\infty y e^{-y} dy =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-2} \\ F(x) = & \int_0^x \frac{\mu}{\lambda} \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \left[\ln \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-2} dt = \\ & \mu \int_0^x \left[\ln \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-2} d \left[\ln \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right) + \mu \right] = 1 - \frac{\mu}{\ln \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) + \mu} \end{aligned}$$

因此

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{\mu}{\ln \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) + \mu}$$

以 $f(x_i)$, $\bar{F}(x_r)$ 分别代替(3) 式中的 $f(x_i; \theta, \lambda)$, $\bar{F}(x_r; \theta, \lambda)$, 则似然函数(3) 变为

$$L(x | \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{\mu^n}{\lambda^r} \left\{ \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right)^{-1} \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-2} \right\} \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-(n-r)}$$

对数似然函数为

$$\ln L(x | \theta) = A + n \ln \mu - 2 \sum_{i=1}^r \ln \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right] - (n-r) \ln \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]$$

其中:

$$\begin{aligned} A = & \ln \frac{n!}{(n-r)!} - r \ln \lambda - \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) \\ \frac{\partial \ln L(x | \theta)}{\partial \mu} = & \frac{n}{\mu} - 2 \sum_{i=1}^r \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1} - (n-r) \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1} = 0 \end{aligned}$$

进一步可得

$$\frac{n}{\mu} = 2 \sum_{i=1}^r \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1} + (n-r) \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1}$$

令

$$g_1(\mu) = \frac{n}{\mu}, \quad g_2(\mu) = 2 \sum_{i=1}^r \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1} + (n-r) \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1}$$

显然 $g_1(\mu) > 0$, $g_2(\mu) > 0$, 当 $\mu \rightarrow 0^+$ 时,

$$g_1(\mu) > g_2(\mu) \quad g_1'(\mu) = -\frac{n}{\mu^2} < 0 \quad g_1''(\mu) = \frac{2n}{\mu^3} > 0$$

所以 $g_1(\mu)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为严格单调递减的凹函数.

$$g_2'(\mu) = -2 \sum_{i=1}^r \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-2} - (n-r) \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-2} < 0$$

$$g_2''(\mu) = 4 \sum_{i=1}^r \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-3} + 2(n-r) \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-3} > 0$$

所以 $g_2(\mu)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是严格单调递减的凹函数.

并且

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{g_1(\mu)}{g_2(\mu)} &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{n\mu^{-1}}{\sum_{i=1}^r 2 \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1} + (n-r) \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1}} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{n}{\mu \sum_{i=1}^r 2 \left[\ln \left(1 + \frac{x_i}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1} + (n-r) \mu \left[\ln \left(1 + \frac{x_r}{\lambda}\right) + \mu \right]^{-1}} = \\ &= \frac{n}{n+r} < 1 \end{aligned}$$

故方程

$$\frac{n}{\mu}=2\sum_{i=1}^r\left[\ln\left(1+\frac{x_i}{\lambda}\right)+\mu\right]^{-1}+(n-r)\left[\ln\left(1+\frac{x_r}{\lambda}\right)+\mu\right]^{-1}$$

在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解, 迭代公式为

$$\mu^{(p+1)}=\frac{n}{2\sum_{i=1}^r\left[\ln\left(1+\frac{x_i}{\lambda}\right)+\mu^{(p)}\right]^{-1}+(n-r)\left[\ln\left(1+\frac{x_r}{\lambda}\right)+\mu^{(p)}\right]^{-1}}\tag{16}$$

记(16) 式得到的最终迭代值为 $\hat{\mu}$, 将 $\hat{\mu}$ 代入(9)–(12) 式及(14) 式就可得到形状参数 θ 的各种贝叶斯估计.

6 Monte Carlo 随机模拟

下面用随机模拟来比较形状参数 θ 的几种估计的优劣. 具体步骤如下:

- 1) 产生一组容量为 n 的服从 $U(0,1)$ 的相互独立随机样本 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$;
- 2) 给定 $\lambda=1, \theta=2.2$ 的值, 令

$$X_i=\lambda[(1-Y_i)^{-\frac{1}{\theta}}-1] \qquad i=1,2,\cdots,n$$

则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是服从 Lomax 分布(2) 的随机样本, 确定截尾数得到截尾样本;

- 3) 根据截尾样本, 可以计算出形状参数 θ 的极大似然估计、逆矩估计和不同损失函数下的贝叶斯估计.

以上步骤重复模拟 1 000 次, 计算不同的样本容量 n 和截尾数下, 形状参数各种估计的均值和均方误差(MSE). 模拟结果列于表 1 中.

表 1 θ 各种估计下的均值和均方误差

n	r	$\hat{\theta}_M(\text{MSE})$	$\hat{\theta}(\text{MSE})$	$\hat{\theta}_B(\text{MSE})$	$\hat{\theta}_{BE}(\text{MSE})$	$\hat{\theta}_{BSE}(\text{MSE})$
20	18	2.350 0(0.376 1)	1.898 3(0.119 5)	2.056 8(0.201 1)	1.948 5(0.225 3)	2.001 9(0.210 3)
20	16	2.361 3(0.437 3)	2.097 0(0.044 7)	2.032 7(0.218 2)	1.913 2(0.250 8)	1.972 0(0.231 0)
20	14	2.366 3(0.506 4)	2.145 5(0.031 2)	1.996 2(0.241 7)	1.863 1(0.287 9)	1.928 5(0.260 5)
40	35	2.253 3(0.155 0)	2.399 1(0.088 8)	2.108 5(0.118 1)	2.049 9(0.126 2)	2.079 0(0.121 3)
40	30	2.277 3(0.176 6)	2.406 7(0.072 2)	2.106 3(0.125 0)	2.038 4(0.135 0)	2.072 1(0.128 9)
40	25	2.300 3(0.238 3)	2.460 4(0.065 2)	2.092 7(0.153 7)	2.012 2(0.166 7)	2.052 0(0.158 6)
80	70	2.228 4(0.074 6)	2.397 2(0.063 8)	2.155 9(0.064 6)	2.125 5(0.066 5)	2.140 6(0.065 3)
80	60	2.232 3(0.087 3)	2.418 0(0.063 8)	2.147 7(0.073 8)	2.112 5(0.076 5)	2.130 0(0.074 8)
80	50	2.237 7(0.098 5)	2.193 5(0.006 0)	2.136 4(0.081 1)	2.094 6(0.085 2)	2.115 4(0.082 7)

从表 1 中的数据来看, 形状参数 θ 的极大似然估计的均值更加接近于真值 2.2, 但是均方误差比其它的几个估计要大; 另外, 从与真值的接近程度及均方误差来看, 对于上表中的 3 个贝叶斯估计, 在平方损失函数下, 形状参数 θ 的贝叶斯估计是最优的.

使用 MATLAB 软件, 给定 $\theta=3, \lambda=1$ 随机产生一个容量为 14 且服从 Lomax 分布(2) 的样本, 按照从小到大的顺序排列如下:

0.079 8,0.084 8,0.136 7,0.160 1,0.183 7,0.207 6,0.235 8,0.294 4,0.340 3,0.380 8,0.485 6,0.684 9,1.566 1,1.709 6

假设最后 2 个数据被截尾, 因此 $n=14, r=12$. 这里取参数 $c=0.5$. 通过计算得到形状参数 θ 的各种估计值见表 2.

表 2 $\lambda=1$ 时, 形状参数 θ 的估计($\alpha=0.05$)

$\hat{\theta}_M$	$\hat{\theta}$	$\hat{\theta}_B$	$\hat{\theta}_{BL}$	$\hat{\theta}_{BE}$	$\hat{\theta}_{BSE}$	θ 的可信区间
3.126	3.289	3.176	2.996	2.932	3.051	(1.691, 5.121)

从表 2 中所得到的各种估计可以看到, 参数真值落在可信区间的中部. 形状参数 θ 的逆矩估计比真值偏大较多, 其余的估计值与真值相差不大.

参考文献:

- [1] 肖小英, 任海平. 熵损失函数下两参数 Lomax 分布形状参数的 Bayes 估计 [J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(5): 227—230.
- [2] 周明元. 对称熵损失函数下两参数 Lomax 分布形状参数的 Bayes 估计 [J]. 统计与决策, 2010(12): 161—162.
- [3] 姚 惠, 谢 林. 不同损失下 Lomax 分布形状参数的 Bayes 估计 [J]. 数学杂志, 2011, 31(6): 1131—1134.
- [4] 姚 惠. Linex 损失下 Lomax 分布形状参数的 Bayes 估计 [J]. 统计与决策, 2011(16): 173—175.
- [5] 姚 惠. 熵损失函数下 Lomax 分布形状参数的 Bayes 估计 [J]. 遵义师范学院学报, 2011, 13(6): 107—109.
- [6] 芦凌飞. 刻度平方误差损失下 Lomax 分布形状参数的 Bayes 估计 [J]. 商丘师范学院学报, 2012, 28(6): 38—40.
- [7] 余慧敏. 复合 Linex 对称损失下 Lomax 分布参数的 Bayes 估计 [J]. 广东海洋大学学报, 2013, 33(4): 87—89.
- [8] 韦 师. 复合 LINNEX 对称损失下 Lomax 分布形状参数的 Bayes 估计 [J]. 贺州学院学报, 2014, 1: 112—114.
- [9] 龙 兵. 两参数 Lomax 分布次序统计量的性质和渐近分布 [J]. 兰州交通大学学报, 2013, 32(4): 164—167.
- [10] 龙 兵. 两参数 Lomax 分布中参数的区间估计和假设检验 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2014, 38(2): 176—179.
- [11] 龙 兵. 缺失数据样本下 Lomax 分布尺度参数的估计 [J]. 统计与决策, 2014(19): 21—23.
- [12] 何朝兵, 刘华文. IIRCT 下几何分布参数多变点的贝叶斯估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(1): 1—6.
- [13] 何朝兵, 刘跃军, 刘华文. 左截尾右删失数据下指数分布参数多变点的贝叶斯估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(1): 12—17.
- [14] 倪中新, 费鹤良. 威布尔分布无失效数据的统计分析 [J]. 应用数学学报, 2003(7): 533—543.
- [15] 龙 兵. 不同损失函数下艾拉姆咖分布参数的 Bayes 估计 [J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2013, 30(3): 7—10.

Bayesian Estimation of the Shape Parameter on Lomax Distribution Under Type- II Censored Samples

LONG Bing¹, ZHANG Ming-bo²

1. Department of Mathematics and Physics, Jingchu University of Technology, Jingmen Hubei 448000, China;

2. School of Mathematics & Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: Firstly, the maximum likelihood estimation of the shape parameter is given under type-II censored samples on Lomax distribution. Next, the inverse moment estimation of the shape parameter is obtained by means of the concept of “average remaining life”, and the Bayesian estimation and interval estimation of the shape parameter are given when taking prior distribution for exponential distribution. Then, several estimations are compared through stochastic simulation. Finally, the point estimation and the interval estimation of the shape parameter are given under different censored samples by means of a practical example.

Key words: Lomax distribution; inverse moment estimation; Bayesian estimation; interval estimation

责任编辑 张 构

