DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.08.005

单群 A_5 的状态空间图[①]

景艳艳， 周 伟

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要研究 A_5 的状态空间图，并证明了：A_5 不能由它的 2 阶和 4 阶自同构诱导的状态空间图唯一刻画，但 A_5 可以由它的 3 阶和 6 阶自同构诱导的状态空间图刻画.

关 键 词：交错群；自同构；状态空间图

中图分类号：O152.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1673－9868(2016)08－0027－04

有限群为群论的重要组成部分，其结构与性质应用于许多学科. 但由于有限群的高度抽象性，因此有必要引入其它工具来帮助我们理解有限群的结构和性质，其中图论就是有力的工具. 例如文献[1]用 A_5 的数量刻画构造了自同构为 A_5 的图. 文献[2]刻画了李型单群的一种特征标次数图. 对于单群 A_5 有许多刻画，例如文献[3]用群的阶及元素的最高阶刻画了单群 A_5，文献[4]研究了 A_5 的 5 阶自同构诱导的状态空间图. 但对于其它阶自同构诱导的状态空间图并未作研究. 本文继续研究 A_5 的 2 阶、3 阶、4 阶和 6 阶自同构诱导的状态空间图. 有限群 G 关于它的一个自同态 α 的状态空间图定义为 $\Gamma_{G,\alpha}$[5]，即 $\Gamma_{G,\alpha}$ 的顶点集为群 G 中的元素，对 G 的元素 x,y，可以确定一条由 x 指向 y 的边当且仅当 $\alpha(x)=y$.

本文中 $\mathrm{Fix}(G,\alpha)$ 为自同态 α 的固定点集，即 $\mathrm{Fix}(G,\alpha)=\{x\in G\mid \alpha(x)=x\}$. 由 s 个顶点组成的分支称为 s 元分支. k_r 表示 r 阶元所占分支的个数. m_t 表示 t 阶元的个数. n_p 表示 sylow p-子群的个数. $[m,n]$ 表示 m 与 n 的最小公倍数. 其它符号都是标准的，见文献[6－7].

1 A_5 的 2 阶和 4 阶自同构诱导的状态空间图

由于 $\mathrm{Aut}(A_5)=S_5$，A_5 的 2 阶自同构可归结为 $\alpha=(12)(34)$ 和 $\beta=(12)$ 两种类型，因此我们只需研究 α 和 β 所诱导的内自同构的情况，从而得到两个不同构的状态空间图分别为 $\Gamma_{A_5,\alpha}$(图 1)和 $\Gamma_{A_5,\beta}$(图 2). 而 A_5 的 4 阶自同构可归结为 $\gamma=(1234)$ 这种类型，因此我们只需研究 γ 所诱导的内自同构的情况，从而得到它的状态空间图为 $\Gamma_{A_5,\gamma}$(图 3).

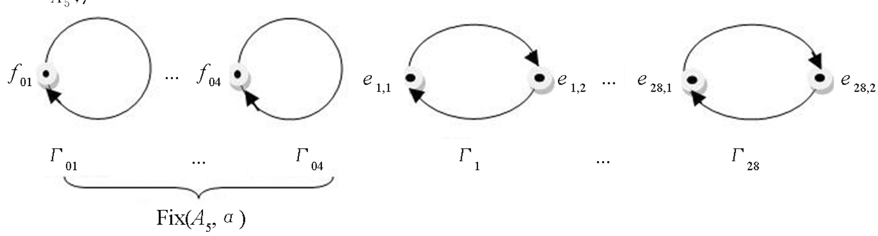

图 1 状态空间图 $\Gamma_{A_5,\alpha}$

---

① 收稿日期：2015－12－09
基金项目：国家自然科学基金项目(11271301).
作者简介：景艳艳(1990－)，女，河南新乡人，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：周 伟，副教授.

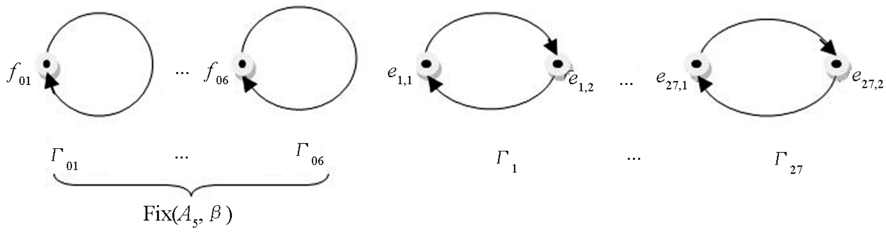

图 2 状态空间图 $\Gamma_{A_5,\beta}$

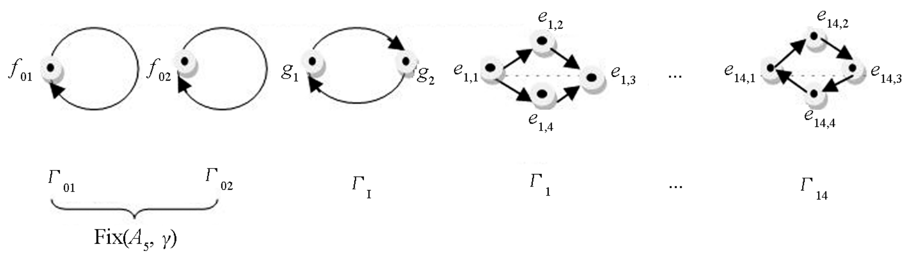

图 3 状态空间图 $\Gamma_{A_5,\gamma}$

显然，$\Gamma_{A_{5,\alpha}}$ 的连通分支为 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{04},\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{28}$，其中 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{04}$ 为 1 元分支，$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{28}$ 为 2 元分支，而且 $\mathrm{Fix}(A_5,\alpha)$ 由 1 元分支 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{04}$ 的顶点集组成. $\Gamma_{A_{5,\beta}}$ 的连通分支为 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{06},\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{27}$，其中 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{06}$ 为 1 元分支，$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{27}$ 为 2 元分支，而且 $\mathrm{Fix}(A_5,\beta)$ 由 1 元分支 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{06}$ 的顶点集组成. $\Gamma_{A_5,\gamma}$ 的连通分支为 $\Gamma_{01},\Gamma_{02},\Gamma_I,\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{14}$，其中 Γ_{01},Γ_{02} 为 1 元分支，Γ_I 为 2 元分支，$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{14}$ 为 4 元分支，而且 $\mathrm{Fix}(A_5,\gamma)$ 由 1 元分支 Γ_{01},Γ_{02} 的顶点集组成.

命题 1 A_5 不能由它的 2 阶自同构诱导的状态空间图唯一刻画.

证 给出群 Z_{60} 的一个自同构 $f_1: a \longrightarrow a^{43}$. 下面说明 $\Gamma_{Z_{60},f_1} \cong \Gamma_{A_5,\alpha}$.

容易验证 f_1 是 Z_{60} 的 2 阶自同构，故 Γ_{Z_{60},f_1} 是由 1 元分支和 2 元分支组成. 从图 1 可知 $\Gamma_{A_5,\alpha}$ 由 4 个 1 元分支和 28 个 2 元分支组成. 为说明 $\Gamma_{Z_{60},f_1} \cong \Gamma_{A_5,\alpha}$，只需说明 Γ_{Z_{60},f_1} 与 $\Gamma_{A_5,\alpha}$ 1 元分支的个数相等，即 $|\mathrm{Fix}(Z_{60},f_1)|=|\mathrm{Fix}(A_5,\alpha)|$. 事实上 $|\mathrm{Fix}(Z_{60},f_1)|=|\mathrm{Fix}(A_5,\alpha)|=4$，故 $\Gamma_{Z_{60},f_1} \cong \Gamma_{A_5,\alpha}$.

给出群 Z_{60} 的一个自同构 $f_2: a \longrightarrow a^{29}$. 容易验证 f_2 是 G 的 2 阶自同构. 同理可以证明 $\Gamma_{Z_{60},f_2} \cong \Gamma_{A_5,\alpha}$.

命题 2 A_5 不能由它的 4 阶自同构诱导的状态空间图唯一刻画.

证 取群 $G=A_4\times Z_5=A_4\times\langle a\rangle$. 令：$f_1\in\mathrm{Aut}(A_4)$，满足 $f_1: A_4\longrightarrow A_4$；$f_2\in\mathrm{Aut}(Z_5)$，满足 $f_2: a\longrightarrow a^2$. 给出 G 的一个自同构：

$$f: ga^i \longrightarrow g^{f_1}(a^i)^{f_2} \qquad g\in A_4,\ a\in\langle a\rangle,\ i=0,1,2,3,4$$

容易验证 f 为 G 的 4 阶自同构. 下面说明 $\Gamma_{G,f}\cong\Gamma_{A_5,\gamma}$.

由图 3 可知 $\Gamma_{A_5,\gamma}$ 由 2 个 1 元分支，1 个 2 元分支和 14 个 4 元分支组成. 为说明 $\Gamma_{G,f}\cong\Gamma_{A_5,\gamma}$，只需说明 $\Gamma_{G,f}$ 与 $\Gamma_{A_5,\gamma}$ 1 元分支的个数和 2 元分支的个数都相等. 由于

$$|\mathrm{Fix}(G,f)|=|\mathrm{Fix}(A_5,\gamma)|=2$$

设 $\Gamma_{G,f}$ 的 2 元分支的个数为 L_2，则

$$L_2=\frac{|\mathrm{Fix}(G,f^2)|-|\mathrm{Fix}(A_5,f)|}{2}=1$$

故

$$\Gamma_{G,f}\cong\Gamma_{A_5,\gamma}$$

2 A_5 的 3 阶和 6 阶自同构诱导的状态空间图

由于 $\mathrm{Aut}(A_5)=S_5$，因此我们只需研究 $\delta=(123)$ 所诱导的内自同构的情况，从而得到 A_5 的 3 阶自同

构诱导的状态空间图 $\Gamma_{A_5,\delta}$(图 4). 同理研究 $\theta=(12)(345)$ 所诱导的内自同构的情况，从而得到 A_5 的 6 阶自同构诱导的状态空间图 $\Gamma_{A_5,\theta}$(图 5).

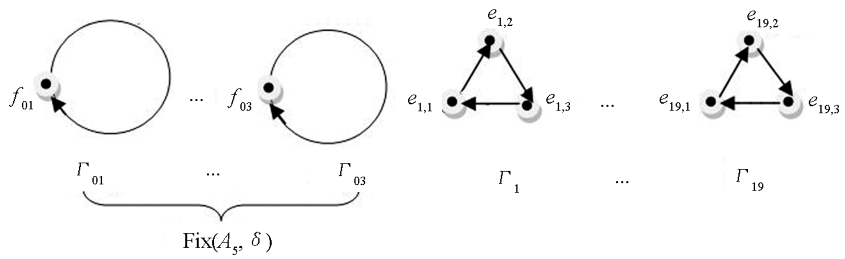

图 4　状态空间图 $\Gamma_{A_5,\delta}$

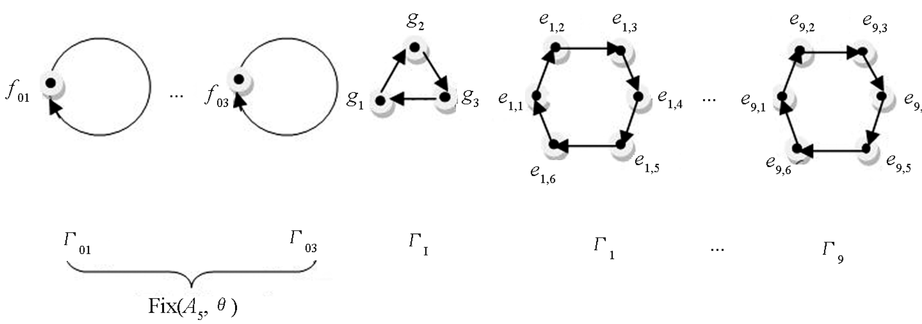

图 5　状态空间图 $\Gamma_{A_5,\theta}$

显然，$\Gamma_{A_5,\delta}$ 的连通分支为 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{03},\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{19}$，其中 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{03}$ 为 1 元分支，$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{19}$ 为 3 元分支，而且 Fix(A_5，δ) 由 1 元分支 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{03}$ 的顶点集组成. $\Gamma_{A_5,\delta}$ 的连通分支为 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{03},\Gamma_I,\Gamma_1,\cdots,\Gamma_9$，其中 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{03}$ 为 1 元分支，Γ_I 为 3 元分支，$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_9$ 为 6 元分支，而且 Fix(A_5，θ) 由 1 元分支 $\Gamma_{01},\cdots,\Gamma_{03}$ 的顶点集组成.

首先给出几个简单的结论：

引理 1[4]　群 G 的一个自同态 α 为自同构的充要条件是图 $\Gamma_{G,\alpha}$ 不含有子图 $\Delta_k(k\geqslant 2)$.

引理 2[4]　Fix(G，α) $\leqslant G$.

引理 3[4]　设群 G 中 k 阶循环子群的个数为 m，则 G 中 k 阶元的个数为 $m\cdot\varphi(k)$，其中 φ 为欧拉函数.

引理 4[7]　60 阶单群必同构于 A_5.

定理 1　设 G 为有限群，f 为它的自同态，若 $\Gamma_{G,f}\cong\Gamma_{A_5,\delta}$，则 $G\cong A_5$.

证　由状态空间图同构可知 $|G|=|A_5|=60$. 由引理 2 可知 Fix(G，f) $\leqslant G$，从而 Fix(G，f) 为 G 的 3 阶子群. 不妨设生成元 f_3，f_1 为单位元，则 Fix(G，f) 由 1 个单位元和 2 个 3 阶元组成.

注意到图 $\Gamma_{G,f}$ 不含有子图 $\Delta_k(k\geqslant 2)$，由引理 1 可知 f 为 G 的 3 阶自同构. 由于自同构不改变元素的阶，因此状态空间图的每个连通分支元素的阶都相等. 故在连通分支 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{19}$ 中，令元素的阶为 $r\neq 3$ 的分支的个数为 k_r，则这些连通分支所提供的 r 阶元的个数为 $m_r=3\cdot k_r$. 又由引理 3，r 阶元的个数为 $m_r=m\cdot\varphi(r)$，故 $[3,\varphi(r)]\mid m_r$.首先证明 G 为单群. 若群 G 不是单群，则 G 存在非平凡的极小正规子群，设为 N，则 $|N|=5,4,3,2$.

若 $|N|=5$，则 N 为 G 的正规 Sylow 5-子群. 此时 G 中 5 阶元的个数为 $m_5=4$，矛盾. 故群 G 中 Sylow 5-子群的个数为 $n_5=6$.

若 $|N|=4$，则 N 是 G 的正规 Sylow 2-子群. 假设 N 为循环群，则 4 阶元的个数为 2，矛盾. 假设 N 不是循环群，由 N/C 定理可知 $|C_G(N)|=10,20,30,60$. 又因 $N\subseteq C_G(N)$，故 $|C_G(N)|=20,60$. 若 $|C_G(N)|=20$，则 $C_G(N)$ 中 Sylow 5-子群的个数为 1，设为 P，则 $P\subseteq C_G(N)$，故 $N\subseteq C_G(P)\subseteq$

$N_G(P)$，则 $2 \nmid n_5$，矛盾. 若 $|C_G(N)| = 60$，即 $G = C_G(N)$，则 $C_G(N)$ 中存在1个Sylow 5-子群，设为 P，则 $N \subseteq C_G(P) \subseteq N_G(P)$，故 $2 \nmid n_5$，矛盾.

若 $|N|=3$，则 N 为 G 的正规 Sylow 3-子群. 由以上讨论知 G 中 Sylow 5-子群的个数为 $n_5=6$，设 P 为 G 的一个 Sylow 5-子群，则 PN 为 G 的15阶子群，则 $|N_G(P)| \geqslant 15$，故 G 中 Sylow 5-子群的个数 $n_5 \leqslant 4$，又由 Sylow 定理知 G 中 Sylow 5-子群的个数为1，矛盾.

若 $|N|=2$，设 $N=\langle a \rangle$，其中 $|a|=2$，则 $a \in Z(G)$. 设 R 为 $Z(G)$ 的 Sylow 2-子群，则 R char $Z(G)$，$Z(G)$ char G，故 R char G，即 R 在 G 的自同构作用下保持不变，$|R|=2,4$. 若 $|R|=2$，则 $R=N$，即存在2阶元 a 在自同构作用下保持不变，矛盾. 若 $|R|=4$，则 G 中存在正规 Sylow 2-子群，由以上讨论得到矛盾.

综上所述，群 G 中不存在非平凡的真正规子群，故群 G 为单群. 由引理4知 $G \cong A_5$.

推论1　设 G 为有限群，f 为它的自同态，若 $\Gamma_{G,f} \cong \Gamma_{A_5,\theta}$，则 $G \cong A_5$.

证　若 $\Gamma_{G,f} \cong \Gamma_{A_5,\theta}$，则 $\Gamma_{G,f}$ 不含子图 $\Delta_k (k \geqslant 2)$. 由引理1可知 f 为 G 的6阶自同构，故 f^2 和 θ^2 分别是 G 和 A_5 的3阶自同构，且 $\Gamma_{G,f^2} \cong \Gamma_{A_5,\theta^2}$. 由定理4可得 $\Gamma_{G,f^2} \cong \Gamma_{A_5,\theta^2} \cong \Gamma_{A_5,\delta}$，故 $G \cong A_5$.

结合文献[4]可知，A_5 不能由它的2阶和4阶自同构诱导的状态空间图唯一刻画，但 A_5 可以由它的3阶、5阶和6阶自同构诱导的状态空间图刻画.

参考文献：

[1] 张建生，施武杰. 用 A_5 的数量刻划构造自同构为 A_5 的图[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1991，16(4)：399-402.

[2] 梁登峰，李士恒，施武杰. 交错单群和散在单群的一种特征标次数图[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2010，35(1)：1-5.

[3] 何立官，陈贵云. 关于一些交错单群的新刻画[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(2)：46-49.

[4] 王孝敏，周　伟. 用状态空间图刻画单群 A_5[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：44-46.

[5] 高彦伟，曹洪平. 交错群 $A_n(5 \leqslant n \leqslant 15)$ 的一个新刻画 A_5[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(2)：68-71.

[6] LAUBENBACHER R，PAREIGIS B. Equivalence Relations on Finite Dynamical Systems [J]. Advances in Applied Mathematics，2001，26：237-251.

[7] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京：科学出版社，2001.

The State-Space Graph of Simple Group A_5

JING Yan-yan，　ZHOU　Wei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we mainly study the state-space graph of A_5，and prove A_5 can not be uniquely characterized by its state-space graph which is induced by an isomorphism of order 2 and 4. But A_5 can be characterized by its state-space graph which is induced by an isomorphism of order 3 and 6.

Key words：alternating group；isomorphism；state-space graph

责任编辑　廖　坤