DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.08.012

局部对称空间中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形[①]

朱　华，　王世莉，　姚纯青

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了局部对称空间中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，得到这类子流形成为全脐子流形及其余维数减少的几个 Pinching 定理.

关　键　词：局部对称空间；平行平均曲率向量；伪脐子流形

中图分类号：O186.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2016)08－0067－07

用 N^{n+p} 表示截面曲率 $\boldsymbol{K}_N$ 满足 $\frac{1}{2} < \delta \leqslant \boldsymbol{K}_N \leqslant 1$ 的 $n+p(p \geqslant 2)$ 维的局部对称的黎曼流形，M^n 是 N^{n+p} 的 n 维子流形. 文献[1]给出了 $n+p$ 维标准球面 $S^{n+p}(1)$ 中极小子流形的刚性定理. 文献[2－3]在子流形余维数减少和一些 Pinching 问题上作出了重大贡献. 文献[4－5]都讨论了局部对称空间中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形的 Pinching 问题. 文献[4]的计算中遗漏掉一项(即本文中第(14)式)，文献[5－6]都指出了这个问题，但都在这项的放缩过程中出现了困难(只有当矩阵 $\boldsymbol{H}_\alpha = (\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha)(\alpha \neq n+p)$ 能同时对角化时才成立)，故其定理的结论不太正确. 同时，文献[7]对文献[4]中的结果的某一项(即本文的第(16)式)进行了改进，但计算中出现了问题.

本文主要研究局部对称空间中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形. 分别得到以下关于截面曲率、第二基本形式模长平方和 Ricci 曲率的 Pinching 定理：

定理 1　设 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($p \geqslant 2$)，则 M^n 的截面曲率 $\boldsymbol{R}_{ijij}$ 满足

$$\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{R}_{ijij} \geqslant \frac{1}{2p-3}\Big[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}} + (p-1)\tau^{\frac{1}{2}} + (p-2)H^2\tau^{\frac{1}{2}} - \delta\tau^{\frac{1}{2}}\Big]$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

定理 2　设 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($p \geqslant 2$)，则 M^n 的截面曲率 $\boldsymbol{R}_{ijij}$ 满足

$$2(n+1)\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{R}_{ijij} \geqslant \frac{2}{3}n(n+2)H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(n+2)(1-\delta)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}} +$$

---

① 收稿日期：2015－12－11
基金项目：国家自然科学基金项目(11471188).
作者简介：朱　华(1992－)，男，四川平昌人，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.
通信作者：姚纯青，副教授.

$$(n+2)\tau^{\frac{1}{2}}+nH^2\tau^{\frac{1}{2}}-2\delta\tau^{\frac{1}{2}}$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

注1 定理1和定理2分别是文献[6]中定理3.8.9和定理3.8.10的推广.

定理3 设 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$),则 M^n 的第二基本形式模长的平方 S 满足

$$\frac{n}{3p-5}\Big[-\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(p-1)(2\delta-1)\tau^{\frac{1}{2}}+(4p-6)H^2\tau^{\frac{1}{2}}\Big]\geqslant\tau^{\frac{1}{2}}S$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

定理4 设 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$),则 M^n 的第二基本形式模长的平方 S 满足下列条件之一:

(i) $\frac{n}{n+1}\Big[-\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(2\delta-1)\tau^{\frac{1}{2}}+(n+2)H^2\tau^{\frac{1}{2}}\Big]\geqslant\tau^{\frac{1}{2}}S$;

(ii) $\frac{n}{2p-3}\Big[-\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(2\delta-1)(p-1)\tau^{\frac{1}{2}}+(3p-4)H^2\tau^{\frac{1}{2}}\Big]\geqslant\tau^{\frac{1}{2}}S$.

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

注2 定理3和定理4分别是文献[6]中定理3.8.7和定理3.8.8的推广.

定理5 设 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$),则 M^n 的Ricci曲率在每点沿各方向的下确界 Q 满足

$$(n+4)\tau^{\frac{1}{2}}Q\geqslant\Big[\frac{2}{3}n^2H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(n^2+2n-4)(1+H^2)\tau^{\frac{1}{2}}-(2\delta-2)n\tau^{\frac{1}{2}}\Big]$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

定理6 设 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$),则 M^n 的Ricci曲率在每点沿各方向的下确界 Q 满足下列条件之一:

(i) $(n+1)\tau^{\frac{1}{2}}Q\geqslant\frac{2}{3}n^2H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(n^2-2)(1+H^2)\tau^{\frac{1}{2}}-(2\delta-2)n\tau^{\frac{1}{2}}$;

(ii) $(3p-5)n\tau^{\frac{1}{2}}Q\geqslant(p-1)\Big[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}-(2\delta-2)n\tau^{\frac{1}{2}}\Big]+\Big[(n-1)-\frac{p-1}{3p-5}\Big](1+H^2)\tau^{\frac{1}{2}}$.

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

注3 定理5和定理6分别是文献[6]中定理3.8.11和定理3.8.12的推广.

1 预备知识

设 M^n 是 $n+p$ 维黎曼流形 N^{n+p} 中的 n 维子流形. 本文对各类指标取值范围作如下约定:

$$A,B,C,\cdots=1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+p$$

$$i,j,k,\cdots=1,\cdots,n$$
$$\alpha,\beta,\gamma,\cdots=n+1,\cdots,n+p$$

当指标上下出现两次时代表对其求和.

在 N^{n+p} 内选取局部幺正标架场 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{e}_{n+p}$，使得限制在 M^n 上时，向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 与 M^n 相切. 设幺正标架场 $\{\boldsymbol{e}_A\}$ 的对偶标架场为 $\{\boldsymbol{\omega}^A\}$，则 N^{n+p} 的结构方程为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^A=-\boldsymbol{\omega}_B^A\wedge\boldsymbol{\omega}^B\qquad \boldsymbol{\omega}_B^A+\boldsymbol{\omega}_A^B=\boldsymbol{0}$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_B^A=-\boldsymbol{\omega}_C^A\wedge\boldsymbol{\omega}_B^C+\Phi_B^A\qquad \Phi_B^A=\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_{BCD}^A\boldsymbol{\omega}^C\wedge\boldsymbol{\omega}^D$$

将 $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 限制在 M^n 上时，有 $\boldsymbol{\omega}^\alpha=\boldsymbol{0}$，由 Cartan 引理得到

$$\boldsymbol{\omega}_i^\alpha=\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha\boldsymbol{\omega}^j\qquad \boldsymbol{h}_{ij}^\alpha=\boldsymbol{h}_{ji}^\alpha$$

M^n 的结构方程为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^i=-\boldsymbol{\omega}_j^i\wedge\boldsymbol{\omega}^j\qquad \boldsymbol{\omega}_j^i+\boldsymbol{\omega}_i^j=\boldsymbol{0}$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_j^i=-\boldsymbol{\omega}_k^i\wedge\boldsymbol{\omega}_j^k+\Phi_j^i\qquad \Phi_j^i=\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{jkl}^i\boldsymbol{\omega}^k\wedge\boldsymbol{\omega}^l$$

M^n 的 Gauss 方程和 Ricci 方程分别为：

$$\boldsymbol{R}_{jkl}^i=\boldsymbol{K}_{jkl}^i+\sum_\alpha(\boldsymbol{h}_{ik}^\alpha\boldsymbol{h}_{jl}^\alpha-\boldsymbol{h}_{il}^\alpha\boldsymbol{h}_{jk}^\alpha)\tag{1}$$
$$\boldsymbol{R}_{\beta kl}^\alpha=\boldsymbol{K}_{\beta kl}^\alpha+\sum_i(\boldsymbol{h}_{ik}^\alpha\boldsymbol{h}_{il}^\beta-\boldsymbol{h}_{il}^\alpha\boldsymbol{h}_{ik}^\beta)\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别是 M^n 和 N^{n+p} 的曲率张量.

M^n 的第二基本形式局部表示成 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha\boldsymbol{\omega}^i\otimes\boldsymbol{\omega}^j\otimes\boldsymbol{e}_\alpha$. 分别用 $\boldsymbol{\xi}$, H, S 表示 M^n 的平均曲率向量、平均曲率和第二基本形式模长的平方，即：

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}=\frac{1}{n}\sum_i\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i)$$
$$H=\|\boldsymbol{\xi}\|=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_\alpha(\sum_i\boldsymbol{h}_{ii}^\alpha)^2}$$
$$S=\|\boldsymbol{B}\|^2=\sum_{\alpha,i,j}(\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha)^2$$

M^n 的 Codazzi 方程和 Ricci 恒等式分别为：

$$\boldsymbol{h}_{ijk}^\alpha-\boldsymbol{h}_{ikj}^\alpha=-\boldsymbol{K}_{ijk}^\alpha\tag{3}$$
$$\boldsymbol{h}_{ijkl}^\alpha-\boldsymbol{h}_{ijlk}^\alpha=\sum_m\boldsymbol{h}_{im}^\alpha\boldsymbol{R}_{jkl}^m+\sum_m\boldsymbol{h}_{mj}^\alpha\boldsymbol{R}_{ikl}^m-\sum_m\boldsymbol{h}_{ij}^\beta\boldsymbol{R}_{\beta kl}^\alpha\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{h}_{ijk}^\alpha$ 和 $\boldsymbol{h}_{ijkl}^\alpha$ 分别为 $\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha$ 与 $\boldsymbol{h}_{ijk}^\alpha$ 的共变导数.

如果 $\boldsymbol{\xi}$ 在 M^n 的法丛中平行，则称 M^n 具有平行平均曲率向量. 用 $\boldsymbol{H}_\alpha$ 表示矩阵 $(\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha)$，在 N^{n+p} 中选取标准正交标架场 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n+p}$，使得

$$\boldsymbol{\xi}=H\boldsymbol{e}_{n+p}$$

则：

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{n+p}=\sum_i\boldsymbol{h}_{ii}^{n+p}=nH$$
$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha=\sum_i\boldsymbol{h}_{ii}^\alpha=\boldsymbol{0}\qquad \alpha\neq n+p\tag{5}$$

设 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致子流形[2]，则 H 为常数，且：

$$\boldsymbol{\omega}_\alpha^{n+p}=\boldsymbol{0}\qquad \boldsymbol{R}_{\alpha(n+p)kl}=\boldsymbol{0}\qquad \forall\alpha=n+1,\cdots,n+p\tag{6}$$

利用结构方程和(3),(4),(5) 式，得到

$$\Delta\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha=-\sum_k(\boldsymbol{K}_{kikj}^\alpha+\boldsymbol{K}_{ijkk}^\alpha)+\sum_{k,m}(\boldsymbol{h}_{km}^\alpha\boldsymbol{R}_{ijk}^m+\boldsymbol{h}_{mi}^\alpha\boldsymbol{R}_{kjk}^m)-\sum_k\sum_\beta\boldsymbol{h}_{ki}^\beta\boldsymbol{R}_{\beta jk}^\alpha\qquad \alpha\neq n+p\tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{h}_{ij}^\alpha$ 的 Laplacian 为

$$\Delta \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} = \sum_{k} \boldsymbol{h}_{ijkk}^{\alpha}$$

若 N^{n+p} 为局部对称空间，即 $\boldsymbol{K}_{BCD;E}^{A} = \boldsymbol{0}$，应用文献[1] 中公式(2.17) 以及第一 Bianchi 恒等式和(2)，(5) 式，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \Delta \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} = \\
&-nH \sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{K}_{ijn+p}^{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta(\neq n+p)} \sum_{i,j,k} (4\boldsymbol{K}_{\beta ij}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{jk}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ik}^{\beta} - \boldsymbol{K}_{k\beta k}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ij}^{\beta}) + \\
&\sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j,k,m} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} (\boldsymbol{h}_{mk}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{mijk} + \boldsymbol{h}_{mi}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{mkjk}) - \sum_{\alpha,\beta(\neq n+p)} [\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \boldsymbol{H}_{\beta}^{2}) - \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})^{2}] + \\
&\sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j,k,m} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} (\boldsymbol{h}_{mk}^{\alpha} \boldsymbol{K}_{mijk} + \boldsymbol{h}_{mi}^{\alpha} \boldsymbol{K}_{mkjk}) + \sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j,k} (4\boldsymbol{K}_{n+pij}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{jk}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ik}^{n+p} - \boldsymbol{K}_{kn+pk}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ij}^{n+p})
\end{aligned} \tag{8}$$

若 M^{n} 是伪脐的，则：

$$\boldsymbol{h}_{ij}^{n+p} = H\delta_{ij} \qquad \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{n+p}^{2} = nH^{2} \tag{9}$$

此时，由(5) 和(9) 式，得到(8) 式最后一项为 **0**. 记

$$\tau = S - \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{n+p}^{2} = \sum_{\alpha(\neq n+p)} \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} = \sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{ij} (\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha})^{2} \geqslant 0 \tag{10}$$

由(9) 和(10) 式，得到

$$\tau = S - nH^{2} \tag{11}$$

当 $\alpha, \beta \neq n+p$ 时，矩阵$(\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta}))$是$(p-1)$阶实对称矩阵，故可选取适当的法标架场 $\boldsymbol{e}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p-1}$ 使其对角化，即

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \cdot \delta_{\alpha\beta} \tag{12}$$

利用(8),(9),(10),(12) 式，对于任何实数 a，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \Delta \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} = \\
&-nH \sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{K}_{ijn+p}^{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta(\neq n+p)} \sum_{i,j,k} (4\boldsymbol{K}_{\beta,ij}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{jk}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ik}^{\beta} - \boldsymbol{K}_{k\beta k}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{h}_{ij}^{\beta}) + \\
&(1+a) \sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j,k,m} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} (\boldsymbol{h}_{mk}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{mijk} + \boldsymbol{h}_{mi}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{mkjk}) - \\
&(1-a) \sum_{\alpha,\beta(\neq n+p)} [\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2} \boldsymbol{H}_{\beta}^{2}) - \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha} \boldsymbol{H}_{\beta})^{2}] + \\
&(1-a) \sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{i,j,k,m} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} (\boldsymbol{h}_{mk}^{\alpha} \boldsymbol{K}_{mijk} + \boldsymbol{h}_{mi}^{\alpha} \boldsymbol{K}_{mkjk}) + \\
&a \sum_{\alpha(\neq n+p)} (\operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{\alpha}^{2})^{2} - anH^{2}\tau
\end{aligned} \tag{13}$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 设 M^{n} 是 $n+p$ 维 Riemann 流形 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，对于固定的 $\alpha \neq n+p$，令 $\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} = \lambda_{i}^{\alpha} \delta_{ij}$，由文献[6] 中的引理 3.12.1 得到：

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{ij} \boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{K}_{ijn+p}^{\alpha} \leqslant &\frac{2}{3}(1-\delta) \sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{ij} |\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}| \leqslant \\
&\frac{2}{3}(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}} \Big[\sum_{\alpha(\neq n+p)} (\sum_{ij} |\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}|)^{2}\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\frac{2}{3}(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}} \Big[\sum_{\alpha(\neq n+p)} \sum_{ij} 1^{2} \sum_{ij} (\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha})^{2}\Big]^{\frac{1}{2}} = \\
&\frac{2}{3}n(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$-nH\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{ij}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\boldsymbol{K}_{ijn+p}^{\alpha}\geqslant-\frac{2}{3}n^{2}H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}\tag{14}$$

由文献[6]中的引理 3.12.1 和 Schwarz 不等式，得：

$$\begin{aligned}\sum_{\beta(\neq n+p)}\sum_{ijk}4\boldsymbol{K}_{\beta ij}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{jk}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{ik}^{\beta}=2\sum_{\beta(\neq n+p)}\sum_{ij}4\boldsymbol{K}_{\beta ij}^{\alpha}(\lambda_{j}^{\alpha}-\lambda_{i}^{\alpha})\boldsymbol{h}_{ij}^{\beta}\geqslant\\ -\frac{4}{3}(1-\delta)\sum_{\beta(\neq n+p,\alpha)}\sum_{i\neq j}|\lambda_{j}^{\alpha}-\lambda_{i}^{\alpha}||\boldsymbol{h}_{ij}^{\beta}|\geqslant\\ -\frac{2}{3}(1-\delta)\sum_{\beta(\neq n+p,\alpha)}\sum_{i\neq j}\left[\frac{1}{2}(n-1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda_{j}^{\alpha}-\lambda_{i}^{\alpha})^{2}+2(n-1)^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{h}_{ij}^{\beta})^{2}\right]\geqslant\\ -\frac{2}{3}(1-\delta)\sum_{\beta(\neq n+p,\alpha)}\sum_{i\neq j}\{(n-1)^{-\frac{1}{2}}[(\lambda_{j}^{\alpha})^{2}+(\lambda_{i}^{\alpha})^{2}]+2(n-1)^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{h}_{ij}^{\beta})^{2}]\}=\\ -\frac{4}{3}(n-1)^{\frac{1}{2}}(1-\delta)\sum_{\beta(\neq n+p,\alpha)}\left[\sum_{i}(\lambda_{i}^{\alpha})^{2}+\sum_{i\neq j}(\boldsymbol{h}_{ij}^{\beta})^{2}\right]\geqslant\\ -\frac{4}{3}(n-1)^{\frac{1}{2}}(1-\delta)\sum_{\beta(\neq n+p,\alpha)}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\beta}^{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta(\neq n+p)}\sum_{ijk}4\boldsymbol{K}_{\beta ij}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{jk}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{ik}^{\beta}\geqslant-\frac{4}{3}(n-1)^{\frac{1}{2}}(1-\delta)\sum_{\alpha(\neq n+p)}[(p-2)\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2}+\sum_{\beta(\neq n+p,\alpha)}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\beta}^{2}]=\\ -\frac{8}{3}(n-1)^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau\geqslant\\ -\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau\end{aligned}\tag{15}$$

由文献[6]中的引理 3.12.1 和(12)式，得：

$$\begin{aligned}\sum_{\beta(\neq n+p)}\sum_{ijk}\boldsymbol{K}_{k\beta k}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{ij}^{\beta}=\sum_{\beta(\neq n+p,\alpha)}\sum_{ijk}\boldsymbol{K}_{k\beta k}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{ij}^{\beta}+\sum_{ijk}\boldsymbol{K}_{k\alpha k}^{\alpha}(\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha})^{2}\leqslant\\ \frac{1}{2}(1-\delta)n\sum_{\beta(\neq n+p,\alpha)}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{H}_{\beta})+n\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2}=n\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2}\end{aligned}\tag{16}$$

$$\sum_{\alpha,\beta(\neq n+p)}\sum_{ijk}\boldsymbol{K}_{k\beta k}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\boldsymbol{h}_{ij}^{\beta}\leqslant n\tau\tag{17}$$

$$\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j,k,m}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}(\boldsymbol{h}_{mk}^{\alpha}\boldsymbol{R}_{mijk}+\boldsymbol{h}_{mi}^{\alpha}\boldsymbol{R}_{mkjk})\geqslant\frac{1}{2}\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{ij}(\lambda_{i}^{\alpha}-\lambda_{j}^{\alpha})^{2}\boldsymbol{R}_{ijij}\geqslant n\boldsymbol{R}_{M}\tau\tag{18}$$

$$\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j,k,m}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}(\boldsymbol{h}_{mk}^{\alpha}\boldsymbol{K}_{mijk}+\boldsymbol{h}_{mi}^{\alpha}\boldsymbol{K}_{mkjk})\geqslant\frac{1}{2}\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{ij}(\lambda_{i}^{\alpha}-\lambda_{j}^{\alpha})^{2}\boldsymbol{K}_{ijij}\geqslant n\delta\tau\tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{M}$ 是 M^{n} 每点截面曲率的下确界.

于是，利用文献[6]中的定理 3.8.1 和(14)—(19)式，对于任何实数 $0\leqslant a\leqslant 1$，有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\Delta\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\geqslant\\ -\frac{2}{3}n^{2}H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau-\\ n\tau+(1+a))n\boldsymbol{R}_{M}\tau+(1-a)n\delta\tau+\\ \frac{1}{p-1}[a(p-1)-(p-2)]\tau^{2}-anH^{2}\tau\end{aligned}\tag{20}$$

令

$$a=\frac{p-2}{p-1}$$

则：

$$\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\Delta\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\geqslant$$

$$\frac{2p-3}{p-1}n\tau^{\frac{1}{2}}\left\{\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{R}_M-\frac{1}{2p-3}\left[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(p-1)\tau^{\frac{1}{2}}+(p-2)H^2\tau^{\frac{1}{2}}-\delta\tau^{\frac{1}{2}}\right]\right\} \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{ijk}(\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ijk})^2+\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}\Delta\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij} \tag{22}$$

(21) 式花括号里面的项不小于 0. 由 Hopf 极大值原理，得 τ 为常数，故 $\Delta\tau=0$，有 $\tau=0$ 或

$$\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{R}_M=\frac{1}{2p-3}\left[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.(p-1)\tau^{\frac{1}{2}}+(p-2)H^2\tau^{\frac{1}{2}}-\delta\tau^{\frac{1}{2}}\right] \tag{23}$$

当(23) 式成立时，(20),(21) 式都为等式，于是 $\delta=1$，从而(21) 式变为

$$\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}\Delta\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}=\frac{2p-3}{p-1}n\tau\left[\boldsymbol{R}_M-\frac{p-2}{2p-3}(1+H^2)\right] \tag{24}$$

即定理 1 成为文献[4] 中的定理 3.8.9，故 $\tau=0$，此时 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形. 而 $\tau=0$，即 $\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}=\boldsymbol{0}$ ($\forall i, j, \alpha\neq n+p$)，于是 M^n 关于其子法丛 $N_1=H^{\perp}$ 是全测地的. 利用文献[2] 中的定理 1，故 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

注 4 对(20) 式稍作变化，并类似定理 1，便可得到定理 2 的证明.

定理 3 的证明 在(13) 式中，令 $a=-1$，再由文献[6] 中的定理 3.8.1，得

$$\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}\Delta\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}=$$

$$-nH\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}\boldsymbol{K}^{\alpha}_{ijn+p}+\sum_{\alpha,\beta(\neq n+p)}\sum_{i,j,k}(4\boldsymbol{K}^{\alpha}_{\beta,ij}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{jk}\boldsymbol{h}^{\beta}_{ik}-\boldsymbol{K}^{\alpha}_{k\beta k}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}\boldsymbol{h}^{\beta}_{ij})-$$

$$2\sum_{\alpha,\beta(\neq n+p)}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}^2_{\alpha}\boldsymbol{H}^2_{\beta})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{H}_{\beta})^2]+2\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j,k,m}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}(\boldsymbol{h}^{\alpha}_{mk}\boldsymbol{K}_{mijk}+\boldsymbol{h}^{\alpha}_{mi}\boldsymbol{K}_{mkjk})-$$

$$\sum_{\alpha(\neq n+p)}(\operatorname{tr}\boldsymbol{H}^2_{\alpha})^2+nH^2\tau\geqslant-\frac{2}{3}n^2H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau-$$

$$n\tau-2\frac{p-2}{p-1}\tau^2+2n\delta\tau-\tau^2+nH^2\tau=\frac{3p-5}{p-1}\tau^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{n}{3p-5}\left[-\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(p-1)(2\delta-1)\tau^{\frac{1}{2}}+(4p-6)H^2\tau^{\frac{1}{2}}\right]-\tau^{\frac{1}{2}}S\right\} \tag{25}$$

因为

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{ijk}(\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ijk})^2+\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}\Delta\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}$$

由定理 3 的条件和 Hopf 极大值原理，得 τ 为常数，故 $\Delta\tau=0$，从而 $\tau=0$ 或

$$\frac{n}{3p-5}\left[-\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.(p-1)(2\delta-1)\tau^{\frac{1}{2}}+(4p-6)H^2\tau^{\frac{1}{2}}\right]=\tau^{\frac{1}{2}}S \tag{26}$$

当(26) 式成立时，(25) 式为等式，于是 $\delta=1$，从而(25) 式变为

$$\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}\Delta\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}=\frac{3p-5}{p-1}\tau\left\{\frac{n}{3p-5}[(p-1)+(4p-6)H^2]-S\right\} \tag{27}$$

即成为文献[6] 中的定理 3.8.7，故 $\tau=0$，此时 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形. 而 $\tau=0$，即 $\boldsymbol{h}^{\alpha}_{ij}=\boldsymbol{0}$ ($\forall i, j, \alpha\neq n+p$)，于是 M^n 关于其子法丛 $N_1=H^{\perp}$ 是全测地的. 利用文献[2] 中的定理 1，故 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

注 5 在(13) 式中，令 $a=-1$，再对不等式稍作变化，并类似定理 3，便可得到定理 4 的证明.

定理 5 的证明　在(13)式中，令 $a=-1$，再由文献[6]中的定理 3.8.1 以及引理 3.12.1，得

$$\sum_{\alpha(\neq n+p)}\sum_{i,j}\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\Delta\boldsymbol{h}_{ij}^{\alpha}\geqslant-\frac{2}{3}n^{2}H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau-$$
$$n\tau-4[(n-1)(1+H^{2})-Q]\tau+2n\delta\tau-[n(n-1)(1+H^{2})-nQ]\tau+nH^{2}\tau=$$
$$(n+4)\tau^{\frac{1}{2}}\left\{\tau^{\frac{1}{2}}Q-\frac{1}{n+4}\left[\frac{2}{3}n^{2}H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.(n^{2}+2n-4)(1+H^{2})\tau^{\frac{1}{2}}-(2\delta-2)n\tau^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\tag{28}$$

同定理 1 的论证，便得到定理 5.

注 6　在(13)式中，令 $a=-1$，再由文献[6]中定理 3.12.1 和引理 3.12.1，便可得到定理 6 的证明.

参考文献：

[1] CHERN S S，CARMO M D，KOBAYASHI S. Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length [M]. New York：Springer-Verlag，1970：47－63.
[2] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature Ⅰ [J]. Amer J Math，1974，96(2)：346－366.
[3] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature Ⅱ [J]. Amer J Math，1975，97(1)：76－100.
[4] 宋卫东. 关于局部对称空间中的伪脐子流形 [J]. 数学研究与评论，1999，19(3)：25－29.
[5] 吴可丹. 局部对称空间中的伪脐子流形 [J]. 丽水学院学报，2007，29(2)：1－5.
[6] 纪永强. 子流形几何[M]. 北京：科学出版社，2004：198－209.
[7] 丁顺汉. 局部对称空间中的伪脐子流形 [J]. 商丘师范学院学报，2004，20(2)：69－72.
[8] 何盼盼，姚纯青. 球面上具有平行平均曲率向量的子流形 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(6)：72－75.

The Compact Pseudo-Umbilical Submanifold with Parallel Mean Curvature Vector in the Locally Symmetric Space

ZHU　Hua，　WANG Shi-li，　YAO Chun-qing
School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper mainly discuss the compact pseudo-umbilical submanifold with parallel mean curvature in the locally symmetric space，and we get some pinching theorems that the submanifold can become a totally umbilical submanifold and reduction of the codimension.

Key words：the locally symmetric space；parallel mean curvature vector；pseudo-umbilical submanifold

责任编辑　廖　坤