DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.08.009

具有快速振荡项的非自治随机 p-Laplace 方程随机吸引子的上半连续性[①]

雍梦娟， 李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要研究了定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的具有快速振荡项的非自治带可乘白噪音的随机 p-Laplace 方程吸引子的上半连续性. 借助解的尾部估计，证明了定义在无界域上的该系统的拉回渐进紧性.

关 键 词：非自治随机 p-Laplace 方程；随机吸引子的存在性；上半连续性

中图分类号：O177.8 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2016)08-0047-07

考虑定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的带可乘白噪音的快速振荡 p-Laplace 方程[1]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\lambda u-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=f(x,u)+g^{\varepsilon}(x,t)+u\circ\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\\ u(\tau,x)=u_{\tau}(x) \qquad x\in\mathbb{R}^n\end{cases}\tag{1}$$

其中 $t>\tau$，$t\in\mathbb{R}$，这里 $p>2$，$\lambda>0$，$\varepsilon>0$ 为常数. 假设 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续的，且满足：对所有 $s\in\mathbb{R}$，$x\in\mathbb{R}^n$，

$$f(x,s)s\leqslant-\alpha_1(|s|^q+|s|^p)+\psi_1(t,x) \qquad \psi_1\in L^1(\mathbb{R}^n)\tag{2}$$

$$|f(x,s)|\leqslant\alpha_2|s|^{q-1}+\psi_2(t,x) \qquad \psi_2\in L^2(\mathbb{R}^n)\tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\leqslant\alpha_3\tag{4}$$

其中 $q>2$，$\alpha_i>0(i=1,2,3)$，$\circ$ 表示 Stranovich 积分[2].

随机函数 $W(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P,\theta_t)$ 上的双边实值 Wiener 过程，其中 $\Omega=\{\omega\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}):\omega(0)=0\}$，$P$ 是 Wiener 测度. 在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上定义一簇保测遍历变换 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$：

$$\theta_t\omega(\cdot)=\omega(\cdot+t)-\omega(t) \qquad \omega\in\Omega,\ t\in\mathbb{R}$$

则 $(\Omega,\mathscr{F},P,\theta_t)$ 是遍历的度量动力系统. 这样，过程 $W(t,\omega)$ 可视为标准过程 $\omega(t)$，且有 $\mathrm{d}W(t,\omega)=\mathrm{d}\omega(t)$[1].

文献[3]证明了自治系统下的随机 p-Laplace 方程下吸引子的存在性. 文献[1]对非自治系统下的 p-Laplace 方程吸引子的存在性进行了介绍. 本文在文献[1]的基础上，利用文献[1-5]中的相应理论，研究了在非自治系统下带可乘白噪音的方程(1)的随机吸引子的上半连续性.

1 p-Laplace 方程生成的随机动力系统

考虑随机变换 $z(\omega)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\tau}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\ (\omega\in\Omega)$，其中 z 满足：$\mathrm{d}z(\theta_t\omega)+z(\theta_t\omega)\mathrm{d}t=\mathrm{d}\omega$，对每个 $\omega\in\Omega$，

---

① 收稿日期：2015-10-14

基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).

作者简介：雍梦娟(1991-)，女，四川南充人，硕士研究生，主要从事随机动力系统的研究.

$z(\theta_t\omega)$ 关于 t 是连续的，且：

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{|z(\theta_t\omega)|}{t}=0 \qquad \lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t z(\theta_t\omega)\mathrm{d}t=0 \tag{5}$$

令

$$v(t,\tau,\omega,v_\tau)=\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}u(t,\tau,\omega,u_\tau) \qquad v_\tau=\mathrm{e}^{-z(\theta_\tau\omega)}u_\tau \tag{6}$$

则方程(1) 可整理为

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\mathrm{e}^{(p-2)z(\theta_t\omega)}\mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)+\lambda v=z(\theta_t\omega)v+\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}f(x,\mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}v)+\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}g^\varepsilon(x,t) \tag{7}$$

其中初值条件：$v(\tau,x)=v_\tau(x)$.

据经典Galerkin方法知道，初值问题(7) 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中有唯一连续解[2-4]，令 $u(t,\tau,\omega,u_\tau)=\mathrm{e}^{z(\theta_\tau\omega)}v(t,\tau,\omega,v_\tau)$，其中 $u_\tau=\mathrm{e}^{z(\theta_\tau\omega)}v_\tau$，则 u 是方程(1) 的解. 设映射 Φ：$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\Omega\times L^2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$，如果对每个 $t\in\mathbb{R}_+$，$\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$ 且 $u_\tau\in L^2(\mathbb{R}^n)$，有

$$\Phi(t,\tau,\omega,u_\tau)=u(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau)=\mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}v(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,v_\tau)$$

那么 Φ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上对应于$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P},\{\theta\}_{t\in\mathbb{R}})$ 的连续协循环.

设 $D=\{D(\tau,\omega)\subseteq L^2(\mathbb{R}^n)：\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的子集族，满足

$$\lim_{s\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda s-2\int_0^s z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r-2z(\theta_s\omega)}\|D(\tau+s,\theta_s\omega)\|^2=0 \tag{8}$$

设集合 $\mathscr{D}$ 满足下列性质：

$$\mathscr{D}=\{D=\{D(\tau,\omega)\subseteq L^2(\mathbb{R}^n)：\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}：D(\tau,\omega)\text{ 是有界的，且满足(8)式}\}$$

接下来，我们讨论方程(1) 的外力项 $g(x,t)$. 设对每个 $\tau\in\mathbb{R}$，有

$$\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\lambda s}\|g^\varepsilon(x,s+\tau)\|^2\mathrm{d}s<\infty \tag{9}$$

设快速振荡外力项为

$$g^\varepsilon(x,t)=g\left(x,t,\frac{t}{\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon>0$$

不失一般性，下面假设 $\varepsilon\in(0,1]$，设 $g^\varepsilon(x,t)$ 满足下列性质[5]：

(Ⅰ) 当 $\varepsilon\to0^+$ 时，$g^\varepsilon(x,t)$ 有一致平均 $g^0(x,t)\in L^2(\mathbb{R}^n)$，对每个 $T>0$ 和每个函数 $\phi\in L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^n))$，有

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-T}^{T}(g^\varepsilon(x,s+h),\phi(x,s))_{L^2(\mathbb{R}^n)}\mathrm{d}s=\int_{T}^{-T}(g^0(x,s+h),\phi(x,s))_{L^2(\mathbb{R}^n)}\mathrm{d}s$$

对 $h\in\mathbb{R}$ 一致成立.

(Ⅱ) $g^\varepsilon(x,t)$ 是 γ 阶一致缓增的，即存在映射 N：$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$，使得

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma(s-\tau)}\|g^\varepsilon(x,s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant N(\tau)$$

其中 $N(\tau)$ 是指数有界的函数，且满足

$$\lim_{\tau\to\infty}\sup\mathrm{e}^{-\gamma\tau}N(\tau)<c<\infty$$

设存在函数 $G(x,t,\zeta)\in C_b^1(\mathbb{R}^n,L^2(\mathbb{R}^n))\cap C_b(\mathbb{R}^n,W^{1,p})$，使得

$$\frac{\partial G}{\partial\zeta}(x,t,\zeta)=g(x,t,\zeta)-g^0(x,t)$$

其中 $\zeta=\frac{s}{\varepsilon}$. 则有：

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}G(x,t,\zeta)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial s}G\left(x,t,\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

$$\|G(x,t,\zeta)\|^2+\left\|\frac{\partial}{\partial t}G(x,t,\zeta)\right\|^2+\|G(x,t,\zeta)\|_{W^{1,p}}^p\leqslant M(t,\zeta)$$

其中函数 $M(t,\zeta)$ 关于 t 和 ζ 连续.

2　随机吸引子的存在性

研究问题(7)解的一致估计. 接下来遇到的 c 只依赖于 p, q, λ, α_1. $C = C(\tau, \omega)$ 是正的随机变量，在有限区间上 $C(\theta_\tau \omega)$ 保持有限性.

引理 1　假设(2)—(4)式及(9)式成立. 那么对每个 $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ 和 $D = \{D(\tau, \omega): \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \{\Omega\}\} \in \mathscr{D}$，存在 $T = T(\tau, \omega, D) > 0$，使得对所有 $t \geqslant T$，方程(1)的解 u 满足：

$$\| v(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, v_{\tau-t}) \|^2 \leqslant M(\tau, \omega)$$

$$\int_{\tau-t}^{\tau} e^{-2z(\theta_{s-\tau}\omega)} e^{\frac{1}{2}\lambda(s-\tau) - 2\int_\tau^s z(\theta_{r-\tau}\omega)dr} (\| \nabla u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|_p^p + \| u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|_p^p) ds \leqslant M(\tau, \omega)$$

$$\int_{\tau-t}^{\tau} e^{-2z(\theta_{s-\tau}\omega)} e^{\frac{1}{2}\lambda(s-\tau) - 2\int_\tau^s z(\theta_{r-\tau}\omega)dr} (\| u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|^2 + \| u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|_q^q) ds \leqslant M(\tau, \omega)$$

其中 $e^{z(\theta_t\omega)} v_{\tau-t} \in D(\tau - t, \theta_{-t}\omega)$，且 $M(\tau, \omega)$ 满足

$$M(\tau, \omega) = c + c\int_{-\infty}^{0} e^{-2z(\theta_s\omega)} e^{\frac{1}{2}\lambda s - 2\int_0^s z(\theta_r\omega)dr} (1 + \| g^\varepsilon(x, s+\tau) \|^2) ds$$

证　在方程(7)两边同时乘以 v，再在 $\mathbb{R}^n$ 上积分，得

$$\frac{d}{dt}\| v \|^2 + 2e^{(p-2)z(\theta_t\omega)} \| \nabla v \|_p^p + (2\lambda - 2z(\theta_t\omega)) \| v \|^2 = 2e^{-z(\theta_t\omega)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, e^{z(\theta_t\omega)} v) \cdot v dx + 2e^{-z(\theta_t\omega)} \int_{\mathbb{R}^n} g^\varepsilon(x, t) v dx$$

由(2),(6)式，$\psi_1 \in L^1$ 以及 Young 不等式可得

$$\frac{d}{dt}\| v \|^2 + e^{-2z(\theta_t\omega)} \left(\frac{1}{2}\lambda \| u \|^2 + 2\| \nabla u \|_p^p + 2\alpha_1 \| u \|_p^p + 2\alpha_1 \| u \|_q^q \right) + \left(\frac{1}{2}\lambda - 2z(\theta_t\omega) \right) \| v \|^2 \leqslant e^{-2z(\theta_t\omega)} \left(2c + \frac{1}{\lambda} \| g^\varepsilon(x, t) \|^2 \right) \tag{10}$$

由 Gronwall 引理，并用 $\theta_{-\tau}\omega$ 代替 ω，以及 $e^{z(\theta_{-t}\omega)} v_{\tau-t} \in D(\tau, \theta_{-t}\omega)$，有

$$\begin{aligned} &\| v(\tau, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, v_{\tau-t}) \|^2 + \\ &c\int_{\tau-t}^{\tau} e^{-2z(\theta_{s-\tau}\omega)} e^{\frac{1}{2}\lambda(s-\tau) - 2\int_\tau^s z(\theta_{r-\tau}\omega)dr} (\| u \|^2 + \| u \|_q^q + \| u \|_p^p + \| \nabla u \|_p^p) ds \leqslant \\ &e^{-\frac{1}{2}\lambda t - 2\int_0^{-t} z(\theta_r\omega)dr - 2z(\theta_{-t}\omega)} \| D(\tau-t, \theta_{-t}\omega) \|^2 + \\ &c\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{1}{2}\lambda s - 2\int_0^s z(\theta_r\omega)dr - 2z(\theta_s\omega)} (1 + \| g^\varepsilon(x, s+\tau) \|^2) ds \end{aligned} \tag{11}$$

由(5)式和(9)式可知，(11)式最后一项积分存在. 又因为 $D(\tau, \omega) \in \mathscr{D}$，由(8)式知，存在 $T = T(\tau, \omega, D) > 0$，使得当所有 $t \geqslant T$ 时，有

$$e^{-\frac{1}{2}\lambda t - 2\int_0^{-t} z(\theta_r\omega)dr - 2z(\theta_{-t}\omega)} \| D(\tau-t, \theta_{-t}\omega) \|^2 \leqslant 1$$

因此，由(6),(11)式可知，引理 1 成立.

引理 2　假设(2)式及(9)式成立. 设对每个 $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $D \in \mathscr{D}$, $s \in [t-1, t]$，时间 T 是由引理 1 给出的. 那么存在随机变量 $C = C(\tau, \omega)$，使得对几乎所有的 $t \geqslant T$，有：

$$\| v(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, v_{\tau-t}) \|_q^q \leqslant C(\tau, \omega) \tag{12}$$

$$\| \nabla u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, v_{\tau-t}) \|_p^p \leqslant C(\tau, \omega) \tag{13}$$

证　固定 $t \geqslant T$，由引理 1，对所有 $s \in [\tau-1, \tau]$，有

$$\| v(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, v_{\tau-t}) \|^2 = \| v(s, \tau-t, \theta_{-s}\theta_{s-\tau}\omega, v_{\tau-t}) \|^2 \leqslant$$

$$M(\tau,\theta_{s-\tau}\omega)\leqslant\sup_{h\in[-1,0]}M(\tau,\theta_h\omega)=C(\tau,\omega)\tag{14}$$

将(10)式中所有的 t 用 s 代替，再用 $\theta_{-\tau}\omega$ 代替 ω，对 s 在 $[\tau-1,\tau]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}&2\int_{\tau-1}^{\tau}(\mathrm{e}^{(p-2)z(\theta_{s-t}\omega)}\|\nabla v(s)\|_p^p+\alpha_1\mathrm{e}^{(q-2)z(\theta_{s-t}\omega)}\|v(s)\|_q^q)\,\mathrm{d}s\leqslant\\&\|v(\tau-1)\|^2+\int_{\tau-1}^{\tau}(|\lambda-2z(\theta_{s-t}\omega)|\cdot\|v(s)\|^2)\,\mathrm{d}s+\\&c\int_{\tau-1}^{\tau}\mathrm{e}^{-2z(\theta_{s-t}\omega)}(1+\|g^{\varepsilon}(x,s)\|^2)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{15}$$

因为 $\tau\longmapsto z(\theta_\tau\omega)$ 是连续的，由(14)和(15)式有

$$\int_{\tau-1}^{\tau}(\|\nabla v(s)\|_p^p+\|v(s)\|_q^q)\mathrm{d}s\leqslant C(\tau,\omega)\tag{16}$$

对问题(7)两边同时乘以 $|v|^{q-2}v$，因为

$$(-\mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v),|v|^{q-2}v)\geqslant 0$$

由(2)式和 Young 不等式，对所有 $s\in[\tau-1,\tau]$，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|v\|_q^q\leqslant{}&q(z(\theta_{s-t}\omega)-\lambda)\|v\|_q^q+q\mathrm{e}^{-z(\theta_{s-t}\omega)}(f(x,u),|v|^{q-2}v)+\\&q\mathrm{e}^{-z(\theta_{s-\tau}\omega)}(g(x,s),|v|^{q-2}v)\leqslant\\&-c\|v\|_{2q-2}^{2q-2}+C(\|v\|_q^q+\|\psi_1\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}}+\|g^{\varepsilon}(x,s)\|^2)\leqslant\\&C(\|v\|_q^q+1+\|g^{\varepsilon}(x,s)\|^2)\end{aligned}\tag{17}$$

对(17)式在 $[s,t]$ 上积分，其中 $s\in[\tau-1,\tau]$，得

$$\|v(\tau)\|_q^q\leqslant\|v(s)\|_q^q+C\int_s^{\tau}\|v(r)\|_q^q\mathrm{d}r+C+C\int_s^{\tau}\|g^{\varepsilon}(x,r)\|^2\mathrm{d}r$$

再对 s 在 $[\tau-1,\tau]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}&\|v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\|_q^q\leqslant\\&C\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(s)\|_q^q\mathrm{d}s+C\int_{\tau-1}^{\tau}(1+\|g^{\varepsilon}(x,s)\|^2)\mathrm{d}s\leqslant C(\tau,\omega)\end{aligned}\tag{18}$$

则对所有 $s\in[\tau-1,\tau]$，有

$$\|v(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\|_q^q=\|v(s,\tau-t,\theta_{-s}\theta_{s-\tau}\omega,v_{\tau-t})\|_q^q\leqslant\max_{h\in[-1,0]}C(\tau,\theta_h\omega)=C(\tau,\omega)$$

所以(12)式成立. 此外，对(17)式在 $[\tau-1,\tau]$ 上积分，有

$$\begin{aligned}&\|v(\tau)\|_q^q-\|v(\tau-1)\|_q^q\leqslant\\&-c\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(s)\|_{2q-2}^{2q-2}\mathrm{d}s+C\int_{\tau-1}^{\tau}(\|v(s)\|_q^q+1+\|g^{\varepsilon}(x,s)\|^2)\mathrm{d}s\leqslant\\&-c\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(s)\|_{2q-2}^{2q-2}\mathrm{d}s+C(\tau,\omega)\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(s)\|_{2q-2}^{2q-2}\mathrm{d}s\leqslant C(\tau,\omega)$$

将问题(7)两边与 v_s 作内积，得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{(p-2)z(\theta_{s-\tau}\omega)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\nabla v\|_p^p+p\|v_s\|^2=\\&p(z(\theta_{s-\tau}\omega)-\lambda)(v,v_s)+p\mathrm{e}^{-z(\theta_{s-\tau}\omega)}(f(x,u),v_s)+p\mathrm{e}^{-z(\theta_{s-\tau}\omega)}(g^{\varepsilon}(x,s),v_s)\end{aligned}\tag{19}$$

设 $s\in[\tau-1,\tau]$，因为 $\tau\longmapsto z(\theta_\tau\omega)$ 是连续的，则

$$\frac{p}{4}\|v_s\|^2+C\|f(x,u)\|^2\leqslant\frac{p}{4}\|v_s\|^2+C(\|v\|_{2q-2}^{2q-2}+\|\psi_2\|^2)$$

再由 Young 不等式，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\nabla v(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\|_p^p \leqslant C(\|v(s)\|_{2q-2}^{2q-2}+\|v(s)\|^2+\|g^{\varepsilon}(s,x)\|^2+1) \tag{20}$$

按照前面的方法，对(20)式进行两次积分，由(14)，(16)和(18)式，有

$$\|\nabla v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\|_p^p \leqslant C(\tau,\omega) \tag{21}$$

因为 $C(\tau,\theta_\tau\omega)$ 在 $\tau\in[-1,0]$ 上有最大值，则(21)对 $s\in[\tau-1,\tau]$，$t\geqslant T$ 有

$$\|\nabla v(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\|_p^p \leqslant C(\tau,\omega)$$

那么结合(6)式可知(13)式成立.

类比文献[1]中引理 3.3 的证明方法，可证如下引理成立：

引理 3　设(2)－(4)式以及(9)式成立. 设对每个 $\eta>0$，$\tau\in\mathbb{R}$，有 $\omega\in\Omega$ 和 $D\in\mathcal{D}$. 则存在 $T=T(\tau,\omega,D,\eta)>0$，和 $K=K(\tau,\omega,\eta)\geqslant 1$，使得对所有 $t\geqslant T$，有

$$\int_{|x|\geqslant K}|u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})|^2\mathrm{d}x\leqslant\eta$$

其中 $\mathrm{e}^{z(\theta_{-t}\omega)}v_{\tau-t}\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$.

类似于自治系统中证明拉回渐进紧的方法，参考文献[3]中引理 4.7 的证明方法，结合引理 1、引理 2 和引理 3 可知如下引理 4 成立：

引理 4　设(2)－(4)式以及(9)式成立，那么由方程(1)生成的动力系统在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是 $\mathcal{D}$-拉回渐进紧的. 即当 $t_n\to\infty$，$\{D(\tau,\omega)\}\in\mathcal{D}$ 和 $u_{0,n}(\theta_{-t_n}\omega)\in D(\tau-t_n,\theta_{t_n}\omega)$ 时，对几乎所有的 $\omega\in\Omega$，序列 $\{\Phi(t_n,\tau-t_n,\theta_{-t_n}\omega,u_{0,n}(\theta_{-t_n}\omega))\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有收敛子列.

由引理 1 和引理 4 得：

定理 1　设(2)－(4)式以及(9)式成立，那么对每个 $\varepsilon\in(0,1]$，方程(1)在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上生成唯一的随机吸引子 $\mathcal{A}_\varepsilon=\{\mathcal{A}_\varepsilon(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathcal{D}$.

3　p-Laplace 方程随机吸引子的上半连续性

现在考虑当外力项快速振荡(即 $\varepsilon\to 0^+$)时，吸引子的渐进行为.

记 u^ε 是方程(1)的解，u^0 是平均方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\lambda u-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=f(x,u)+g^0(x,t)+u\circ\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\\ u^0(\tau,x)=u_\tau^0(x)\qquad x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

的解. 且将由方程(1)生成的动力系统记为 Φ_ε.

由文献[3－4]可以得出关于上半连续性的如下结论：

命题 1　若 $\varepsilon\in(0,1]$，假定下列 3 个条件成立：

(i) 当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，Φ_ε 点态收敛到 Φ_0；

(ii) 对任意 $\varepsilon\in(0,1]$，随机动力系统 Φ_ε 有吸收集 $E_\varepsilon=\{E_\varepsilon(\tau,\omega)\}_{\omega\in\Omega}$，并且存在随机函数 $Q(\tau,\omega)$，使得

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\|E_\varepsilon(\tau,\omega)\|\leqslant Q(\tau,\omega)\qquad\forall\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega$$

(iii) $\bigcup_{0<\varepsilon\leqslant 1}\mathcal{A}_\varepsilon(\tau,\omega)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中是预紧的.

则方程(1)的随机吸引子 $\mathcal{A}_\varepsilon(\tau,\omega)$ 是上半连续的，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon(\tau,\omega),\mathcal{A}_0(\tau,\omega))=0$$

接下来证明结论：

定理 2　设(2)－(4)式以及(9)式成立，那么方程(1)的随机吸引子是上半连续的.

由引理 1 和引理 4 可知命题 1 的条件(ii)，(iii)成立，下面证明条件(i).

引理 5　对每个 $T\in\mathbb{R}_+$，$\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|v^\varepsilon(\tau+T,\tau,\omega,v_\tau^\varepsilon)-v^0(\tau+T,\tau,\omega,v_\tau^0)\|=0$$

当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，有 $\| v_\tau^\varepsilon - v_\tau \| \to 0$.

证　设

$$S(t, \tau, \omega, S_\tau) = v^\varepsilon(t, \tau, \omega, v_\tau^\varepsilon) - v^0(t, \tau, \omega, v_\tau^0)$$

其中 $\varepsilon \in [0, 1]$. 由(6)式有

$$S(t, \tau, \omega, S_\tau) = \mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}(u^\varepsilon(t, \tau, \omega, u_\tau^\varepsilon) - u^0(t, \tau, \omega, u_\tau^0))$$

则 S 满足

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \mathrm{e}^{(p-2)z(\theta_t\omega)}\operatorname{div}(|\nabla S|^{p-2}\nabla S) + \lambda S = \\ z(\theta_t\omega)S + \mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}(f(x, \mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}v^\varepsilon) - f(x, \mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}v^0)) + \mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}(g^\varepsilon(x, t) - g^0(x, t))\end{gathered} \tag{22}$$

(22)式两边对 S 作内积，得

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S\|^2 + 2\mathrm{e}^{(p-2)z(\theta_t\omega)}\|\nabla S\|^p + 2\lambda\|S\|^2 = \\ 2z(\theta_t\omega)\|S\|^2 + 2\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}(f(x, \mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}v^\varepsilon) - f(x, \mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}v^0))S\mathrm{d}x + \\ 2\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}(g^\varepsilon(x, t) - g^0(x, t))S\mathrm{d}x\end{gathered}$$

再由(4)式有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S\|^2 &\leqslant (2z(\theta_t\omega) + \alpha_3 - 2\lambda)\|S\|^2 + 2\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}(g^\varepsilon(x, t) - g^0(x, t))S\mathrm{d}x \leqslant \\ &(2z(\theta_t\omega) + \alpha_3 - 2\lambda)\|S\|^2 + 2\varepsilon\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}\left.\frac{\partial G\left(x, \eta, \frac{t}{\varepsilon}\right)}{\partial t}\right|_{\eta=t}\cdot S\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 Gronwall 引理可得

$$\|S(\tau+T, \tau, \omega, S_\tau)\|^2 \leqslant \mathrm{e}^{\int_\tau^{\tau+T}(2z(\theta_r\omega)+\alpha_3-2\lambda)\mathrm{d}r}\|S_\tau\|^2 + M_{\tau,T}^\varepsilon$$

其中

$$M_{\tau,T}^\varepsilon(\omega) = 2\varepsilon\int_\tau^{\tau+T}\mathrm{e}^{-z(\theta_s\omega)+\int_s^t(2z(\theta_r\omega)+\beta-2\lambda)\mathrm{d}r}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left.\frac{\partial G\left(x, \eta, \frac{s}{\varepsilon}\right)}{\partial s}\right|_{\eta=t}\cdot S\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s$$

注意到

$$\begin{aligned}M_{\tau,T}^\varepsilon(\omega) &= 2\varepsilon\int_\tau^{\tau+T}\mathrm{e}^{-z(\theta_s\omega)+c(\tau+T-s)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial G\left(x, \eta, \frac{s}{\varepsilon}\right)}{\partial s}\cdot S\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s \leqslant \\ &2c\varepsilon\int_\tau^{\tau+T}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{e}^{c(\tau+T-s)}\int_{\mathbb{R}^n}G\left(x, s, \frac{s}{\varepsilon}\right)S\mathrm{d}x\right) + \right. \\ &c\mathrm{e}^{c(\tau+T-s)}\int_{\mathbb{R}^n}G\left(x, s, \frac{s}{\varepsilon}\right)S\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{c(\tau+T-s)}\int_{\mathbb{R}^n}\left.\frac{\partial G\left(x, \eta, \frac{s}{\varepsilon}\right)}{\partial \eta}\right|_{\eta=s}\cdot S\mathrm{d}x - \\ &\left.\mathrm{e}^{c(\tau+T-s)}\int_{\mathbb{R}^n}G\left(x, s, \frac{s}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{\partial S}{\partial s}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s = M_1 + M_2 + M_3 + M_4\end{aligned} \tag{23}$$

其中：

$$M_1 \leqslant \varepsilon C_{\tau,T}\left[\left\|G\left(x, \tau+T, \frac{\tau+T}{\varepsilon}\right)\right\| \cdot \|S(\tau+T)\| + \left\|G\left(x, \tau, \frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right\| \|S_\tau\|\right]$$

$$M_2 \leqslant \varepsilon C_{\tau,T}\int_\tau^{\tau+T}\left[\left\|G\left(x, s, \frac{s}{\varepsilon}\right)\right\|^2 + \|S(s, \tau, \omega, S_\tau)\|^2\right]\mathrm{d}s$$

$$M_3 \leqslant \varepsilon C_{\tau,T}\int_\tau^{\tau+T}\left(\left\|\frac{\partial G\left(x, \eta, \frac{s}{\varepsilon}\right)}{\partial \eta}\right\|_{\eta=s}^2 + \|S(s, \tau, \omega, S_\tau)\|^2\right)\mathrm{d}s$$

$$M_4 \leqslant \varepsilon C_{\tau,T} \int_{\tau}^{\tau+T} \left[\left\| G\left(x, s, \frac{s}{\varepsilon}\right) \right\|_{W^{1,p}}^{p} + \| S_s(s, \tau, \omega, S_\tau) \|_{(W^{1,p})^*}^{p_1} \right] \mathrm{d}s \tag{24}$$

因为当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，$\| S_\tau \| \to 0$. 而且，由(22)式和假设可知 $S(s, \tau, \omega, S_\tau) \in L_{\mathrm{loc}}^{p}(\tau, \infty; W^{1,p})$，则由文献[1]知，存在常数 $c_{\tau,T,\omega} > 0$ 使得

$$\sup_{\varepsilon \in (0, 1]} \| S_s(s, \tau, \omega, S_\tau) \|_{L_{\mathrm{loc}}^{p_1}(\tau, \infty; (W^{1,p})^*)}^{p_1} < c_{\tau,T,\omega}$$

因此，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，结合(23)，(24)式以及 $\| S_\tau \| \to 0$，有

$$M_{\tau,T}^{\varepsilon} \leqslant \varepsilon c_{\tau,T,\omega} \to 0$$

由此可知引理 5 成立.

综上所述，命题 1 的条件 (i)，(ii)，(iii) 均成立，故定理 2 得证.

参考文献：

[1] KRAUSE A，LEWIS M，WANG B X. Dynamics of the Non-Autonomous Stochastic p-Laplace Equation Driven by Multiplicative Noise [J]. Appl Math Comput，2014，246(C)：365－376.

[2] WANG Z J，ZHOU S F. Random Attractor for Stochastic Reaction-Diffusion Equation with Multiplicative Noise on Unbounded Domains [J]. J Math Anal Appl，2011，384(1)：160－172.

[3] LI J，LI Y R，CUI H Y. Existence and Upper Semicontinuity of Random Attractors for Stochastic p-Laplacian Equations on Unbounded Domains [J]. Electron J Diff Equ，2014，87：324－335.

[4] LI Y R，GU A H，LI J. Existence and Continuity of Bi-Spatial Random Attractors and Application to Stochastic Semilinear Laplacian Equations [J]. J Differential Equation，2014，258(2)：504－534.

[5] CHEPYZHOV V V，VISHIK M I，WENDLAND W L. On Non-Autonomous Sine-Gordon Type Equations with a Simple Global Attractor and Some Averaging [J]. Discrete Continunous Dyn Syst，2004，12(1)：27－38.

Upper Semicontinuity of Random Attractors for Stochastic p-Laplace Equations with Rapidly Oscillating External Force on Unbounded Domains

YONG Meng-juan，　LI Yang-rong

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：We consider the upper semicontinuity of random attractors for a stochastic p-Laplace equation with rapidly oscillating external force on $\mathbb{R}^n$. The asymptotic compactness of attractors on unbounded domains is proved by means of the tail of the solution.

Key words：a stochastic p-Laplace equation；existence of random attractors；upper semicontinuity

责任编辑　廖　坤