DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.09.017

Banach 空间中集值隐函数的局部度量正则性和下半连续性①

李建华[1]， 杨明歌[2]

1. 洛阳师范学院 数学科学学院，河南 洛阳 471934；2. 上海大学 管理学院，上海 200444

摘要： 利用 Clarke 上导数，在一般 Banach 空间中研究集值隐函数的稳定性. 不仅给出集值隐函数的局部度量正则性成立的条件，还给出集值隐函数的度量正则性、似-Lipschitz 性、非空性和下半连续性成立的充分条件.

关 键 词： Clarke 次微分；Clarke 上导数；集值隐函数；局部度量正则性

中图分类号： O224 **文献标志码：** A **文章编号：** 1673-9868(2016)09-0107-09

设 X 和 P 是拓扑空间，Y 是拓扑向量空间，$F: X\times P \rightrightarrows Y$ 是集值映射，$(\bar{x}, \bar{p})\in X\times P$ 且 $0\in F(\bar{x}, \bar{p})$. 由

$$G(p):=\{x\in X \mid 0\in F(x, p)\} \tag{1}$$

定义的集值映射 $G: P\rightrightarrows X$ 称为由广义方程 $0\in F(x, p)$ 定义的集值隐函数. 现在的问题是寻找一些关于 F 的可验证的条件使得 G 具有理想的性质. 在已有的相关文献中，关于集值隐函数的不同的拓扑性质、度量性质和可微性质(例如下半连续性、度量正则性、似-Lipschitz 性、上 Lipschitz 连续性、B-可微性等)都被考虑过. F 在 $(\bar{x}, \bar{p})$ 周围的结构及其行为决定着 G 在 $(\bar{p}, \bar{x})$ 周围的局部性质.

根据文献[1-2]，若存在常数 $k, \mu>0$，以及 $\bar{x}$ 的邻域 U 和 $\bar{p}$ 的邻域 V，使得对任意的 $(x, p)\in U\times V$，当 $\mathrm{dist}(0, F(x, p))<\mu$ 时，均有

$$\mathrm{dist}(x, G(p))\leqslant k\,\mathrm{dist}(0, F(x, p)) \tag{2}$$

则称 F 在 Robinson 意义下在 $(\bar{x}, \bar{p})$ 周围是局部度量正则的. 这个性质首次由 Robinson 在其关于广义不等式系统的稳定性研究的原创性文献[3-4]中提出. 在过去的二十多年里，性质(2)及其它与其密切相关的性质(例如度量正则性、似-Lipschitz 性、线性开性和下半连续性等)引起了广泛的关注，这主要是因为这些性质在优化理论的许多领域中都有广泛的应用. 值得注意的是，上述关于集值隐函数的(局部)度量正则性、似-Lipschitz 性、非空性和下半连续性的结果，几乎都是在有限维空间或者 Asplund 空间.

最近，文献[5]利用 Clarke 上导数，在一般的 Banach 空间中建立集值隐函数的度量正则性和似-Lipschitz 性成立的充分条件. 通过将文献[5]中的上导数条件削弱，文献[6]利用 Clarke 上导数进一步在一般的 Banach 空间中研究集值隐函数定理，给出集值隐函数的(局部)度量正则性、似-Lipschitz 性、非空性和下半连续性成立的充分条件. 需要注意的是，文献[6]中的 $J_\delta(y)$ 的定义为

$$J_\delta(y):=\{y^*\in S_{Y^*} \mid \|y\|-\langle y^*, y\rangle\leqslant\delta\}$$

---

① 收稿日期：2016-01-06

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11301254)；中国博士后科学基金资助项目(2014M551312)；河南省高等学校重点科研项目(15A110036).

作者简介：李建华(1979-)，女，河南三门峡人，讲师，主要从事算法与控制论的研究.

通信作者：杨明歌，副教授.

与文献[7]中的$J_\delta(y)$的定义相同. 然而，$J_\delta(y)$的另一种定义是

$$J_\delta(y):=\{y^* \in S_{Y^*} \mid \mathrm{dist}(y^*, J(y)) < \delta\}$$

即文献[8]中的$J_\delta(y)$的定义. 因此，提出下面的问题：如果采用$J_\delta(y)$的后一种定义，文献[6]中的结果还成立吗？答案是肯定的. 本文利用Clarke上导数，在一般Banach空间中比较弱的条件下研究集值隐函数的稳定性. 这里的上导数条件与文献[6]中的不同，比文献[5]的弱.

1 预备知识

除非特别说明，本文涉及的空间均为Banach空间. 设A是X的闭子集，$a \in A$，记$T_c(a;A)$为A在a的Clarke切锥，即$v \in T_c(a;A)$当且仅当对A中任意收敛序列$\{a_n\}$和$(0,+\infty)$中任意收敛序列$\{t_n\}$，若$a_n \to a$，$t_n \to 0$，则存在X中的序列$\{v_n\}$，使得$v_n \to v$且对任意n有$a_n + t_n v_n \in A$. 记$N_c(a;A)$为A在a的Clarke正规锥，即

$$N_c(a;A):=\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, h\rangle \leqslant 0,\ \forall h \in T_c(a;A)\}$$

设$F: X \rightrightarrows Y$是拓扑空间X和Y之间的集值映射. 任给$(x,y) \in \mathrm{gph}\, F$，$F$在$(x,y)$的Clarke上导数$D_c^* F(x,y)$定义为：

$$D_c^* F(x,y)(y^*):=\{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N_c((x,y);\mathrm{gph}\, F)\} \qquad \forall y^* \in Y^*$$

设$\varphi: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$是广义实值函数，$x \in \mathrm{dom}\,\varphi$，$h \in X$，令$\varphi^\uparrow(x,h)$表示Rockafellar引入的广义方向导数[9]，即

$$\varphi^\uparrow(x,h):=\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{z \xrightarrow{\varphi} x} \sup_{t \downarrow 0} \inf_{w \in h+\varepsilon B_X} \frac{\varphi(z+tw)-\varphi(z)}{t}$$

其中$z \xrightarrow{\varphi} x$表示$z \to x$且$\varphi(z) \to \varphi(x)$. 令$\partial_c\varphi(x)$表示$\varphi$在$x$的Clarke-Rockafellar次微分，即

$$\partial_c\varphi(x):=\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, h\rangle \leqslant \varphi^\uparrow(x,h),\ \forall h \in X\}$$

令J表示Banach空间Y的正规对偶映射，即

$$J(y):=\{y^* \in S_{Y^*} \mid \langle y^*, y\rangle = \|y\|\} \qquad \forall y \in Y\backslash\{0\}$$

则

$$J(y)=\partial_c \|\cdot\|(y) \qquad \forall y \in Y\backslash\{0\}$$

引理1[10] 设(X,d)是完备度量空间，$\varphi: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$是正常下有界的下半连续函数. 令$\varepsilon > 0$，$x_0 \in X$满足

$$\varphi(x_0) \leqslant \inf_X \varphi + \varepsilon$$

则对任意$\lambda > 0$，存在$\bar{x} \in X$，满足

(a) $\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(x_0)$，

(b) $d(\bar{x}, x_0) \leqslant \lambda$，

(c) $\varphi(x) + (\varepsilon/\lambda)d(x,\bar{x}) > \varphi(\bar{x})$，$\forall x \neq \bar{x}$.

引理2[9] 设X是Banach空间，$\varphi_1, \varphi_2: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$是正常下半连续函数，$x \in \mathrm{dom}\,\varphi_1 \cap \mathrm{dom}\,\varphi_2$是$\varphi_1 + \varphi_2$的局部极小值点，$\varphi_1$或$\varphi_2$在$x$是局部Lipschitz的，则

$$0 \in \partial_c\varphi_1(x) + \partial_c\varphi_2(x)$$

2 集值隐函数的稳定性

定理1 设X和Y是Banach空间，P是拓扑空间，$F: X \times P \rightrightarrows Y$是集值映射，$G: P \rightrightarrows X$是由(1)式定义的集值隐函数，$(\bar{x}, \bar{p}) \in X \times P$且$0 \in F(\bar{x}, \bar{p})$. 记$F_p(\cdot):=F(\cdot, p)$. 若存在常数$r > 0$满足

(i) 任意的$p \in B(\bar{p}, r)$，集值映射F_p是闭的；

(ii) 任意的$\delta > 0$，

$$k_r = \lim_{\delta \downarrow 0} \inf\{\|x^*\| \mid x^* \in D_c^* F_p(x,y)(y^*)\ 且\ p \in B(\bar{p}, r),\ x \in B(\bar{x}, r)\backslash G(p),$$

$$y \in \prod_{\delta}(0; F_p(x)) \cap B(0, r), y^* \in J_{\delta}(y)\} > 0$$

其中：

$$\prod_{\delta}(0; F_p(x)) := \{y \in F_p(x) \mid \|y\| < \mathrm{dist}(0, F_p(x)) + \delta\}$$
$$J_{\delta}(y) := \{y^* \in S_{Y^*} \mid \mathrm{dist}(y^*, J(y)) < \delta\}$$

则 G 在 $(\bar{x}, \bar{p})$ 周围是局部度量正则的，且系数是 $\frac{1}{k_r}$. 事实上，任意的 $\mu \in (0, r)$，任意的 $(x, p) \in B\left(\bar{x}, r - \frac{\mu}{k_r}\right) \times B(\bar{p}, r)$，若 $\mathrm{dist}(0, F(x, p)) < \mu$，则

$$\mathrm{dist}(x, G(p)) \leqslant \frac{1}{k_r}\mathrm{dist}(0, F(x, p)) \tag{3}$$

证　假设条件(i)和(ii)成立，利用反证法可得(3)式中的不等式不成立，即存在 $x_0 \in B\left(\bar{x}, r - \frac{\mu}{k_r}\right)$ 和 $p_0 \in B(\bar{p}, r)$ 同时满足

$$\mathrm{dist}(0, F(x_0, p_0)) < \mu$$
$$\mathrm{dist}(x_0, G(p_0)) > \frac{\mathrm{dist}(0, F(x_0, p_0))}{k_r}$$

从而 $x_0 \notin G(p_0)$，即 $0 \notin F(x_0, p_0)$. 由条件(i)易知，

$$\mathrm{dist}(0, F(x_0, p_0)) > 0$$

定义 $\varepsilon := \mathrm{dist}(0, F(x_0, p_0)) \in (0, \mu)$ 和 $\lambda := \varepsilon k^{-1}$，其中 $k \in \left(\frac{\varepsilon k_r}{\mu}, k_r\right)$，且

$$\mathrm{dist}(x_0, G(p_0)) > \frac{\mathrm{dist}(0, F(x_0, p_0))}{k} = \lambda \tag{4}$$

由距离函数的定义，任意的 $\alpha \in (0, r - \mu)$，存在 $y_0 \in F(x_0, p_0)$ 使得

$$\|y_0\| < \mathrm{dist}(0, F(x_0, p_0)) + \alpha = \varepsilon + \alpha < \mu + \alpha < r \tag{5}$$

定义函数 $\varphi: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 如下

$$\varphi(x, y) := \|y\| + \delta_{\mathrm{gph}\, F_{p_0}}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in X \times Y$$

由条件(i)可知，φ 在 $X \times Y$ 上是下半连续的. 从(5)式可知

$$\varphi(x_0, y_0) = \|y_0\| < \varepsilon + \alpha + \inf_{(x, y) \in X \times Y} \varphi(x, y)$$

任给 $\eta \in \left(0, \frac{\lambda}{\varepsilon + \alpha}\right)$，在乘积空间 $X \times Y$ 中定义范数 $\|(x, y)\|_{\eta} := \|x\| + \eta\|y\|$，应用引理 1 中的 Ekeland 变分原理，存在 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ 满足

$$\varphi(\hat{x}, \hat{y}) \leqslant \varphi(x_0, y_0), \ \|(\hat{x}, \hat{y}) - (x_0, y_0)\|_{\eta} \leqslant \lambda$$

和

$$\varphi(\hat{x}, \hat{y}) \leqslant \varphi(x, y) + \frac{\varepsilon + \alpha}{\lambda}\|(\hat{x}, \hat{y}) - (x, y)\|_{\eta} \qquad \forall (x, y) \in X \times Y$$

这意味着 $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathrm{gph}\, F_{p_0}$，

$$\|\hat{y}\| \leqslant \|y_0\| < r, \ \|\hat{x} - x_0\| + \eta\|\hat{y} - y_0\| \leqslant \lambda \tag{6}$$

且

$$\|\hat{y}\| \leqslant \|y\| + \frac{\varepsilon + \alpha}{\lambda}(\|x - \hat{x}\| + \eta\|y - \hat{y}\|) + \delta_{\mathrm{gph}\, F_{p_0}}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in X \times Y \tag{7}$$

由(4)式和(6)式得

$$\|\hat{x} - x_0\| \leqslant \lambda < \mathrm{dist}(x_0, G(p_0))$$

从而 $0 \notin F(\hat{x}, p_0)$ 且 $\hat{y} \neq 0$. 进一步，由(6)式和 k 的定义可知，

$$\|\hat{x}-\bar{x}\| \leqslant \|\hat{x}-x_0\| + \|x_0-\bar{x}\| \leqslant \lambda + r - \mu k_r^{-1} = \varepsilon k^{-1} + r - \mu k_r^{-1} < r$$

定义函数 $\psi: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 为

$$\psi(x, y) := \|y\| + \frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}(\|x-\hat{x}\| + \eta\|y-\hat{y}\|) \qquad \forall (x, y) \in X \times Y$$

由(7)式得$(\hat{x}, \hat{y})$是函数 $\psi + \delta_{\mathrm{gph}\, F_{p_0}}$ 在 $X \times Y$ 上的极小点. 注意到 $\hat{y} \neq 0$，由引理 2 得

$$(0, 0) \in \partial_c \psi(\hat{x}, \hat{y}) + \partial_c \delta_{\mathrm{gph}\, F_{p_0}}(\hat{x}, \hat{y}) = \{0\} \times J(\hat{y}) + \frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}(B_{X^*} \times \eta B_{Y^*}) + N_c((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph} F_{p_0})$$

故存在 $y_1^* \in J(\hat{y})$ 和$(x_2^*, y_2^*) \in B_{X^*} \times B_{Y^*}$ 使得

$$\left(\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^*, -y_1^* - \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right) \in N_c((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph}\, F_{p_0})$$

显然，

$$\left\| y_1^* + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\| \geqslant 1 - \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|y_2^*\| \geqslant 1 - \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda} > 0$$

令

$$\tilde{x}^* := \frac{\dfrac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^*}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|}$$

$$\tilde{y}^* := \frac{y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|}$$

则

$$(\tilde{x}^*, -\tilde{y}^*) \in N_c((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph}\, F_{p_0})$$

从而

$$\tilde{x}^* \in D_c^* F_{p_0}(\hat{x}, \hat{y})(\tilde{y}^*)$$

对任意的 $y \in F_{p_0}(\hat{x})$，由(7)式可得

$$\|\hat{y}\| \leqslant \|y\| + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|y-\hat{y}\| \leqslant \left(1 + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\right)\|y\| + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|\hat{y}\|$$

从而

$$\|\hat{y}\| \leqslant \left(1 + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\right)\mathrm{dist}(0, F_{p_0}(\hat{x})) + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|\hat{y}\|$$

故

$$\|\hat{y}\| \leqslant \mathrm{dist}(0, F_{p_0}(\hat{x})) + \frac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda - (\varepsilon+\alpha)\eta}\mathrm{dist}(0, F_{p_0}(\hat{x})) \tag{8}$$

进一步可以得到

$$\|\tilde{x}^*\| = \frac{\left\| \dfrac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^* \right\|}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|} \leqslant \frac{(\varepsilon+\alpha)k}{\varepsilon}\left[1 - \frac{(\varepsilon+\alpha)k\eta}{\varepsilon}\right]^{-1} \tag{9}$$

和

$$\|\tilde{y}^* - y_1^*\| = \left\| \frac{y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*}{\left\| y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^* \right\|} - y_1^* \right\| =$$

$$\frac{\left\|\left(1-\left\|y_1^*+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|\right)y_1^*+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|}{\left\|y_1^*+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|}\leqslant$$

$$\frac{\left|1-\left\|y_1^*+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|\right|+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}{1-\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}\leqslant$$

$$\frac{\frac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}{1-\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}=\frac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda-(\varepsilon+\alpha)\eta} \tag{10}$$

对任意的 $\delta>0$，由(8)，(9)，(10) 式可得

$$\hat{y}\in\prod\nolimits_{\delta}(0;F_{p_0}(\hat{x}))，\ \|\tilde{x}^*\|<k+\delta，\ \tilde{y}^*\in J_\delta(\hat{y})$$

其中 α，η 充分小. 在上式中令 $\delta\downarrow 0$ 得 $\|\tilde{x}^*\|\leqslant k<k_r$，这与条件 (ii) 矛盾.

注 1　定理 1 说明：若文献[6] 定理 3 中的 $J_\delta(y)$ 定义为

$$J_\delta(y):=\{y^*\in S_{Y^*}\mid \mathrm{dist}(y^*,J(y))<\delta\}$$

则结论仍然成立. 尽管定理 1 中的集值隐函数 G 在$(\bar{x},\bar{p})$ 周围仍然是局部度量正则的，但是 μ 的范围以及 $\bar{x}$ 和 $\bar{p}$ 的邻域的构造与文献[6] 定理 3 中的不同. 进一步，定理 1 所使用的证明方法与文献[6] 定理 3 中的不同. 定理 1 使用的是反证法，而文献[6] 定理 3 正面证明相关结论.

注 2　定理 1 在更弱的上导数条件下得到了与文献[5] 定理 3.1 同样的结果，且证明方法比文献[5] 定理 3.1 简单.

注 3　文献[7] 定理 2.1 利用 Fréchet 上导数在 Asplund 空间建立了类似的结果，其中 $J_\delta(y)$ 的定义与定理 1 中的不同. 值得注意的是，文献[7] 定理 2.1 中 μ 的范围是$(0,\min\{r,rk_r\})$. 显然，$(0,\min\{r,rk_r\})$ 包含在区间$(0,r)$，而$(0,r)$ 正是定理 1 中 μ 的范围.

推论 1　假设定理 1 的所有条件满足，且满足下列条件

(iii) F 在$(\bar{x},\bar{p})$ 是下半连续的.

则 G 在$(\bar{x},\bar{p})$ 周围是度量正则的且系数为$\frac{1}{k_r}$. 事实上，存在常数 $\rho>0$ 使得对任意的$(x,p)\in B(\bar{x},\rho)\times B(\bar{p},\rho)$ 有

$$\mathrm{dist}(x,G(p))\leqslant\frac{1}{k_r}\mathrm{dist}(0,F(x,p))$$

证　由定理 1，任意的 $\mu\in(0,r)$，任意的$(x,p)\in B\left(\bar{x},r-\frac{\mu}{k_r}\right)\times B(\bar{p},r)$ 且 $\mathrm{dist}(0,F(x,p))<\mu$，有

$$\mathrm{dist}(x,G(p))\leqslant\frac{1}{k_r}\mathrm{dist}(0,F(x,p)) \tag{11}$$

成立. 显然，$0\in F(\bar{x},\bar{p})\cap\mathrm{int}\,B_\mu(0)$. 由条件 (iii)，存在常数 $\rho_1>0$ 使得

$$F(x,p)\cap\mathrm{int}\,B_\mu(0)\neq\varnothing,\ \forall(x,p)\in B(\bar{x},\rho_1)\times B(\bar{p},\rho_1)$$

故

$$\mathrm{dist}(0,F(x,p))<\mu,\ \forall(x,p)\in B(\bar{x},\rho_1)\times B(\bar{p},\rho_1) \tag{12}$$

任取 $\rho\in\left(0,\min\left\{\rho_1,r-\frac{\mu}{k_r}\right\}\right)$，则 ρ 满足推论 1 的结论. 事实上，任意的$(x,p)\in B(\bar{x},\rho)\times B(\bar{p},\rho)$，有$(x,p)\in B(\bar{x},\rho_1)\times B(\bar{p},\rho_1)$，从而由(12) 式得 $\mathrm{dist}(0,F(x,p))<\mu$. 又

$$(x,p)\in B\left(\bar{x},r-\frac{\mu}{k_r}\right)\times B(\bar{p},r)$$

故由(11)式得

$$\operatorname{dist}(x,G(p))\leqslant\frac{1}{k_r}\operatorname{dist}(0,F(x,p))$$

推论 2 假设定理1的所有条件满足,P 是赋范空间的一个子集,且满足下列条件

(iv) 存在常数 $l>0$ 使得

$$F(x,p')\cap rB_Y\subset F(x,p)+l\,\|p'-p\|\,B_Y,\ \forall x\in B(\bar{x},r),\ \forall p,p'\in B(\bar{p},r)$$

则 G 在 $(\bar{p},\bar{x})$ 是似-Lipschitz 的且系数为 $\frac{l}{k_r}$.

证 任取 $\mu\in(0,r)$,对任意的 $(x,p)\in B\left(\bar{x},r-\frac{\mu}{k_r}\right)\times B(\bar{p},r)$ 且 $\operatorname{dist}(0,F(x,p))<\mu$,由定理1得

$$\operatorname{dist}(x,G(p))\leqslant\frac{1}{k_r}\operatorname{dist}(0,F(x,p))\tag{13}$$

任选 $\rho\in\left(0,r-\frac{\mu}{k_r}\right)$ 且 $2l\rho<\mu$,则

$$G(p')\cap B(\bar{x},\rho)\subset G(p)+\frac{l}{k_r}\|p'-p\|\,B_X,\ \forall p',p\in B(\bar{p},\rho)\tag{14}$$

事实上,任给 $p',p\in B(\bar{p},\rho)$ 和任意的 $x\in G(p')\cap B(\bar{x},\rho)$,则 $0\in F(x,p')$,从而由条件(iv)得 $0\in F(x,p)+l\,\|p'-p\|\,B_Y$. 因此,

$$\operatorname{dist}(0,F(x,p))\leqslant l\,\|p'-p\|\leqslant l(\|p'-\bar{p}\|+\|\bar{p}-p\|)\leqslant 2l\rho<\mu\tag{15}$$

由(13)和(15)式,可得

$$\operatorname{dist}(x,G(p))\leqslant\frac{1}{k_r}\operatorname{dist}(0,F(x,p))\leqslant\frac{l}{k_r}\|p'-p\|$$

故

$$x\in G(p)+\frac{l}{k_r}\|p'-p\|\,B_X$$

即(14)式成立. 因此,G 在 $(\bar{p},\bar{x})$ 是似-Lipschitz 的,且系数为 $\frac{l}{k_r}$.

定理 2 假设定理1的所有条件满足,且满足下列条件

(v) 任意的 $(x,p)\in B(\bar{x},r)\times B(\bar{p},r)$,集值映射 $F(x,\cdot)$ 在 p 是下半连续的.

则存在常数 $s\in(0,r)$ 使得由

$$\widetilde{G}(p):=G(p)\cap\operatorname{int}B(\bar{x},r)$$

定义的集值映射 $\widetilde{G}:P\rightrightarrows X$ 在 $B(\bar{p},s)$ 上是非空和下半连续的.

证 因为 $0\in F(\bar{x},\bar{p})$,由条件(v),存在常数 $\rho>0$ 使得

$$F(\bar{x},p)\cap\operatorname{int}B(0,\min\{r,rk_r\})\neq\varnothing\qquad\forall p\in B(\bar{p},\rho)$$

故

$$\operatorname{dist}(0,F(\bar{x},p))<\min\{r,rk_r\}\qquad\forall p\in B(\bar{p},\rho)$$

任取 $s\in(0,\min\{r,\rho\})$,下面证明 s 满足定理2的结论.

(a) 任意的 $p\in B(\bar{p},s)$,下面证明 $\widetilde{G}(p)$ 是非空的. 定义函数 $\varphi:X\times Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ 为

$$\varphi(x,y):=\|y\|+\delta_{\operatorname{gph}F_p}(x,y),\ \forall(x,y)\in X\times Y$$

根据条件(i),φ 在 $X\times Y$ 上是下半连续的. 若 $\varphi(\bar{x},0)=0$,则 $0\in F_p(\bar{x})$,即 $\bar{x}\in G(p)$,从而 $\bar{x}\in G(p)\cap\operatorname{int}B(\bar{x},r)$,即 $\widetilde{G}(p)\neq\varnothing$. 若 $\varphi(\bar{x},0)\neq0$,则 $0\notin F_p(\bar{x})$,从而 $\operatorname{dist}(0,F(\bar{x},p))>0$. 令 $\varepsilon:=\operatorname{dist}(0,F(\bar{x},$

$p)$)，则 $0<\varepsilon<\min\{r, rk_r\}\leqslant r$.

对任意的 $\alpha\in(0, r-\varepsilon)$ 且 $\frac{\varepsilon+\alpha}{r}<k_r$，由距离函数的定义，存在 $\bar{y}\in F_p(\bar{x})$ 使得

$$\|\bar{y}\|<\varepsilon+\alpha<r$$

令

$$\beta:=\varphi(\bar{x}, \bar{y})=\|\bar{y}\|$$

对任意的 $t\in\left(\frac{\varepsilon+\alpha}{r}, k_r\right)$，易知

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y})=t\cdot\frac{\beta}{t}$$

显然，

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y})\leqslant\inf_{(x, y)\in X\times Y}\varphi(x, y)+t\cdot\frac{\beta}{t}$$

在乘积空间 $X\times Y$ 中关于某个 $0<\eta<\frac{1}{k_r}$，应用引理 1 中的 Ekeland 变分原理，其中乘积空间的范数为

$$\|(x, y)\|_\eta:=\|x\|+\eta\|y\|$$

则存在$(\hat{x}, \hat{y})\in X\times Y$ 使得

$$\varphi(\hat{x}, \hat{y})\leqslant\varphi(\bar{x}, \bar{y})\qquad\|(\hat{x}, \hat{y})-(\bar{x}, \bar{y})\|_\eta\leqslant\frac{\beta}{t}$$

和

$$\varphi(\hat{x}, \hat{y})\leqslant\varphi(x, y)+t\|(x, y)-(\hat{x}, \hat{y})\|_\eta\qquad\forall(x, y)\in X\times Y$$

这意味着$(\hat{x}, \hat{y})\in\operatorname{gph}F_p$，

$$\|\hat{y}\|\leqslant\|\bar{y}\|\qquad\|\hat{x}-\bar{x}\|+\eta\|\hat{y}-\bar{y}\|\leqslant\frac{\beta}{t}$$

和

$$\|\hat{y}\|\leqslant\|y\|+t(\|x-\hat{x}\|+\eta\|y-\hat{y}\|)+\delta_{\operatorname{gph}F_p}(x, y)\qquad\forall(x, y)\in X\times Y\tag{16}$$

进一步，

$$\|\hat{x}-\bar{x}\|\leqslant\frac{\beta}{t}<\frac{\varepsilon+\alpha}{t}<r\qquad\|\hat{y}\|\leqslant\|\bar{y}\|<r$$

即

$$\hat{x}\in\operatorname{int}B(\bar{x}, r)\subset B(\bar{x}, r)\qquad\hat{y}\in\operatorname{int}B(0, r)\subset B(0, r)\tag{17}$$

现在证明 $0\in F_p(\hat{x})$. 假设 $0\notin F_p(\hat{x})$，则 $\hat{y}\neq 0$. 定义函数 $\psi: X\times Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ 为

$$\psi(x, y):=\|y\|+t(\|x-\hat{x}\|+\eta\|y-\hat{y}\|)\qquad\forall(x, y)\in X\times Y$$

由(16)式得$(\hat{x}, \hat{y})$是函数 $\psi+\delta_{\operatorname{gph}F_p}$ 在 $X\times Y$ 上的极小值. 注意到 $\hat{y}\neq 0$，由引理 2 得

$$(0, 0)\in\partial_c\psi(\hat{x}, \hat{y})+\partial_c\delta_{\operatorname{gph}F_p}(\hat{x}, \hat{y})=\{0\}\times J(\hat{y})+t(B_{X^*}\times\eta B_{Y^*})+N_c((\hat{x}, \hat{y}); \operatorname{gph}F_p)$$

故存在 $y_1^*\in J(\hat{y})$ 和$(x_2^*, y_2^*)\in B_{X^*}\times B_{Y^*}$ 使得

$$(tx_2^*, -y_1^*-t\eta y_2^*)\in N_c((\hat{x}, \hat{y}); \operatorname{gph}F_p)$$

显然，

$$\|y_1^*+t\eta y_2^*\|\geqslant 1-t\eta\|y_2^*\|\geqslant 1-t\eta>0$$

令

$$\tilde{x}^*:=\frac{tx_2^*}{\|y_1^*+t\eta y_2^*\|}\qquad\tilde{y}^*:=\frac{y_1^*+t\eta y_2^*}{\|y_1^*+t\eta y_2^*\|}$$

则

$$(\tilde{x}^*, -\tilde{y}^*) \in N_c((\hat{x}, \hat{y}); \operatorname{gph} F_p)$$

故

$$\tilde{x}^* \in D_c^* F_p(\hat{x}, \hat{y})(\tilde{y}^*)$$

对任意的 $y \in F_p(\hat{x})$，由(16)式可得

$$\|\hat{y}\| \leqslant \|y\| + t\eta\|y - \hat{y}\| \leqslant (1+t\eta)\|y\| + t\eta\|\hat{y}\|$$

从而

$$\|\hat{y}\| \leqslant \frac{1+t\eta}{1-t\eta}\|y\| \qquad \forall y \in F_p(\hat{x})$$

因此，

$$\|\hat{y}\| \leqslant \frac{1+t\eta}{1-t\eta}\operatorname{dist}(0, F_p(\hat{x})) = \operatorname{dist}(0, F_p(\hat{x})) + \frac{2t\eta}{1-t\eta}\operatorname{dist}(0, F_p(\hat{x})) \tag{18}$$

进一步可得

$$\|\tilde{x}^*\| = \frac{\|tx_2^*\|}{\|y_1^* + t\eta y_2^*\|} \leqslant \frac{t}{1-t\eta} \tag{19}$$

和

$$\begin{aligned}\|\tilde{y}^* - y_1^*\| &= \left\| \frac{y_1^* + t\eta y_2^* - y_1^*\|y_1^* + t\eta y_2^*\|}{\|y_1^* + t\eta y_2^*\|} \right\| = \\ &\frac{\left\| \left(1 - \left\| y_1^* + t\eta y_2^* \right\|\right) y_1^* + t\eta y_2^* \right\|}{\left\| y_1^* + t\eta y_2^* \right\|} \leqslant \\ &\frac{\left| 1 - \left\| y_1^* + t\eta y_2^* \right\| \right| + t\eta}{1-t\eta} \leqslant \frac{2t\eta}{1-t\eta}\end{aligned} \tag{20}$$

对任意的 $\delta > 0$，只要 η 选取得足够小，由(18)，(19)和(20)式可得

$$\hat{y} \in \prod\nolimits_{\delta}(0; F_p(\hat{x})) \qquad \|\tilde{x}^*\| < t + \delta \qquad \tilde{y}^* \in J_\delta(\hat{y})$$

令 $\delta \downarrow 0$，可得 $\|\tilde{x}^*\| \leqslant t < k_r$，这与条件(ii)矛盾，故 $0 \in F_p(\hat{x})$，即 $\hat{x} \in G(p)$. 由(17)式可知，$\hat{x} \in \tilde{G}(p)$，故 $\tilde{G}(p) \neq \varnothing$.

(b) 对任意的 $p \in B(\bar{p}, s)$，下面证明 $\tilde{G}$ 在 p 是下半连续的. 只需证明：对任意的 $x \in \tilde{G}(p)$ 和任意的 $\tilde{\varepsilon} > 0$，存在常数 $t > 0$ 满足

$$\tilde{G}(p') \cap \operatorname{int} B(x, \tilde{\varepsilon}) \neq \varnothing \qquad \forall p' \in B(p, t)$$

因为 $x \in \tilde{G}(p)$，所以 $0 \in F(x, p)$，且 $x \in \operatorname{int} B(\bar{x}, r)$. 任取 $\gamma \in (0, \tilde{\varepsilon})$ 满足 $B(x, \gamma) \subset B(\bar{x}, r)$ 和 $B(p, \gamma) \subset B(\bar{p}, r)$. 用 (x, p) 替换 $(\bar{x}, \bar{p})$，用 γ 替换 r，分别用 $B(x, \gamma)$，$B(0, \gamma)$ 和 $B(p, \gamma)$ 替换 $B(\bar{x}, r)$，$B(0, r)$ 和 $B(\bar{p}, r)$，类似上面的证明，存在常数 $t \in (0, \gamma)$ 使得

$$G(p') \cap \operatorname{int} B(x, \gamma) \neq \varnothing \qquad \forall p' \in B(p, t) \tag{21}$$

因为

$$\operatorname{int} B(x, \gamma) \subset \operatorname{int} B(\bar{x}, r) \cap \operatorname{int} B(x, \tilde{\varepsilon})$$

由(21)式得

$$G(p') \cap \operatorname{int} B(\bar{x}, r) \cap \operatorname{int} B(x, \tilde{\varepsilon}) \neq \varnothing \qquad \forall p' \in B(p, t)$$

即

$$\tilde{G}(p') \cap \operatorname{int} B(x, \varepsilon) \neq \varnothing \qquad \forall p' \in B(p, t)$$

注 4 由定理2可知：若文献[6]定理9中的 $J_\delta(y)$ 定义为

$$J_{\delta}(y):=\{y^{*}\in S_{Y^{*}}\mid \operatorname{dist}(y^{*},J(y))<\delta\}$$

则结论仍然成立.

参考文献：

[1] CHIEUN H，YAO J C，YEN N D. Relationships between Robinson Metric Regularity and Lipschitz-Like Behavior of Implicit Multifunctions [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods and Applications，2010，72(9－10)：3594－3601.

[2] YEN N D，YAO J C. Point-Based Sufficient Conditions for Metric Regularity of Implicit Multifunctions [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods and Applications，2009，70(7)：2806－2815.

[3] ROBINSON S M. Stability Theory for Systems of Inequalities，I. Linear Systems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，1975，12(12)：754－769.

[4] ROBINSON S M. Stability Theory for Systems of Inequalities，II. Differentiable Nonlinear Systems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，1976，13(13)：497－513.

[5] HUY N Q，KIM D S，NINH K V. Stability of Implicit Multifunctions in Banach Spaces [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2012，155(2)：558－571.

[6] YANG M G，XU Y F. Implicit Multifunction Theorems in Banach Spaces [J]. Journal of Applied Mathematics，2014，2014：1－7.

[7] NGHIA T T A. A Note on Implicit Multifunction Theorems [J]. Optimization Letters，2014，8(1)：329－341.

[8] ZHENG X Y，NG K F. Metric Subregularity and Calmness for Nonconvex Generalized Equations in Banach Spaces [J]. SIAM Journal on Optimization，2010，20(5)：2119－2136.

[9] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis [M]. New York：Wiley，1983.

[10] MORDUKHOVICH B S. Variational Analysis and Generalized Differentiation，Vol. I：Basic Theory [M]. Berlin：Springer，2006.

Local Metric Regularity and Lower Semicontinuity of Implicit Multifunction in Banach Spaces

LI Jian-hua[1]，　YANG Ming-ge[2]

1. College of Mathematics Science，Luoyang Normal University，Luoyang Henan 471934，China；

2. School of Management，Shanghai University，Shanghai 200444，China

Abstract：In this paper，we mainly study the stability of implicit multifunction in terms of Clarke coderivative in general Banach spaces. We present new conditions for the local metric regularity of implicit multifunction. We also give sufficient conditions for the metric regularity，the Lipschitz-like property，the nonmptiness and the lower semicontinuity of implicit multifunction.

Key words：Clarke subdifferential；Clarke coderivative；implicit multifunction；local metric regularity

责任编辑　张　枸