DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.08.015

Copula 函数选择的小波方法①

彭 选 华

西南政法大学 经济学院, 重庆 401120

摘要: 金融资产相依结构研究中选择 Copula 函数很关键. 考虑到相依结构的局部特征差异, 利用小波函数的局部自适应能力, 将阈值规则引入 Copula 理论, 提出 Copula 函数的小波收缩估计量, 并以此为基准给出参数 Copula 选择的小波方法. 这得到以标普 500 指数、日经 225 指数、恒生指数和上证指数为样本的实证支持. 进而从不同的时间尺度视角捕捉到股市之间潜在的相依模式.

关 键 词: 小波分析; 软阈值; 参数 Copula; 非参数估计

中图分类号: F830.91　**文献标志码**: A　**文章编号**: 1673-9868(2016)08-0090-10

在经济全球化的大环境下, 金融市场之间存在密切的相依关系, 一市场价格波动迅速引导另一市场. 研究这种相依关系已成为金融量化分析的热点. 文献[1-2]显示 Copula 函数已成为金融衍生品定价、风险度量、传染、管理等领域研究的重要量化工具. 如何选取最优的 Copula 函数度量金融变量相依结构呢? 相关文献尚未在函数空间范围内探索如何量化相依模式, 因此本文考虑小波方法引入 Copula 研究, 解决金融应用中 Copula 函数选择的优化问题.

1 Copula 文献述评

Copula 理论研究集中于两方面: 一是 Copula 函数的性质和统计推断. 文献[3]引入 Copula 函数的非参数核函数估计方法并推导了 Copula 函数核估计量的若干统计性质. 文献[4]对 Copula 函数的拟合优度检验时, 分析 Copula 函数的非参数核估计量的局部误差, 发现不必要的限制核函数带宽导致该估计量非最优. 文献[5]基于核函数的 Copula 函数估计量在临近网格边界上的偏差较大, 并认为 Copula 函数在临近边界处的正则性较差, 为此该结果不能很好地展示相依结构的局部特征. 文献[6]利用小波识别 Copula 函数曲面的整体趋势和局部细节特征. 二是 Copula 函数选择方法研究. 文献[7]利用非参数核密度方法来估计 Copula 函数中的边缘分布并统计检验出能够较好地展示金融相依结构的 Copula. 文献[8]基于核密度估计方法提出 Copula 函数选择的核密度选择原理, 通过蒙特卡罗模拟发现核密度选择原理不仅避免了估计 Copula 函数中的参数, 而且选择效果最好. 文献[9]利用经验分布函数和局部极大似然法估计 Copula 模型中的时变参数. 文献[10]利用小波局部阈值方法估计 Copula 函数并分析了估计误差的收敛性. 文献[11]发现边际分布拟合不当会错误地选择 Copula 函数, 不知边际分布函数类型时用半参数方法的估计效果较好.

鉴于文献[1-10]等为 Copula 函数选择提供了丰富的理论支撑, 本文认为 Copula 函数选择需考虑 3 个关键问题: 一是如何确定目标函数空间? 二是如何设计出可实施的算法? 三是如何确定评价指标并比较

① 收稿日期: 2015-03-06
基金项目: 重庆市教委科学技术研究项目(KJ130107); 重庆市自然科学基金项目(cstc2012jjA00023).
作者简介: 彭选华(1981-), 男, 重庆云阳人, 讲师, 博士, 主要从事金融系统相依结构理论、多尺度风险度量与管理、金融量化分析与投资管理研究.

效果？解决问题方法分别是完全参数法、半参数法、非参数法.其中完全参数法假设相依结构由某个参数Copula驱动，采用极大似然或贝叶斯方法估计Copula参数，根据AIC，BIC等准则评价选择的效果.由于数据的复杂特征，完全参数法选择Copula函数样本内拟合好，但样本外预测能力差，因此选择半参数和非参数方法用于Copula理论及应用研究.这两种方法扩大了Copula函数的选择空间.所选取的Copula函数能够尽可能地展示相依结构的局部特征.其中边缘分布和联合分布的非参数核函数估计中带宽影响了Copula函数的选择，因此本文考虑小波函数具有较强的局部自适应能力和多尺度变焦功能，在小波函数空间内选取Copula函数必然优于完全参数和半参数方法，从而提出Copula函数选择的小波方法.这里分4步实施：① 选择一维小波函数构建边缘分布的收缩估计量；② 构建Copula函数小波展开的塔式算法；③ 在恰当的时间尺度上构建Copula函数的收缩算法；④ 以收缩估计量为基准优化Copula函数选择结果.

本文的学术贡献在于：一是小波软阈值规则引入边缘分布；二是边缘分布的收缩估计量嵌入Copula估计理论；三是Copula函数选择的小波方法.这在金融应用中有助于消除微观结构噪声的影响，发现真实的边缘分布和最佳的Copula函数.

2　Copula函数估计理论与方法

本节首先介绍Copula函数的概念，接着推导边缘分布的小波收缩估计量，进而得到Copula函数的小波收缩估计量，最后给出Copula函数选择的小波方法.

2.1　Copula函数

假设随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,d;d\geqslant 2)$ 的分布函数为 $F_i(x)=\Pr(X_i\leqslant x)$. 根据文献[12]定理，$X=(X_1,\cdots,X_d)$ 的联合分布为

$$H(X)=C(F_1(X_1),\cdots,F_d(X_d)) \tag{1}$$

其中Copula函数 C 的边缘分布 $F_i(X_i)=u_i$ 是均匀分布[0，1]，F_i 不影响 C 的解析式(文献[13－14]).

令

$$h(x)=\partial^d H(X\leqslant x)/\partial x \qquad f_i(x_i)=\partial F_i(X_i\leqslant x_i)/\partial x_i$$

对 $u_i\in[0,1]$ 可得联合分布的密度函数

$$h(x)=\frac{\partial^d}{\partial u_1\partial u_2\cdots\partial u_d}C(u_1,u_2,\cdots,u_d)\times\prod\nolimits_{i=1}^{d}\frac{\partial^d}{\partial x_i}F_i(x_i) \tag{2}$$

从而Copula密度函数 $c(u)=\partial^d C(u_1,\cdots,u_d)/\partial u_1\cdots\partial u_d$ 表示为

$$c(u_1,u_2,\cdots,u_d)=h(x)\left(\prod\nolimits_{i=1}^{d}f_i(x_i)\right)^{-1} \tag{3}$$

对任意 $\Phi(u)\in L_2([0,1]^d)$ 关于 $c(u)$ 的期望为

$$E_c(\Phi)=\int_{[0,1]^d}\Phi(u)c(u)\mathrm{d}u$$

由式(3)得

$$\begin{aligned}E_c(\Phi)=&\int_{[0,1]^d}\Phi(F(x))h(x)\left(\prod\nolimits_{i=1}^{d}f_i(x_i)\right)^{-1}\mathrm{d}F(x)=\\&\int_{[(-\infty,\infty)^d}\Phi(F_1(x_1),\cdots,F_d(x_d))h(x_1,\cdots,x_d)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4}$$

式(4)是Copula密度函数的一个重要性质，有助于矩法估计Copula函数中的参数.其中边缘分布和C函数的选择是建立相依结构模型的两个关键步骤.一方面，若Copula的参数形式记为 $\{C_\theta,\theta\in\Theta\}$，则参数 θ 决定了Copula函数曲面的结构特征.比如，Gaussian-Copula和t-Copula、Gumbel-Copula、Clayton-Copula和Frank-Copula等参数Copula函数常用于度量具有不同局部特征的相依结构(文献[2]).另一方面，任何参数分布或者随机模型都难以全面地量化受到噪声数据的分布特征.从这两方面考虑，下面引入小波方法对数据进行降噪处理并准确地量化式(4)中边缘分布 $F_i(X_i)=U_i$，以此实现对Copula函数中边缘分布的最佳度量.

2.2　边缘分布的小波收缩估计量

金融数据受到市场微观结构噪声污染，为此引入文献[15]的小波非参数回归模型. 从而假设 X_i（$i=1$，2，…，d；$d\geqslant 2$）的边缘分布 $F_i(x_i)$ 满足

$$u_i=F_i(x_i)+\sigma w_i \qquad i=1,2,\cdots,d \tag{5}$$

式(5) 中 $u_i=(T+1)^{-1}\sum_{j=1}^{T}I(X_{i,j}\leqslant x_i)$，$w_i$ 为维纳过程，$\sigma\geqslant 0$ 显示噪声对真实分布的影响.

假设尺度函数 φ 和小波函数 ψ 有较好的正则性，由父小波 φ 和母小波 ψ 生成的正交基分别记为 $\varphi_{j,k}=2^{j/2}\varphi(2^jx-k)$ 和 $\psi_{j,k}=2^{j/2}\psi(2^jx-k)$，则存在正整数 τ 使得函数系 $\zeta=\{\varphi_{j,k}(x)$，$k=0$，…，$2^{\tau}-1$；$\psi_{j,k}(x)$，$j=\tau$，…，∞，$k=0$，…，$2^j-1\}$ 构成空间 $L^2(R)$ 的一组正交基. 因此，对任何 $l\geqslant\tau$，平方可积的一维分布函数 $F(x)\in L^2(R)$ 在小波基函数构成的集合 ζ 中展开为

$$F(x)=\sum_{k=0}^{2l-1}\alpha_{l,k}\varphi_{l,k}(x)+\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=0}^{2j-1}\beta_{j,k}\psi_{j,k}(x) \tag{6}$$

其中

$$\alpha_{l,k}=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\varphi_{l,k}(x)\mathrm{d}x$$

$$\beta_{j,k}=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\psi_{j,k}(x)\mathrm{d}x$$

把式(5) 代入式(6)，可得：

$$\alpha_{l,k}=\int_{-\infty}^{\infty}U_i\varphi_{l,k}(x)\mathrm{d}x-\sigma\int_{-\infty}^{\infty}w_i\varphi_{l,k}(x)\mathrm{d}x$$

$$\beta_{j,k}=\int_{-\infty}^{\infty}U_i\psi_{j,k}(x)\mathrm{d}x-\sigma\int_{-\infty}^{\infty}w_i\psi_{j,k}(x)\mathrm{d}x$$

对于样本观测值 $X_{i,t}$（$i=1$，…，d；$t=1$，…，T），$u_{i,t}\in(0,1)$，令 $\hat{a}_{l,k}$ 和 $\hat{b}_{j,k}$ 分别为 $-\int_{-\infty}^{\infty}w_i\varphi_{l,k}(x)\mathrm{d}x$ 和 $-\int_{-\infty}^{\infty}w_i\psi_{j,k}(x)\mathrm{d}x$ 的估计值，即噪声的小波估计量，则小波系数的矩法估计为

$$\hat{\alpha}_{l,k}=(1+T)^{-1}\sum_{t=1}^{T}\varphi_{l,k}(u_{i,t})/f_i(X_{i,t})+\sigma\hat{a}_{l,k}$$

$$\hat{\beta}_{j,k}=(1+T)^{-1}\sum_{t=1}^{T}\psi_{j,k}(u_{i,t})/f_i(X_{i,t})+\sigma\hat{b}_{j,k} \tag{7}$$

由式(7) 计算出的小波系数受到噪声污染，为了得到边缘分布 $F_i(x_i)$ 的最佳估计量，应用文献[15]提出的几种阈值规则对 $\hat{d}_{jk}$ 进行收缩，得到一维分布的小波收缩估计量

$$\tilde{F}(x)=\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1}\tilde{\alpha}_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j=j_0}^{j_{\max}}\sum_{k=0}^{2j-1}\tilde{\beta}_{j,k}^{(N)}\psi_{j,k}(x) \tag{8}$$

其中

$$0\leqslant j_0\leqslant l,\ l\leqslant j_{\max}=2\sqrt{\log(T)}$$

$$\lambda=\sqrt{\log(T)/T}$$

按硬阈值和软阈值 $N\in\{H,S\}$ 收缩的小波系数记为

$$\tilde{\beta}_{jk}^{(H)}=\hat{\beta}_{jk}I(|\hat{\beta}_{jk}|\geqslant\lambda)$$

$$\tilde{\beta}_{jk}^{(S)}=(|\hat{\beta}_{jk}|-\lambda)\mathrm{sgn}(\hat{\beta}_{jk})$$

式(8) 给出边缘分布的两种小波收缩估计量. 如果密度函数具有紧支撑性，那么该估计量具有渐进无偏性（文献[16－17]）. 由于软阈值具有较强的局部自适应能力，拟合边缘分布时，均方误差收敛较快（文献[10]），因此软阈值小波收缩估计量适合消除边缘分布中噪声成分对 Copula 函数选择的影响.

2.3　Copula 函数的小波收缩估计量

考虑一维分布的小波收缩估计量引入 Copula 函数的统计推断. 首先基于一维小波函数和尺度函数，采

用文献[18]的张量积算子构建高维小波函数. 对尺度 $j_0 \in N$，函数空间 $L^2(R)$ 的一组基为

$$\{\tilde{\omega}_{j_0,k}\}_{k=1}^{2^{j_0}} \bigcup_{j=j_0}^{\infty} \{\psi_{j,k}\}_{k=1}^{2^j}$$

其中

$$\varphi_{j_0,k}(x) = 2^{j_0}\varphi(2^{j_0}x - k) \qquad \psi_{j_0,k}(x) = 2^{j_0}\psi(2^{j_0}x - k)$$

定义 d 维向量 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_d]$ 的多元尺度函数 $\varphi_{j,k}(X)$ 和小波函数 $\psi^i_{j,k}(X)$ 分别为

$$\varphi_{j,k}(X) = \prod\nolimits_{n=1}^{d} \varphi_{j,k_n}(x_n) = 2^{jd}\prod\nolimits_{n=1}^{d} \varphi(2^j x_n - k_n)$$

$$\psi^i_{j,k}(X) = \prod\nolimits_{n=1}^{d} \varphi^{1-i_n}_{j,k_n}(x_n)\psi^{i_n}_{j,k_n}(x_n) = 2^{jd}\prod\nolimits_{n=1}^{d} \varphi_j^{1-i_n}(2^j x_n - k_n)\psi_j^{i_n}(2^j x_n - k_n)$$

其中 $i = [i_1, \cdots, i_d]$，$i_n = 0$ 或 $1(n \neq 0)$，记

$$S = \{0, 1\}^d \{(0, \cdots, 0)\} \qquad i \in S$$

易见，j 级尺度空间 $L^2(R^d)$ 的一组基可由1个尺度函数和 $(2^d - 1)$ 个小波函数构成. 于是，$L^2(R^d)$ 的一组基函数表示为

$$E_{j_0} = \{\varphi_{j_0,k}(X), \psi^i_{j,l}(X) \mid X \in R^d, k \in I_{j_0}, l \in I_j, i \in S, j \geqslant j_0\}$$

其中 $I_{j_0} = \{1, \cdots, 2^{j_0}\}^d$，$I_j = \{1, \cdots, 2^j\}^d$. 因为集合 E_{j_0} 中的函数均具有正交性，所以任意的Copula函数 $h(X) \in L^2(R^d)$ 在该集合上可以展开为

$$h(X) = \sum_{k \in I_{j0}} \alpha_{j_0,k}\tilde{\omega}_{j_0,k}(X) + \sum_{j \geqslant j0}\sum_{k \in I_j}\sum_{i \in S}\beta^i_{j,k}\psi^i_{j,k}(X) \tag{9}$$

其中

$$\alpha_{j_0,k} = \int_{R^d} h(X)\varphi_{j_0,k}(X)\mathrm{d}X$$

$$\beta^i_{j,k} = \int_{R^d} h(X)\psi^i_{j,k}(X)\mathrm{d}X$$

我们利用式(4)及密度函数的性质，得到小波系数的矩法估计为

$$\hat{\alpha}_{j_0,k} = (1+T)^{-1}\sum\nolimits_{t=1}^{T}\varphi_{j_0,k}(\tilde{u}_{1,t}, \cdots, \tilde{u}_{d,t})$$

$$\hat{\beta}_{j_0,k} = (1+T)^{-1}\sum\nolimits_{t=1}^{T}\psi^i_{j,k}(\tilde{u}_{1,t}, \cdots, \tilde{u}_{d,t}) \tag{10}$$

其中 $\tilde{u}_{j,t} = \widetilde{F}(x_{j,t})$，$(i = 1, \cdots, d; t = 1, \cdots, T)$，$\widetilde{F}(x_{j,t})$ 为边缘分布的小波收缩估计量.

式(9)表明多元联合分布的总体特征可以分解成尺度 $j_0 \in N$ 上的趋势特征和若干个细节特征. 类似一维分布的小波收缩估计方法，在某个尺度上截断式(9)中可以忽略的细节成分，这样得到截断估计量. 关于误差收敛性分析可见文献[15-17]. 为了展示相依结构在不同尺度上的局部特征，文献[6]研究了Copula函数曲面的线性截断问题. 其中并没有考虑到数据质量问题，运用一维经验分布代替真实的边缘分布，忽略了数据中的噪声成分，这使得估计结果不准确. 为此考虑用一维分布的小波收缩估计量代替经验分布，构建Copula函数的小波收缩估计量为

$$\tilde{c}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_d) = \sum_{k \in I_{j0}}\tilde{\alpha}_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_d) + \sum_{j=j0}^{J_{\max}}\sum_{k \in I_j}\sum_{i \in S}\tilde{\beta}^i_{j,k}\psi^i_{j,k}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_d) \tag{11}$$

其中

$$\tilde{\alpha}_{j_0,k} = \hat{\alpha}_{j_0,k}$$

$$\tilde{\beta}^i_{j,k} = (|\hat{\beta}^i_{jk}| - \lambda)\mathrm{sgn}(\hat{\beta}^i_{jk})$$

sgn为符号函数，阈值 $\lambda = \sqrt{\log(T)/T}$，$0 \leqslant j_0 < J_{\max}$，最大尺度 $J_{\max} = 0.5\log_2(T/\log T)$. 式(11)的估值误差定义为均方积分误差(MISE)：

$$\mathrm{MISE}(\tilde{c}, c) = E_h\left(\int_{[0,1]^d}(\tilde{c}(\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_d) - c(u_1, \cdots, u_d))^2\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_d\right) \tag{12}$$

注 1　光滑度为 s 的 d 维 Copula 函数的 MISE($\tilde{c}$, c) 等同于 $r_T=(\log(T)/T)^{2d/(2s+d)}$，该结果的证明类似于文献[10]，关于 λ 和 j_0 的选取方法如文献[6].

注 2　当 $\tilde{\beta}_{jk}^{i}=\hat{\beta}_{jk}^{i}I(|\hat{\beta}_{jk}^{i}|\geqslant\lambda)$，式(11) 变成文献[19] 的非线性阈值估计量；当 $\tilde{\beta}_{jk}^{i}=0$，式(11) 等同于文献[6] 的线性截断估计量，这两种方法对边缘分布的估计都用到了经验分布，而本文采用小波收缩估计量 $\tilde{F}(x)$ 代替经验分布 $\hat{F}(x)$，这样消除噪声对真实 Copula 函数参数估计的影响，进而为 Copula 函数选择的小波方法提供了理论支撑.

2.4　Copula 函数优化选择步骤

由式(11) 给出的 Copula 估计量是一类非参数自适应估计方法(文献[10]). 由于小波函数的紧支撑性、正交性、变焦性、自适应性等优点，因此通过两次小波收缩对样本数据中的噪声进行自适应滤波，并充分捕捉到相依结构的局部特征. 虽然该估计量有近乎完美的刻画，但是由于小波函数很少有解析式，致使数值计算中体现优势，并不能像参数 Copula 函数一样应用于资产组合的风险度量. 这里以 Copula 函数的小波收缩估计量为基准，在参数 Copula 族内构建一个混合 Copula 函数，通过最小化两者之间的 MISE，求解该 Copula 中的参数，以此搜寻 Copula 函数空间中与小波收缩估计量最接近的 Copula 函数，从而实现相依结构的最佳量化.

总体而言，基于小波收缩估计量的 Copula 函数选择方法描述为：① 选取一维小波函数，构建边缘分布的小波收缩估计量；② 构建高维小波函数并作为高维空间的一组基函数，利用塔式算法展开 Copula 函数；③ 选取恰当尺度上的小波收缩估计量并标准化为一个 Copula 函数；④ 以该估计量为参数 Copula 函数的选择基准优化 Copula 参数，进而实现潜在相依结构的最佳度量，由此计算步骤如下：

步骤 1　计算 $X_{i,t}$ 的经验分布 $U_t=[u_{1,t},\cdots,u_{d,t}]$，其中 $u_{i,t}=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{k=1}^{T}1\{X_{i,k}\leqslant x_{i,t}\}$；

步骤 2　计算边缘分布 $F(x)$ 的小波收缩估计量(图 1)：① 计算小波经验系数的矩估计量 $\hat{\alpha}_{l,k}$ 和 $\hat{\beta}_{j,k}$；② 计算 $\lambda=\sqrt{\log(T)/T}$，$\tilde{\alpha}_{j_0,k}$ 和 $\tilde{\beta}_{j,k}^{(N)}$；③ 利用式(8) 重构 $\tilde{u}=\tilde{F}(x)$.

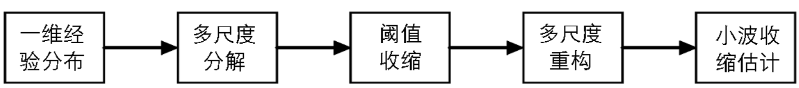


图 1　一维分布的小波收缩估计

步骤 3　计算尺度 $J_{\max}+1=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{T}{\ln T}\right)$；

步骤 4　计算尺度 $J_{\max}+1$ 的经验小波系数 $\hat{\alpha}_{J_{\max}+1,k}$，其中

$$k=[k_1,\cdots,k_d],\ 1\leqslant k_i\leqslant 2^{J_{\max}+1},\ \hat{\alpha}_{J_{\max}+1,k}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varphi_{J_{\max}+1,k}(\tilde{U}_t^d)$$

步骤 5　基于 d 维塔式算法，计算尺度 j 的小波系数和尺度系数(图 2).

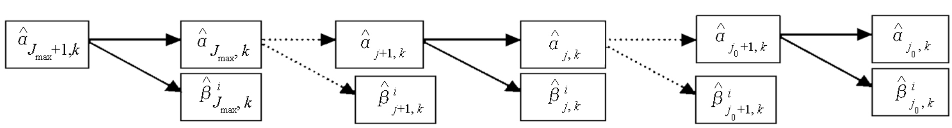


图 2　Copula 函数展开小波系数的矩估计

步骤 6　根据软阈值规则收缩小波系数 $\tilde{\beta}_{j,k}^{i}$(图 3).

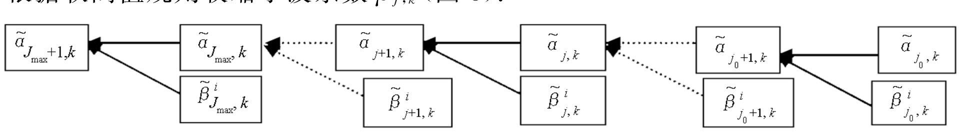


图 3　Copula 函数小波收缩估计量

步骤 7 选取尺度 $j=j_0(0\leqslant j_0\leqslant J_{\max})$ 重构 Copula 函数

$$\tilde{c}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_d)=\sum_{k\in I_{j0}}\tilde{\alpha}_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_d)+\sum_{j=j_0}^{J_{\max}}\sum_{k\in I_j}\sum_{i\in S_d}\tilde{\beta}^i_{j,k}\psi^i_{j,k}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_d)$$

步骤 8 基于网格近似计算均方积分误差

$$\mathrm{MISE}(\tilde{c}, c)=\frac{1}{(J_{\max}+1)^d}\sum_{l_1=1}^{J_{\max}+1}\cdots\sum_{l_d=1}^{J_{\max}+1}\left\{\tilde{c}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_d)-c\left(\frac{l_1}{J_{\max}+1}, \cdots, \frac{l_d}{J_{\max}+1}\right)\right\}^2$$

其中网格结点取为$\{0, 1, 2, \cdots, J_{\max}+1\}^d\subset[0, 1]^d$，$c$ 为真实的 Copula 函数.

步骤 9 基于 $\tilde{c}$ 优化 Copula 函数的参数

$$\hat{\theta}=\underset{\theta\in\Theta}{\arg}\mathrm{MISE}(\tilde{c}, c_\theta)$$

其中 c_θ 表示一类参数 Copula 函数，$\tilde{c}$ 为 Copula 函数的小波收缩估计量.

3 实证研究

为了检验小波方法的可行性，本文选取标准普尔 500(SP500)、日经 225(N225)、恒生(HSI)和上证(SSEC)为实证对象，应用小波收缩方法估计指数收益率的边缘分布和 Copula 函数曲面，接着筛选最优的 Copula 函数，最后给出相依模式分析. 股市指数采集时间从 2003 年 1 月 4 日至 2014 年 1 月 13 日. 文献[20]的研究结论表明，在同一实证模型中删去另一股市在无交易日的数据，则不会影响研究结果的正确性. 因而保证交易的同步性和相依结构模式的可比性，样本容量为 2212.

3.1 指数收益率分布的小波收缩估计分析

本节利用 WavLab8.5 工具箱编程：执行步骤 1、2 完成股市指数收益率分布的小波收缩估计量(图 4).

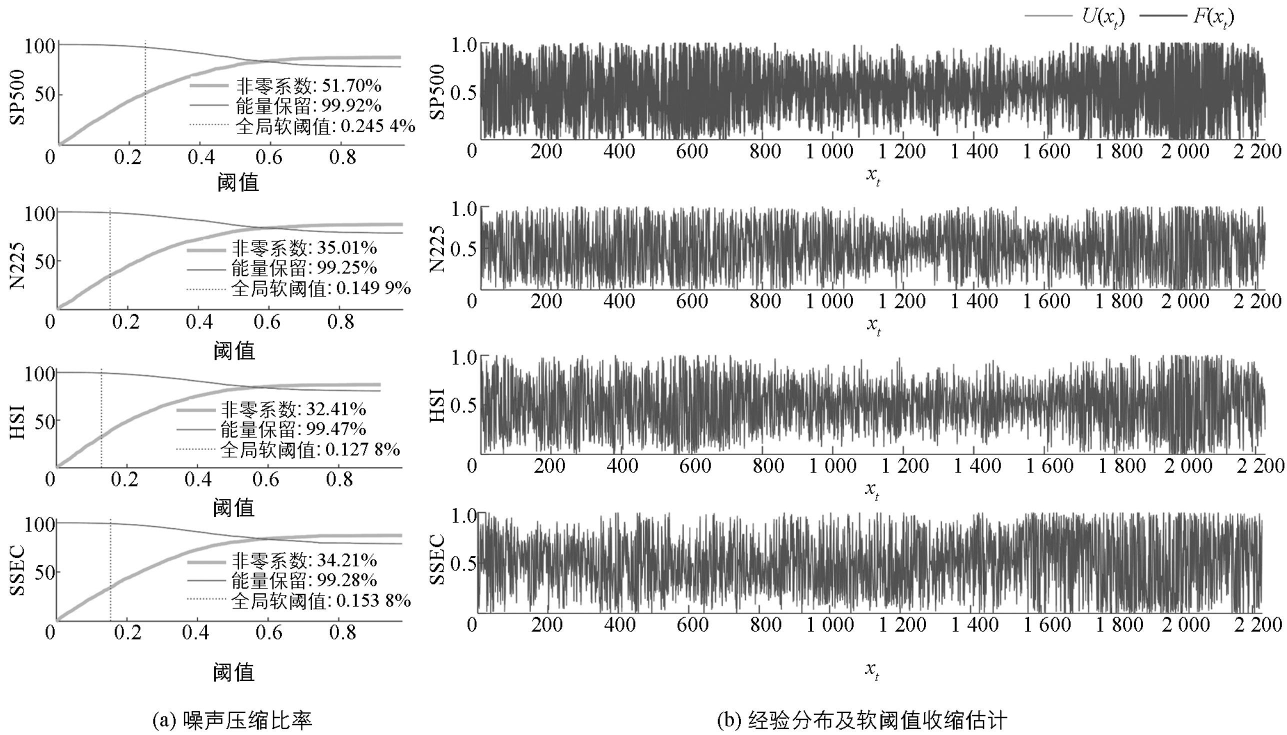


图 4 指数收益率分布的小波收缩估计分析

从图 4 可见：

1) 指数收益率分布的小波收缩估计量的能量保留率、非零小波系数个数与全局软阈值之间的动态关系. 在选定的最佳阈值处，能量保留率高达 99%以上，近乎无损估计最佳的边缘分布；非零小波系数个数越少，在重构边缘分布中计算耗时越短.

2）全局软阈值分别取为 0.245 4，0.149 9，0.127 8 和 0.153 8. 这显示边缘分布的小波收缩估计量的差异十分明显，成熟市场取值较大，而新兴市场取值较小，市场受到噪声影响的差异十分显著，进而说明 4 个股市的市场微观结构不同.

3.2　Copula 函数的小波收缩估计分析

本节执行步骤 3～8 完成相依结构的小波收缩估计及 Copula 函数优化选择（表 1～2 和图 5）. 其中：WHT－表示非线性阈值估计量，其中边缘分布为经验分布（Autin 等，2010）；WST－表示小波收缩估计量；C_{ij}－表示第 i 个与第 j 个股市指数收益率的 Copula 函数，其中 $i,j \in \{$SP500，N225，HSI，SSEC$\}$；C_k－表示参数 Copula 类，$k \in \{N、T、G、C、F\}$以及混合 Copula 类（$C6$）.

表 1　小波收缩估计量的最小均方积分误差比较

Copula	C_{12}		C_{13}		C_{14}		C_{24}		C_{34}		C_{32}	
	WHT	WST	WHT	WST	WHT	WST	WHT	WST	WHT	WST	WHT	WST
C_1	0.168	0.151	1.357	0.885	0.129	0.120	0.142	0.117	0.129	0.127	0.154	0.153
C_2	0.158	0.137	1.387	0.907	0.126	0.117	0.140	0.116	0.123	0.120	0.141	0.138
C_3	0.171	0.151	2.143	1.444	0.129	0.120	0.144	0.119	0.129	0.127	0.156	0.154
C_4	0.163	0.148	1.652	1.112	0.129	0.120	0.140	0.117	0.128	0.125	0.149	0.148
C_5	0.168	0.151	1.134	0.690	0.129	0.120	0.144	0.118	0.129	0.127	0.155	0.152
C_6	0.155	0.133	1.148	0.648	0.125	0.115	0.138	0.115	0.121	0.120	0.138	0.136

根据表 1 可知：从横向比较发现，WST 的均方积分误差都比 WHT 的小，这证实了小波收缩估计的局部自适应能力比阈值收缩估计量的更强，说明利用边缘分布的小波收缩估计明显好于经验估计，该方法体现了小波函数具有较强的自适应能力；从纵向比较发现，在已有的参数 Copula 簇内，小波收缩估计量是对四大股指收益率之间相依结构的最佳选择基准，虽然 WST 和 WHT 都能达到该目的，但均方积分误差的值显示前者明显优于后者；C_6 是度量美国标普 500 指数（SP500）、日经 225 指数（N225）、恒生指数（HSI）和上证指数（SSEC）等两两之间相依结构的最佳 Copula 函数类，这在于混合参数 Copula 簇具有单个参数 Copula 簇 C_1～C_5 的所有优点.

表 2　Copula 函数选择的参数估计结果

Copula 参数	C_{12}		C_{13}		C_{14}		C_{24}		C_{34}		C_{32}	
	WHT	WST	WHT	WST	WHT	WST	WHT	WST	WHT	WST	WHT	WST
$C_1:\theta$	0.190	0.187	0.890	0.914	0.011	0.041	0.135	0.140	0.035	0.035	0.193	0.189
$C_2:\theta$	0.154	0.160	0.881	0.907	0.010	0.039	0.126	0.130	0.032	0.033	0.155	0.153
$C_2:\nu$	4.307	4.859	20.00	20.00	8.413	7.963	11.063	10.02	6.304	6.295	4.241	4.419
$C_3:\theta$	0.227	0.205	1.943	2.290	0.028	0.051	0.154	0.153	0.046	0.049	0.221	0.210
$C_4:\theta$	1.127	1.134	2.631	2.953	1.015	1.033	1.084	1.093	1.035	1.033	1.132	1.131
$C_5:\theta$	0.983	0.960	12.55	14.48	0.055	0.218	0.673	0.672	0.186	0.195	0.997	0.966
$C_{61}:\theta$	−0.598	−0.572	0.898	−0.208	−0.533	−0.595	−0.519	−0.615	−0.391	−0.523	−0.407	−0.577
$C_{62}:\theta$	0.163	0.188	0.676	0.160	0.148	−0.458	0.055	−0.333	0.122	0.222	0.402	0.242
$C_{62}:\nu$	1.154	1.923	2.538	15.00	1.402	8.646	1.371	4.734	8.626	1.310	15.00	1.072
$C_{63}:\theta$	1.728	1.537	1.000	2.769	1.391	1.005	1.288	1.172	1.153	1.407	1.409	1.556
$C_{64}:\theta$	7.509	10.00	10.00	10.00	9.489	6.398	10.00	0.357	9.998	9.364	6.476	10.00
$C_{65}:\theta$	0.608	0.414	6.702	3.203	0.787	2.071	0.657	0.233	0.316	1.216	0.263	0.647
ω_1	0.503	0.420	1.000	1.000	0.642	0.786	0.395	0.905	0.228	0.635	0.382	0.422
ω_2	−0.436	−0.561	−1.338	−1.540	−0.565	−0.883	−0.329	−1.335	0.740	−0.526	0.427	−0.303
ω_3	0.374	0.557	0.338	0.437	0.521	0.968	0.590	0.735	0.000	0.554	0.058	0.478
ω_4	0.169	0.079	1.000	1.000	0.072	0.128	0.022	0.163	0.032	0.104	0.133	0.097
ω_5	0.390	0.505	0.000	0.103	0.330	0.001	0.322	0.532	0.000	0.233	0.000	0.306

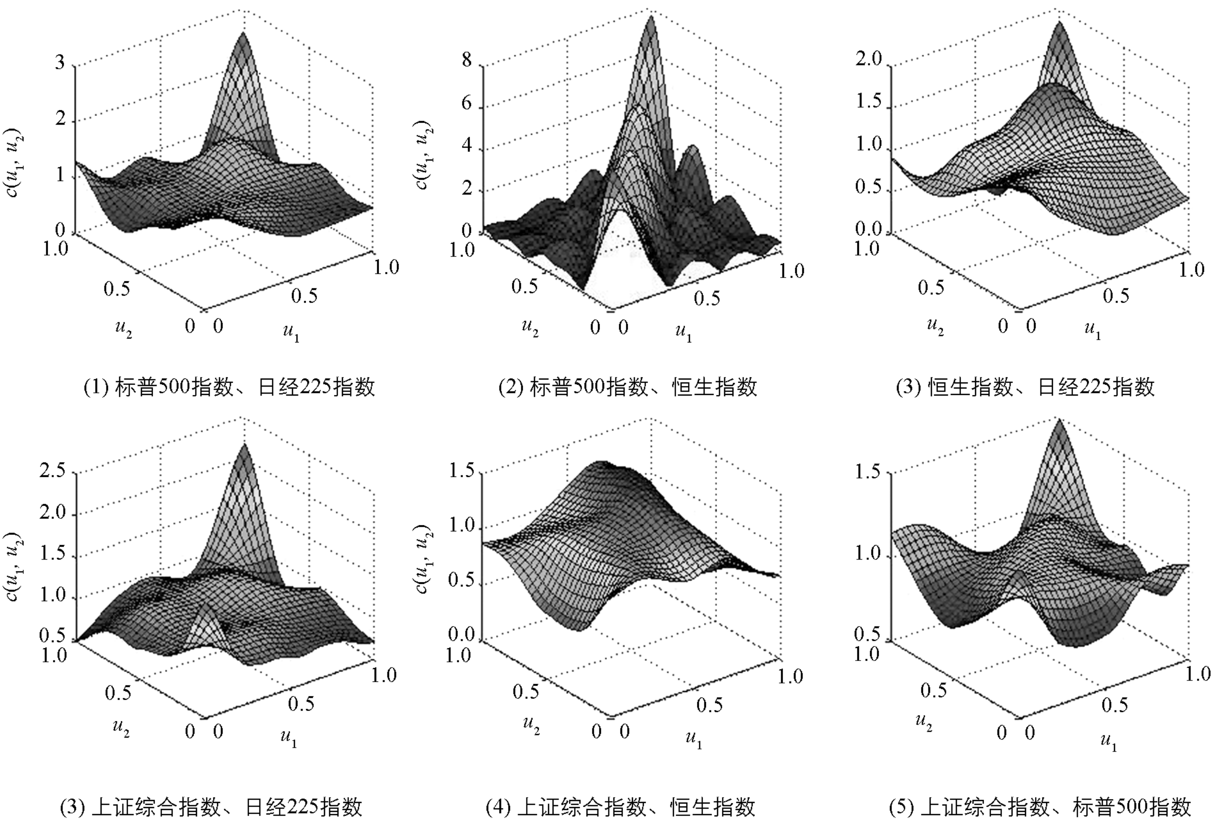
注 3 C_i—表示常见参数 Copula，$i \in \{N、T、G、C、F\}$，w_i—表示混合 Copula(C_6)中 C_i 的权重.

表 2 显示：① 基于 WHT 和 WST 方法，在同一簇 Copula 内筛选出的最佳参数模型相同，表明较高质量的样本数据内在相依结构不会受到方法的影响而优选出一个非最优参数 Copula. 相反，对低质量的数据，两种收缩方法就能筛选出不同的最佳参数 Copula；② 单参数簇 Copula 的参数估值与其在混合参数簇 Copula 中的估值差异较大，主要在于混合参数 Copula 权重值综合了单参数簇 Copula 特征，较为全面地刻画样本数据之间的相依结构，进而表明单参数 Copula 不能全面刻画相依结构特征；③ 混合参数 Copula 中较大的正权重值体现了其中单参数 Copula 特征与样本数据相依结构特征吻合程度较高，相反较小的负权重表明特征吻合程度较低.

3.3 指数收益率相依结构特征分析

根据前面选择的最佳 Copula 函数估计结果，绘制 Copula 函数曲面并从立体视角解读标普 500 指数、日经 225 指数、恒生指数和上证指数等两两之间的相依结构模式(图 5).

图 5 表明：① 标普 500 指数与日经 225 指数的上尾相关性较大，两指数同涨可能性较强；② 标普 500 指数与恒生指数的主对角相关性明显，意味着两指数协同性较强；③ 恒生指数与日经 225 指数的上尾相关性明显，中心相关模式显著，表明两指数除了同涨可能性较大之外，互不相关性十分突出；④ 上证综合指数与日经 225 指数的上尾相关模式强于下尾相关模式，两指数存在同涨跌的相关模式，绝大部分时刻不存在明显的相关模式；⑤ 上证综合指数与恒生指数之间少有的对冲相关模式；⑥ 上证综合指数与标普 500 指数的上尾相关模式强于下尾相关模式，两指数同涨跌还存在明显的局部对冲模式.



(1) 标普500指数、日经225指数　(2) 标普500指数、恒生指数　(3) 恒生指数、日经225指数

(3) 上证综合指数、日经225指数　(4) 上证综合指数、恒生指数　(5) 上证综合指数、标普500指数

图 5　指数收益率相依结构的小波收缩估计量

图 5 还显示指数收益率之间相依结构特征的一些趋势特征. 其中标普 500 指数对其它三指数的极端关联性较强，上证综合指数与标普指数和日经 225 指数的极值相关性十分明显，与恒生指数的极端协同性和

对冲性都存在. 这些相关模式进一步展示了上证综合指数与 3 个成熟市场指数之间内在的高度依存关系，中日美金融市场之间存在内在的相互协调机制.

4　结论与启示

本文从金融相依结构建模中 Copula 函数的选择方法展开研究，考虑到金融数据中微观市场结构噪声的影响因素，引入一维软阈值收缩方法估计边缘分布，进而代替经验分布，得到 Copula 密度函数的小波收缩估计量，最后提出参数 Copula 函数选择的小波方法. 本文对标准普尔 500 指数、日经 225 指数、恒生指数、上证综合指数等股价指数的实证研究结论：

1）Copula 函数中边缘分布的小波收缩估计量能够很好地处理金融市场微观结构噪声；

2）在相依结构的趋势特征和局部细节特征度量方面，Copula 函数的小波收缩估计量比任何参数 Copula 的效果好；

3）混合参数 Copula 可以近似代替小波收缩估计量捕捉到 4 个综合指数收益率之间的相依模式.

本研究的重要启示是基于小波收缩估计量的 Copula 函数选择方法可行，这为金融相依结构分析提供了一种全新的建模技术. 本文认为在小波函数空间构建 Copula 函数的估计量及拟合优度检验等值得进一步深入探索(文献[10])，这对资产组合风险度量与管理(文献[20])也是极富应用价值的新课题.

参考文献：

[1]　EMBRECHTS P，MCNEIL A J，STRAUMANN D. Correlation：Pitfalls and Alternatives [J]. Risk Magazine，1998，12(5)：69－71.

[2]　CHERUBINI U，LUCIANO E，VECCHIATO W. Copula Methods in Finance [M]. New York：Wiley，2004.

[3]　SCAILLET O，FERMANIAN J D. Non-Parametric Estimation of Copulas for Time Series [J]. Journal of Risk，2003，5：25－54.

[4]　FERMANIAN J D. Goodness-of-Fit Tests for Copulas [J]. Journal of Multivariate Analysis，2005，95(l)：119－152.

[5]　GENEST C，MASIELLO E，TRIBOULEY K. Estimating Copula Densities Through Wavelets [J]. Insurance：Mathematics and Economics，2009，44(2)：170－181.

[6]　龚金国，李竹渝. 非参数核密度估计与 copula [J]. 数理统计与管理，2009，28(l)：64 – 68.

[7]　任仙玲，张世英. 基于非参数核密度估计的 Copula 函数选择原理 [J]. 系统工程学报，2010，25(1)：36－42.

[8]　龚金国，史代敏. 时变 Copula 模型的非参数推断 [J]. 数量经济技术经济研究，2011(7)：137－150.

[9]　彭选华，傅　强，袁　晨，等. 多元 Copula 密度估计的小波局部阈值方法 [J]. 数理统计与管理，2012(6)：990－1001.

[10]　张连增，胡　祥. Copula 的参数与半参数估计方法的比较 [J]. 统计研究，2014，31(2)：91－95.

[11]　SKLAR A. Fonctions de Répartition àn Dimensions et leurs Merges [J]. Publications de Institut de Statistique del'Université de Paris，1959(8)：229－231.

[12]　NELSEN R B. An Introduction to Copulas [M]. Berlin：Springer，2006.

[13]　FAN YANQIN，PATTON A J. Copulas in Econometrics [J]. Annual Review of Economics，2014，6(1)：179－200.

[14]　DONOHO D L，JOHNSTONE I M. Adapting to Unknown Smoothness Via Wavelet Shrinkage [J]. Journal American Statistical Association，1993，90：1200－1224.

[15]　KERKYACHARIAN G，PICARD D. Thresholding Algorithms，Maxisets，and Well Concentrated Bases [J]. Socicdad de Estadistica Invcstigacion Operativa Test，2001，9(2)：283－344.

[16]　CHESNEAU，CHRISTOPHE. On the Maxiset Comparison Between Hard and Block Thresholding Methods [J]. Statistics & Probability Letters，2008，78(6)：675－681.

[17] COHEN A, DAUBECHIES I, VIAL P. Wavelets on the Interval and Fast Wavelet Transforms [J]. Appl Comput Harmon Anal, 1993, 1(1): 54—81.

[18] AUTIN F, LEPENNEC E, TRIBOULEY K. Thresholding Methods to Estimate the Copula Density [J]. Journal of Multivariate Analysis, 2010, 101: 200—222.

[19] HAMAO Y, MASULIS RW, NG K. Correlations in Price Changes and Volatility Across International Stock Markets [J]. Review of Financial Studies, 1990, 3(2): 281—307.

[20] 傅 强, 伍习丽. 基于ARFIMA-WRBV-VaR的中国股市风险研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(3): 9—15.

Copula Selection through Wavelet Methods

PENG Xuan-hua

School of Economics, Southwest University of Political Science and Law, Chongqing 401120, China

Abstract: how to choose a copula is a key to study dependent structure of financial assets. Considering the local difference of dependency structure and the adaptive ability of wavelet function, soft threshold rules are introduced into copulas theory. A copulas estimator of soft threshold is put forward. Wavelet method is given to optimize parametric copulas. It is supported by the empirical analysis on the S&P 500 index, Nikkei 225 index, Hangseng index and Shanghai index. It is confirmed the wavelet estimator be able to capture the market potential dependent models from a perspective of different time-scales.

Key words: wavelet analysis; soft threshold; parametric copula; nonparametric estimation

责任编辑 汤振金