DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.09.019

H-R 模型极端顺序统计量密度函数的收敛性①

鲁盈吟， 彭作祥

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 证明了在 Hüsler-Reiss 条件下，二维高斯序列极大值分布密度函数的收敛性，进而通过细化 Hüsler-Reiss 条件建立了此密度函数的高阶展开.

关 键 词： 二维高斯三角阵；密度函数收敛；高阶展开；Hüsler-Reiss 条件

中图分类号： O211.4 **文献标志码：** A **文章编号：** 1673-9868(2016)09-0123-07

设$\{(X_{ni}, Y_{ni}), 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$为二维高斯随机向量三角阵. 给定 n，假设$(X_{n1}, Y_{n1}), (X_{n2}, Y_{n2}), \cdots, (X_{nn}, Y_{nn})$独立同分布，且 $\boldsymbol{E}X_{ni} = \boldsymbol{E}Y_{ni} = 0$，$\boldsymbol{E}X_{ni}^2 = \boldsymbol{E}Y_{ni}^2 = 1$，$\rho_n$ 和 $F_{\rho_n}(x, y)$ 分别为 X_{ni} 与 Y_{ni} 的相关系数和联合分布函数. 令 $M_n = (M_{n1}, M_{n2})$ 为第 n 行的最大值，其中

$$M_{n1} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_{ni}$$

$$M_{n2} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_{ni}, \quad n \geqslant 1$$

关于 M_n 的极限分布，在如下 Hüsler-Reiss 条件

$$\lambda_n = \left(\frac{b_n^2(1-\rho_n)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \to \lambda \in (0, \infty) \qquad n \to \infty \tag{1}$$

成立时，文献[1]得到

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left(M_{n1} \leqslant b_n + \frac{x}{b_n}, M_{n2} \leqslant b_n + \frac{y}{b_n}\right) = H_\lambda(x, y) \tag{2}$$

其中

$$H_\lambda(x, y) = \exp\left(-\Phi\left(\lambda + \frac{x-y}{2\lambda}\right)\mathrm{e}^{-y} - \Phi\left(\lambda + \frac{y-x}{2\lambda}\right)\mathrm{e}^{-x}\right) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

且规范常数 b_n 满足

$$n(1-\Phi(b_n)) = 1 \tag{3}$$

本文称满足条件(1)的二维高斯三角阵为 Hüsler-Reiss 模型. 对 Hüsler-Reiss 模型，文献[2]和文献[3]研究了其最大值与最小值的联合渐近分布. 文献[4]将条件(1)细化为：

$$\lim_{n\to\infty} b_n^2(\lambda - \lambda_n) = \alpha \in \mathbb{R} \tag{4}$$

① 收稿日期：2015-05-08
基金项目：国家自然科学基金项目(11171275)；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(XDJK2016E117)；重庆市研究生科研创新项目(CYS16046).
作者简介：鲁盈吟(1993-)，重庆涪陵人，硕士研究生，主要从事极值统计分析的研究.
通信作者：彭作祥，教授.

$$\lim_{n\to\infty} b_n^2\,[b_n^2(\lambda-\lambda_n)-\alpha]=\beta\in\mathbb{R} \tag{5}$$

分别得到了 Hüsler-Reiss 模型最大值分布的二阶与三阶渐近展式. 文献[5]和文献[6]研究了二维椭球阵在 Hüsler-Reiss 模型中的相关性质. 文献[7]建立了(2)式的一致收敛速度. Hüsler-Reiss 模型 Copula 形式极值分布收敛性的研究可参见文献[8-9]. 文献[10-11]分别研究了极值分布和渐近展开.

本文重点研究 Hüsler-Reiss 模型规范化最大值的密度函数之收敛性及渐近展开. 为行文方便, 记 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数, $\varphi(x)$ 为其相应的密度函数,

$$u_n(s)=b_n+\frac{s}{b_n}\qquad s\in\mathbb{R}$$

其中规范常数 b_n 满足(3)式. 因规范化最大值 M_n 的联合分布函数为 $F_{\rho_n}^n(u_n(x),u_n(y))$, 易知相应的联合密度函数为

$$f_{\rho_n}(x,y)=\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho_n u_n(y)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)\Phi\left(\frac{u_n(y)-\rho_n u_n(x)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)F_{\rho_n}^{n-2}(u_n(x),u_n(y))\,\mathrm{e}^{-(x+y)-\frac{x^2+y^2}{2b_n^2}}+$$
$$\frac{1}{b_n\sqrt{1-\rho_n^2}}\varphi\left(\frac{u_n(y)-\rho_n u_n(x)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)F_{\rho_n}^{n-1}(u_n(x),u_n(y))\,\mathrm{e}^{-x-\frac{x^2}{2b_n^2}} \tag{6}$$

记 $H_\lambda(x,y)$ 的联合密度函数为

$$h_\lambda(x,y)=\mathrm{e}^{-(x+y)}\Phi\left(\lambda+\frac{x-y}{2\lambda}\right)\Phi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)H_\lambda(x,y)+\frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-x}\varphi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)H_\lambda(x,y) \tag{7}$$

为方便, 记

$$\Delta(f_{\rho_n},h_\lambda;x,y)=f_{\rho_n}(x,y)-h_\lambda(x,y)\qquad x,y\in\mathbb{R}$$

1 密度函数的收敛

定理 1 若高斯三角阵 $\{(X_{ni},Y_{ni}),1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$ 满足(1)式, 则对所有的 $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_{\rho_n}(x,y)=h_\lambda(x,y) \tag{8}$$

证 由(6)式, 把 $f_{\rho_n}(x,y)$ 分解如下:

$$f_{\rho_n}(x,y)=f_{\rho_n,1}(x,y)+f_{\rho_n,2}(x,y) \tag{9}$$

其中:

$$f_{\rho_n,1}(x,y)=\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho_n u_n(y)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)\Phi\left(\frac{u_n(y)-\rho_n u_n(x)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)F_{\rho_n}^{n-2}(u_n(x),u_n(y))\,\mathrm{e}^{-(x+y)-\frac{x^2+y^2}{2b_n^2}}$$

$$f_{\rho_n,2}(x,y)=\frac{1}{b_n\sqrt{1-\rho_n^2}}\varphi\left(\frac{u_n(y)-\rho_n u_n(x)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)F_{\rho_n}^{n-1}(u_n(x),u_n(y))\,\mathrm{e}^{-x-\frac{x^2}{2b_n^2}}$$

由(7)式, 把 $h_\lambda(x,y)$ 作如下分解:

$$h_\lambda(x,y)=h_{\lambda,1}(x,y)+h_{\lambda,2}(x,y)$$

其中:

$$h_{\lambda,1}(x,y)=\mathrm{e}^{-(x+y)}\Phi\left(\lambda+\frac{x-y}{2\lambda}\right)\Phi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)H_\lambda(x,y)$$

$$h_{\lambda,2}(x,y)=\frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-x}\varphi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)H_\lambda(x,y)$$

对任意的 $s,t\in\mathbb{R}$, 当 $n\to\infty$ 时, 由(1),(2)式知:

$$\frac{u_n(s)-\rho_n u_n(t)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\to\lambda+\frac{s-t}{2\lambda},\ b_n\sqrt{1-\rho_n^2}\to 2\lambda,$$

$$F^{n-k}(u_n(s),\ u_n(t)) \to H_\lambda(s,\ t) \qquad k=1,2 \tag{11}$$

因此，由(11)式可以得到：

$$\lim_{n\to\infty} f_{\rho_n,1}(x,\ y)=h_{\lambda,1}(x,\ y)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_{\rho_n,2}(x,\ y)=h_{\lambda,2}(x,\ y)$$

再由(9),(10)式知(8)式成立.

2 密度函数的展开

推导 Hüsler-Reiss 模型极大值密度函数 $f_{\rho_n}(x,\ y)$ 的高阶展开需要下面两个引理.

引理 1 高斯三角阵$\{(X_{ni},\ Y_{ni}),\ 1\leqslant i\leqslant n,\ n\geqslant 1\}$满足(4)式，则对任意 $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} b_n^2\Delta(F_{\rho_n}^n,\ H_\lambda;\ x,\ y)=\kappa(\alpha,\ \lambda,\ x,\ y)\ H_\lambda(x,\ y)$$

其中

$$\Delta(F_{\rho_n}^n,\ H_\lambda;\ x,\ y)=F_{\rho_n}{}^n(u_n(x),\ u_n(y))-H_\lambda(x,\ y)$$

且

$$\kappa(\alpha,\ \lambda,\ x,\ y)=S(x)\Phi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)+S(y)\Phi\left(\lambda+\frac{x-y}{2\lambda}\right)+ (2\alpha-\lambda(\lambda^2+x+y+2))\mathrm{e}^{-x}\varphi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right) \tag{12}$$

其中

$$S(t)=2^{-1}(x^2+2x)\ \mathrm{e}^{-x} \qquad t\in\mathbb{R}$$

证 见文献[4]之定理 2.1.

引理 2 高斯三角阵$\{(X_{ni},\ Y_{ni}),\ 1\leqslant i\leqslant n,\ n\geqslant 1\}$满足(5)式，则对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} b_n^2(\Delta(F_{\rho_n}^n,\ H_\lambda;\ x,\ y)-\kappa(\alpha,\ \lambda,\ x,\ y)H_\lambda(x,\ y))= \left(\tau(\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ x,\ y)+\frac{1}{2}\kappa^2(\alpha,\ \lambda,\ x,\ y)\right)H_\lambda(x,\ y)$$

其中 $\kappa(\alpha,\ \lambda,\ x,\ y)$ 由(12)式给出，且

$$\tau(\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ x,\ y)=-8^{-1}(x^4+4x^3+8x^2+16x)\ \mathrm{e}^{-x}+ \tau_1(\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ x,\ y)+\tau_2(\alpha,\ \lambda,\ x,\ y)-\tau_3(\lambda,\ x,\ y) \tag{13}$$

τ_1,τ_2,τ_3 的定义见文献[4].

证 详见文献[4]之定理 2.2.

下面给出 $\Delta(f_{\rho_n,\lambda},\ h_\lambda;\ x,\ y)$ 高阶展开.

定理 2 高斯三角阵$\{(X_{ni},\ Y_{ni}),\ 1\leqslant i\leqslant n,\ n\geqslant 1\}$满足条件(4)，则对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{n\to\infty} b_n^2\Delta(f_{n,\lambda},\ h_\lambda;\ x,\ y)=T(x,\ y)$$

其中：

$$T(x,\ y)=\left[I_1(x,\ y)+I_1(y,\ x)-\frac{x^2+y^2}{2}+2\right]h_{\lambda,1}(x,\ y)+ \left[I_2(x,\ y)-\frac{x^2}{2}+1\right]h_{\lambda,2}(x,\ y)+\kappa(\alpha,\ \lambda,\ x,\ y)h_\lambda(x,\ y)$$

$$I_1(s,\ t)=\frac{\varphi\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)}{\Phi\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)}\left(-\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}t+\frac{3}{4}\lambda t+\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}s+\frac{1}{4}\lambda s+\frac{1}{2}\lambda^3-\alpha\right) \qquad s,t\in\mathbb{R}$$

$$I_2(x,y)=-\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)\left(-\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}x+\frac{3}{4}\lambda x+\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}y+\frac{1}{4}\lambda y+\frac{1}{2}\lambda^3-\alpha\right)$$

证 令

$$A_{1n}=b_n^2\left(\lambda-\lambda_n\left(1-\frac{\lambda_n^2}{b_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$A_{2n}=\frac{1}{2}b_n^2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_n}\left(1-\frac{\lambda_n^2}{b_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$A_{3n}=\lambda_n\left(1-\frac{\lambda_n^2}{b_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

由条件(4)易验证下面的极限成立:

$$\lim_{n\to\infty}A_{1n}=\alpha-\frac{1}{2}\lambda^3$$

$$\lim_{n\to\infty}A_{2n}=-\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}-\frac{1}{4}\lambda$$

$$\lim_{n\to\infty}A_{3n}=\lambda$$

令

$$v_n(s,t)=\frac{u_n(s)-\rho_n u_n(t)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}-\lambda-\frac{s-t}{2\lambda}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}b_n^2 v_n(s,t)=\left(-\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}t+\frac{3}{4}\lambda t+\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}s+\frac{1}{4}\lambda s+\frac{1}{2}\lambda^3-\alpha\right)\tag{14}$$

令

$$\begin{aligned}w_{n1}(x,y,\lambda)&=\log f_{\rho_n,1}(x,y)-\log h_{\lambda,1}(x,y)=\\&\left(\log\frac{n-1}{b_n}\varphi(u_n(y))+y\right)+\left(\log\frac{n}{b_n}\varphi(u_n(x))+x\right)+\\&\left(\log\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho_n u_n(y)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)-\log\Phi\left(\lambda+\frac{x-y}{2\lambda}\right)\right)+\\&\left(\log\Phi\left(\frac{u_n(y)-\rho_n u_n(x)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)-\log\Phi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)\right)+\\&(\log F_{\rho_n}^{n-2}(u_n(x),u_n(y))-\log H_\lambda(x,y))\end{aligned}$$

由文献[3]知,

$$n^{-1}=1-\Phi(b_n)=b_n^{-1}\varphi(b_n)(1-b_n^{-2}+3b_n^{-4}+O(b_n^{-6}))\tag{15}$$

则当 $n\to\infty$ 时,有

$$b_n^2\left(\ln\frac{n-1}{b_n}\varphi(u_n(y))+y\right)\to 1-\frac{y^2}{2}$$

$$b_n^2\left(\ln\frac{n}{b_n}\varphi(u_n(x))+x\right)\to 1-\frac{x^2}{2}\tag{16}$$

又由泰勒展开式及(14)式知

$$b_n^2\left[\ln\Phi\left(\frac{u_n(s)-\rho_n u_n(t)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)-\ln\Phi\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)\right]\to$$

$$\frac{\varphi\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)}{\Phi\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)}\left(-\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}t+\frac{3}{4}\lambda t+\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}s+\frac{1}{4}\lambda s+\frac{1}{2}\lambda^{3}-\alpha\right)=I_1(s,t) \tag{17}$$

由 b_n 的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{n}\to 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}b_n^2(1-F_{\rho_n}(u_n(x),u_n(y)))=0$$

由引理 1 的相关证明和(17) 式可得

$$b_n^2[\log F_{\rho_n}^{n-2}(u_n(x),u_n(y))-\log H_\lambda(x,y)]\to\kappa(\alpha,\lambda,x,y) \tag{18}$$

于是 $n\to\infty$ 时，由(16),(17) 和(18) 式得

$$b_n^2[\mathrm{e}^{w_{n1}(x,y,\lambda)}-1]\to\kappa(\alpha,\lambda,x,y)+I_1(x,y)+I_1(y,x)-\frac{x^2+y^2}{2}+2 \tag{19}$$

同样地令

$$\begin{aligned}w_{n2}(x,y,\lambda)=&\log f_{\rho_n,2}(x,y)-\log h_{\lambda,2}(x,y)=\\&\left(\log\frac{n}{b_n}\varphi(u_n(x))+x\right)+\left(\log\frac{1}{b_n\sqrt{1-\rho_n^2}}-\log\frac{1}{2\lambda}\right)+\\&\left(\log\varphi\left(\frac{u_n(y)-\rho_n u_n(x)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)-\log\varphi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)\right)+\\&(\log F_{\rho_n}^{n-1}(u_n(x),u_n(y))-\log H_\lambda(x,y))\end{aligned}$$

因为当 $n\to\infty$ 时，由(1) 和(4) 式得

$$b_n^2\left(\log\frac{1}{b_n\sqrt{1-\rho_n^2}}-\log\frac{1}{2\lambda}\right)\to\frac{\alpha}{\lambda} \tag{20}$$

又由(11) 和(14) 式得

$$\begin{aligned}&b_n^2\left(\log\varphi\left(\frac{u_n(y)-\rho_n u_n(x)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right)-\log\varphi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)\right)\to\\&-\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)\left(-\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}x+\frac{3}{4}\lambda x+\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}y+\frac{1}{4}\lambda y+\frac{1}{2}\lambda^3-\alpha\right)=\\&I_2(x,y)\end{aligned} \tag{21}$$

则由(16),(18),(20) 和(21) 式知

$$b_n^2[\mathrm{e}^{(w_{n2}(x,y,\lambda)}-1]\to\kappa(\alpha,\lambda,x,y)+I_2(x,y)-\frac{x^2}{2}+\frac{\alpha}{\lambda}+1 \tag{22}$$

由于对充分大的 n 有

$$b_n^2\Delta(f_{\rho_n},h_\lambda;x,y)\sim b_n^2w_{n1}(x,y,\lambda)h_{\lambda,1}(x,y)+b_n^2w_{n2}(x,y,\lambda)h_{\lambda,2}(x,y)$$

结合式子(19) 和(22) 式，定理得证.

定理 3　高斯三角阵$\{(X_{ni},Y_{ni}),1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$满足条件(5)，则对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}b_n^2[b_n^2\Delta(f_{\rho_n},h_\lambda;x,y)-T(x,y)]=\\&[I_3(x,y)+I_3(y,x)-6]h_{\lambda,1}(x,y)+\left[\frac{\beta}{\lambda}+\frac{\alpha^2}{\lambda^2}+I_4(x,y)-3\right]h_{\lambda,2}(x,y)+\\&\tau(\alpha,\beta,\lambda,x,y)h_\lambda(x,y)\end{aligned}$$

其中:

$$I_3(s,t)=\frac{\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)\varphi\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)\Phi\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)+\varphi^2\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)}{2\Phi^2\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)}\times$$

$$\left[-\left(\frac{1}{4}\alpha^2\lambda^{-4}-\frac{3}{4}\alpha\lambda^{-1}+\frac{9}{16}\lambda^2\right)t^2-\left(\frac{1}{4}\alpha^2\lambda^{-4}+\frac{1}{4}\alpha\lambda^{-1}+\frac{1}{16}\lambda^2\right)s^2+\right.$$

$$\left(\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-4}-\frac{1}{4}\alpha\lambda^{-1}-\frac{3}{8}\lambda^2\right)st+\left(2\alpha\lambda-\alpha^2\lambda^{-2}-\frac{3}{4}\lambda^4\right)t+$$

$$\left.\left(\alpha^2\lambda^{-2}-\frac{1}{4}\lambda^4\right)s-\alpha^2+\alpha\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda^6\right]$$

$$I_4(x,y)=\frac{1}{2}\lambda x\left(\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}x-\frac{3}{4}\lambda x-\frac{1}{2}\alpha\lambda^{-2}y-\frac{1}{4}\lambda y-\frac{1}{2}\lambda^3+\alpha\right)$$

证 当 $n\to\infty$ 时,由引理 2 知

$$b_n^2\left[b_n^2\left(\ln F_{\rho_n}^{n-k}(u_n(x),u_n(y))-\ln H_\lambda(x,y)\right)-\kappa(\alpha,\lambda,x,y)\right]\to\tau(\alpha,\beta,\lambda,x,y)\qquad k=1,2 \tag{23}$$

又由(15)式得

$$b_n^2\left[b_n^2\left(\log\frac{n-1}{b_n}\varphi(u_n(y))+y\right)-1+\frac{y^2}{2}\right]\to-3$$

$$b_n^2\left[b_n^2\left(\log\frac{n}{b_n}\varphi(u_n(x))+x\right)-1+\frac{x^2}{2}\right]\to-3 \tag{24}$$

由泰勒展开式知,

$$b_n^2\left[b_n^2\left(\ln\Phi\frac{u_n(s)-\rho_n u_n(t)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}-\ln\Phi\left(\lambda+\frac{s-t}{2\lambda}\right)\right)-I_1(s,t)\right]\to I_3(s,t) \tag{25}$$

又由(11),(14)和(21)式可以得到当 $n\to\infty$ 时

$$b_n^2\left[b_n^2\left(\ln\varphi\frac{u_n(y)-\rho_n u_n(x)}{\sqrt{1-\rho_n^2}}-\ln\varphi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)\right)-I_2(x,y)\right]\to I_4(x,y) \tag{26}$$

接下来由(4)和(5)式得

$$b_n^2\left[b_n^2\left(\ln\frac{1}{b_n\sqrt{1-\rho_n}}-\ln\frac{1}{2\lambda}\right)-\frac{\alpha}{\lambda}\right]\to\frac{\beta}{\lambda}+\frac{\alpha^2}{\lambda^2} \tag{27}$$

结合(23)-(27)式,定理得证.

参考文献:

[1] HÜSLER J, REISS R D. Maxima of Normal Random Vectors: Between Independence and Complete Dependence [J]. Stat Probab Lett, 1989, 7(4): 283-286.

[2] HASHORVA E, WENG Z. Limit Laws for Extremes of Dependent Stationary Gaussian Arrays [J]. Statist Probab Lett, 2013, 83(83): 320-330.

[3] LIAO X, PENG Z. Asymptotics for the Maxima and Minima of Hüsler-Reiss Bivariate Gaussian Arrays [J]. Extremes, 2014, 18(1): 1-14.

[4] HASHORVA E, PENG Z, WENG Z. Higher-Order Expansions of Distribution of Maxima in a Hüsler-Reiss Model [J]. Methodol Comput Appl Probab, 2016, 18(1): 181-196.

[5] HASHORVA E. Elliptical Triangular Arrays in the Max-Domain of Attraction of Hüsler-Reiss Distribution [J]. Stat Probab Lett, 2005, 72(2): 125-135.

[6] HASHORVA E. On the Max-Domain of Attractions of Bivariate Elliptical Arrays [J]. Extremes, 2006, 8(3): 225－233.

[7] LIAO X, PENG Z. Convergence Rate of Maxima of Bivariate Gaussian Arrays to the Hüsler-Reiss Distribution [J]. Statistics and Its Interface, 2014, 7(3): 351－362.

[8] FRICK M, REISS R D. Expansions and Penultimate Distributions of Maxima of Bivariate Normal Random Vectors [J]. Statist Probab Lett, 2013, 83(11): 2563－2568.

[9] LIAO X, PENG L, PENG Z, et al. Dynamic Bivariate Normal Copula [J]. Science China Mathematics, 2016, 59(5): 955－976.

[10] 杨红艳，彭作祥. 有限混合偏正态极值的极限分布 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(3)：59－62.

[11] 章毓波，彭作祥. t 分布的极值分布渐近展开 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(3)：67－70.

Asymptotics of Density of Extreme Order Statistics on H-R Model

LU Ying-yin，　PENG Zuo-xiang

Schoolof Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, under Hüsler-Reiss condition the convergence of density of extreme from a bivariate Gaussian triangular arrays was derived. Furthermore, the higher-order expansions of the considered density were established provided that the refined Hüsler-Reiss conditions hold.

Key words: bivariate Gaussian triangular array; density convergence; higher-order expansion; Hüsler-Reiss condition

责任编辑　张　枸