DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.08.006

一般广义棱的连通度①

李霄民[1]，　柳　扬[2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；2. 重庆通信学院 基础部，重庆 400047

摘要： 对广义棱的概念作了拓展，研究了拓展意义下一般广义棱的连通度，给出了一般广义棱的连通度的上下界，及一般广义棱的连通度等于最小度的充分条件，推广了有关广义棱连通度的结果.

关　键　词： 广义棱；连通度；上下界

中图分类号：O157.5　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2016)08-0031-04

除非特别指定，沿用文献[1]的记号和术语.

定义 1　令 S_n 表示 n 阶置换群，G 是一个 n 阶图，给定 $\alpha \in S_n$ 是一个置换. 取图 G 的两个拷贝 G_x 和 G_y，不妨设：

$$V(G_x)=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \qquad V(G_y)=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$

令

$$E=\{(x_i, y_{\alpha(i)}) \mid i=1,2,\cdots,n\}$$

称图 $\alpha(G)=G_x+G_y+E$ 为广义棱(也称置换图).

广义棱最初是由文献[2]介绍的. 文献[2]给出了广义棱中平面图的特征刻画，后来广义棱的诸多性质被研究，如图的交叉数和着色数、边的着色数及割流量等.

文献[3]研究了广义棱的连通度与最小度的性质，并给出了这些性质在利用广义棱的构图方法构造大型网络方面的应用. 文献[4]也研究了广义棱的相关性质，并给出了这些性质在研究网络的可存活性方面的应用.

定义一个术语：对于图 G，用 $U(G)$ 表示 $|S|+|V(C)|$ 的最小值，其中 S 是 G 的任一点割，C 是 $G-S$ 的任一连通分支.

定理 1[3]　(ⅰ) $\min\{2\kappa(G), U(G)\} \leqslant \kappa(\alpha(G)) \leqslant U(G)$；

(ⅱ) 如果 $\kappa(G)=\delta(G)$，则 $\kappa(\alpha(G))=\delta(\alpha(G))$.

定理 2[4]　(ⅰ) $U(G)=\delta(G)+1$；

(ⅱ) $\min\{2\kappa(G), \delta(G)+1\} \leqslant \kappa(\alpha(G)) \leqslant \delta(G)+1$；

(ⅲ) $\kappa(\alpha(G))=\delta(\alpha(G))$ 当且仅当 $2\kappa(G) \geqslant \delta(G)+1$.

以上结果关于边连通度也有类似的结论，在此不重复.

定义 2　给定两个图 G_1 和 G_2，满足 $|V(G_1)|=|V(G_2)|=n$. 令 S_n 表示 n 阶置换群，给定 $\alpha \in S_n$ 是一个置换. 不妨设：

$$V(G_1)=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \qquad V(G_2)=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$

令

---

① 收稿日期：2015-10-25

基金项目：重庆市自然科学基金项目(CSTC2014JCYJA00033)；重庆市教委科技项目(KJ1400630)；国家自然科学基金项目(11471059).

作者简介：李霄民(1970-)，男，山西稷山人，教授，主要从事图论及其应用的研究.

$$E=\{(x_i,\ y_{\alpha(i)})\mid i=1,2,\cdots,n\}$$

则称 $\alpha(G_1,G_2)=G_1+G_2+E$ 为一般广义棱. 显然，当 $G_1=G_2$ 时，$\alpha(G_1,G_2)=\alpha(G)$.

引理 1 $\delta(\alpha(G_1,G_2))=\min\{\delta(G_1),\delta(G_2)\}+1$.

证 由于 $\alpha(G_1,G_2)$ 中每个顶点的度数比 G_1 和 G_2 中相对应的顶点的度数增加了 1，故结论成立.

定理 3 给定两个图 G_1 和 G_2，满足 $|V(G_1)|=|V(G_2)|=n$，则有：

(ⅰ) $\min\{\kappa(G_1)+\kappa(G_2),\delta(G_1)+1,\delta(G_2)+1\}\leqslant\kappa(\alpha(G_1,G_2))\leqslant\min\{\delta(G_1),\delta(G_2)\}+1$；

(ⅱ) 若 $\kappa(G_1)+\kappa(G_2)\geqslant\min\{\delta(G_1),\delta(G_2)\}+1$，则 $\kappa(\alpha(G_1,G_2))=\delta(\alpha(G_1,G_2))$.

证 (ⅰ) 令 S 是 G_1 的点割，C 是 G_1-S 的分支，满足

$$U(G_1)=|S|+|V(C)|$$

在 $\alpha(G_1,G_2)$ 中，令 S' 表示 G_2 中与 C 中顶点邻接的顶点的集合，这样 $S\cup S'$ 是 $\alpha(G_1,G_2)$ 的点割. 因为

$$|V(C)|=|S'|$$

则

$$U(G_1)=|S\cup S'|$$

所以有

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\leqslant|S\cup S'|=U(G_1)=\delta(G_1)+1$$

类似地可证明

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\leqslant\delta(G_2)+1$$

因此有

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\leqslant\min\{\delta(G_1)+1,\delta(G_2)+1\}$$

这样就完成了上界的证明，下面证明下界.

令 S 为 $\alpha(G_1,G_2)$ 的最小点割，令：

$$S_1=S\cap V(G_1)\qquad S_2=S\cap V(G_2)$$

这样有

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))=|S|=|S_1|+|S_2|$$

情形 1 G_1-S_1 与 G_2-S_2 均连通.

(a) G_1-S_1 与 G_2-S_2 至少有一个是空图.

如果 G_1-S_1 是空图，则有 $S_1=V(G_1)$. 因此

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\geqslant|S_1|=|V(G_1)|$$

注意到，对任意 $v\in V(G_1)$，$N_{G_1}(v)$ 是 G_1 的点割，所以有

$$U(G_1)\leqslant d_{G_1}(v)+1\leqslant|V(G_1)|$$

从而有

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\geqslant U(G_1)=\delta(G_1)+1$$

类似地，如果 G_2-S_2 是空图，可证明

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\geqslant\delta(G_2)+1$$

因此有

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\geqslant\min\{\delta(G_1)+1,\delta(G_2)+1\}$$

(b) G_1-S_1 与 G_2-S_2 均不是空图.

任取 $x_i\in V(G_1-S_1)$，由于 G_1-S_1 与 G_2-S_2 均连通，所以必有 $y_{\alpha(i)}\in S_2$，因此有

$$|S_2|\geqslant|V(G_1-S_1)|$$

从而有

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\geqslant|S_1|+|V(G_1-S_1)|\geqslant U(G_1)=\delta(G_1)+1$$

同理可证

$$\kappa(\alpha(G_1,G_2))\geqslant\delta(G_2)+1$$

此时有

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2)) \geqslant \max\{\delta(G_1)+1, \delta(G_2)+1\} \geqslant \min\{\delta(G_1)+1, \delta(G_2)+1\}$$

情形 2　G_1-S_1 与 G_2-S_2 均不连通.

此时 S_1 与 S_2 分别是 G_1 与 G_2 的点割，所以有：

$$|S_1| \geqslant \kappa(G_1) \qquad |S_2| \geqslant \kappa(G_2)$$

因此有

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2)) \geqslant \kappa(G_1)+\kappa(G_2)$$

情形 3　G_1-S_1 与 G_2-S_2 恰有一个不连通.

(a) 如果 G_1-S_1 不连通而 G_2-S_2 是连通的，则存在 G_1-S_1 的分支 C，C 中的每个顶点都不与 G_2-S_2 中的任何顶点相邻，因此对任意 $x_i \in V(C)$，必有 $y_{\alpha(i)} \in S_2$，因此有 $|S_2| \geqslant |C|$，所以有

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2)) \geqslant |S_1|+|C| \geqslant U(G_1)=\delta(G_1)+1$$

(b) 反过来，如果 G_2-S_2 不连通而 G_1-S_1 是连通的，同理可证

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2)) \geqslant \delta(G_2)+1$$

因此有

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2)) \geqslant \min\{\delta(G_1)+1, \delta(G_2)+1\}$$

综上所述，我们有

$$\min\{\kappa(G_1)+\kappa(G_2), \delta(G_1)+1, \delta(G_2)+1\} \leqslant \kappa(\alpha(G_1, G_2))$$

这就完成了下界的证明.

(ii) 注意到，总有

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2)) \leqslant \delta(\alpha(G_1, G_2))=\min\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}+1$$

因此，如果

$$\kappa(G_1)+\kappa(G_2) \geqslant \min\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}+1$$

则由 (i) 有

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2)) \geqslant \min\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}+1=\delta(\alpha(G_1, G_2))$$

因此有

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2))=\delta(\alpha(G_1, G_2))$$

在定理 3 中令 $G_1=G_2=G$ 便得到定理 2 的结果. 同时，定理 3 中 (ii) 的条件 $\kappa(G_1)+\kappa(G_2) \geqslant \min\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}+1$ 在没有 $G_1=G_2=G$ 时就不是必要的，反例如下：

令 G_1 为粘合两个 K_5 的一个顶点 u 所得的图，G_2 为粘合 K_3 和 K_7 的一个顶点 v 所得的图，如图 1 所示. 显然 $\kappa(G_1)=1$，$\kappa(G_2)=1$，则

$$\kappa(G_1)+\kappa(G_2)=2<\delta(\alpha(G_1, G_2))=\min\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}+1=3$$

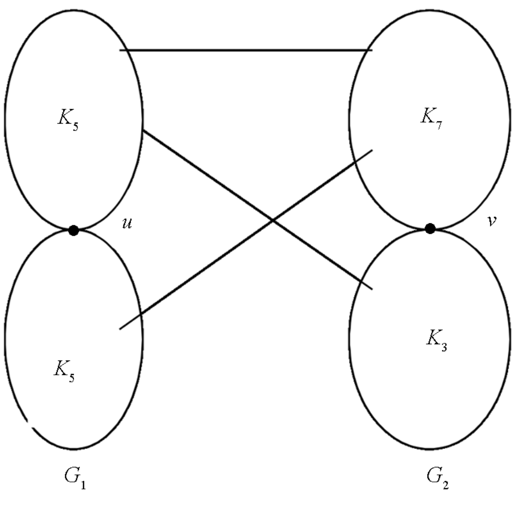

图 1　图 $\alpha(G_1, G_2)$

下面说明 $\kappa(\alpha(G_1, G_2))=\delta(\alpha(G_1, G_2))$ 成立.

任取点集 $S \subset V(\alpha(G_1, G_2))$，使得 $|S|=2$.

若 $|S \cap \{u, v\}| \leqslant 1$，因为 u 和 v 分别是 G_1 和 G_2 唯一的割点，所以 G_1-S 和 G_2-S 至少有一个连通. 且 $\alpha(G_1, G_2)-S$ 最多只去掉了 2 条连接 G_1 和 G_2 的边，而 K_3, K_5 和 K_7 的顶点数均至少为 3，所以 $\alpha(G_1, G_2)-S$ 连通.

若 $S=\{u, v\}$，令 G_1-u 的两个连通分支为 G_1' 和 G_1''，G_2-v 的两个连通分支为 G_2' 和 G_2''. 显然

$$|G_1'|=|G_1''|=4$$

不妨令：

$$|G_2'|=6 \qquad |G_2''|=2$$

显然对于 $\alpha(G_1, G_2)-S$，在映射 α 下，G_1' 和 G_1'' 中至少存在 5 个顶点与 G_2'' 中的顶点相连，同时，在映射 α 下，G_2'' 中至少存在 1 个顶点与 G_1' 或 G_1'' 中的顶点相连. 由于 G_1' 和 G_1'', G_2' 和 G_2'' 均为连通的，则此时 $\alpha(G_1, G_2)-S$ 连通，因此 $S=\{u, v\}$ 不是 $\alpha(G_1, G_2)$ 的点割，从而 $\kappa(\alpha(G_1, G_2)) \geqslant 3$. 又由于 $\delta(\alpha(G_1, G_2))=3$，所以有

$$\kappa(\alpha(G_1, G_2))=\delta(\alpha(G_1, G_2))$$

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [J]. Macmillan, 1976, 78(62): 237－238.

[2] CHARTRAND G, HARARY F. Planar Permutation Graphs [J]. Ann Inst H Poincare(Sec B), 1967, 3(4): 433－438.

[3] PIAZZA B L, RINGEISEN R D. Connectivity of Generalized Prisms Over G [J]. Discrete Appl Math, 1991, 30(2/3): 229－233.

[4] LAI H J. large Survivable Nets and the Generalized Prisms [J]. Discrete Appl Math, 1995, 61(2): 181－185.

[5] 王　涛，孙彩云，李德明. 多轮图和多齿轮图的 k-优美性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(8)：79－82.

[6] 刘秀丽. 若干冠图的邻点可区别 I-全染色 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(10)：10－13.

Connectivity of Generalized Prisms

LI Xiao-min[1], LIU Yang[2]

1. College of Mathematics & Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. Basic Department, Chongqing Communication Institute, Chongqing 400047, China

Abstract: The concept of generalized prisms is extended. Its connectivity is discussed, and the upper bound and low bound of connectivity are obtained, also the sufficient condition is got when connectivity equal to the minimum degree, which extend some prior results.

Key words: generalized prisms; connectivity; upper and low bound

责任编辑　廖　坤