DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.10.005

一类变换半群的右相容元①

李建华[1]，　孙　垒[2]

了解通信作者孙垒的更多成果，请扫二维码

1. 洛阳师范学院 数学科学学院，河南 洛阳 471002；
2. 河南理工大学 数学与信息科学学院，河南 焦作 454003

摘要： 设 $\mathscr{T}_X$ 是非空集合 X 上的全变换半群，E 是 X 上的非平凡的等价关系，R 是 X/E 的横断面，则

$$T_E(X,R)=\{f\in\mathscr{T}_X:\forall x,y\in X,(x,y)\in E \text{ 蕴含 } (f(x),f(y))\in E \text{ 且 } f(R)\subseteq R\}$$

是 $\mathscr{T}_X$ 的子半群. 赋予变换半群 $T_E(X,R)$ 自然偏序关系，刻画了它的右相容元，并给出了右相容元的充要条件.

关 键 词： 变换半群；自然偏序关系；右相容元

中图分类号：O152.7　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2016)10-0036-06

文献[1]在任意半群 S 上定义了如下偏序关系 $\leqslant$：

定理 1[1]　设 $\leqslant$ 是半群 S 上的偏序关系，$a,b\in S$，则下面命题等价：

(i) $a\leqslant b$；

(ii) $a=wb=bz$，$az=a$，其中 $w,z\in S^1$；

(iii) $a=xb=by$，$xa=ay=a$，其中 $x,y\in S^1$.

这种偏序关系通常称为半群 S 的自然偏序关系. 自然偏序关系是半群理论中一个重要的研究课题，同时也是变换半群理论研究的热点问题. 近年来，国内外诸多学者关注偏序关系及相关问题的研究（参见文献[2-8]）.

设 $\mathscr{T}_X$ 是非空集合 $X(|X|\geqslant 3)$ 上的全变换半群，E 是 X 上的等价关系，X/E 是由等价关系 E 确定的 X 的分类（其中 X/E 的每个元素称为一个 E-类），R 是 X/E 的横断面（即 X/E 中每个 E-类作为代表元的集合）. 文献[9]最早引入了 $\mathscr{T}_X$ 的保持等价关系和横断面的子半群

$$T_E(X,R)=\{f\in\mathscr{T}_X:\forall x,y\in X,(x,y)\in E \text{ 蕴含 } (f(x),f(y))\in E \text{ 且 } f(R)\subseteq R\}$$

刻画了它的正则元、格林等价关系 L,R,H,D,J 和富足性. 文献[3]赋予变换半群 $T_E(X,R)$ 的自然偏序关系 $\leqslant$，即对 $\forall f,g\in T_E(X,R)$，$f\leqslant g$ 当且仅当 $f=kg=gh$ 且 $f=kf$，其中 $h,k\in T_E(X,R)$. 得到了如下结论：

定理 2[3]　设 $f,g\in T_E(X,R)$，则 $f\leqslant g$ 当且仅当下面条件同时成立：

(i) $\pi(g)$ 加细 $\pi(f)$；

---

① 收稿日期：2016-01-13

基金项目：国家自然科学基金项目（U1404101）；河南省科技厅计划项目（162400410122）；河南省教育厅项目（15B120005，2017-ZDJH-145）.

作者简介：李建华（1979-），女，河南三门峡人，讲师，主要从事代数学的研究.

通信作者：孙　垒，副教授.

(ii) 若 $g(x) \in f(X)$(其中 $x \in X$)，则 $f(x)=g(x)$；

(iii) 对于 $\forall A \in X/E$，存在 $B \in X/E$，使得 $f(A) \subseteq g(B)$.

设 $h \in T_E(X, R)$. 若对任意 $f \leqslant g$，有

$$hf \leqslant hg (fh \leqslant gh)$$

则称 h 为半群 $T_E(X, R)$ 的左(右)相容元.

左(右)相容元是自然偏序关系 $\leqslant$ 的重要特性. 下述定理给出了半群 $T_E(X, R)$ 的左相容元和右相容元的充分条件，即：

定理 3[3]　设 $h \in T_E(X, R)$，则下述命题成立：

(i) 若 h 是单射，则 h 是半群 $T_E(X, R)$ 的左相容元；

(ii) 若 h 既是满射又是正则元，则 h 是半群 $T_E(X, R)$ 的右相容元.

为弥补文献[3] 的不足，文献[10] 刻画了变换半群 $T_E(X, R)$ 的左相容元，给出了左相容元的一个充要条件，即：

定理 4[10]　设 $h \in T_E(X, R)$，则 h 是变换半群 $T_E(X, R)$ 的左相容元当且仅当下面两命题之一成立：

(i) 若 $|E(h)|=1$，则 h 是 X 上的常值映射；或者对于所有 E-类 A，$h|_A$ 是单射，且对于任意不同的 $B, C \in X/E$，有

$$h(B-R) \cap h(C-R) = \varnothing$$

(ii) 若 $|E(h)|>1$，则 $E(h)=X/E$，且对于所有的 E-类 A，$h|_A$ 都是单射或者对于所有的 E-类 A，$h|_A$ 都是常值映射.

本文以变换半群 $T_E(X, R)$ 为研究对象，在赋予 $T_E(X, R)$ 自然偏序关系的条件下，继续刻画半群 $T_E(X, R)$ 的右相容元，给出了右相容元的一个充要条件，从而彻底解决这类变换半群 $T_E(X, R)$ 的相容性.

下面介绍本文中的概念和符号. 令 $\pi(f)$ 表示由 $f \in \mathscr{T}_X$ 确定的 X 的分类，即

$$\pi(f)=\{f^{-1}(y): y \in f(X)\}$$

设 $f \in T_E(X, R)$，记

$$E(f)=\{f^{-1}(A): f^{-1}(A) \neq \varnothing, \text{其中 } A \in X/E\}$$

显然 $E(f)$ 也是 X 的分类. 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是集合 X 的两个子集族，若对 $\forall A \in \mathscr{A}$，存在 $B \in \mathscr{B}$，使得 $A \subseteq B$，则称子集族 $\mathscr{A}$ 加细子集族 $\mathscr{B}$. 设 $x \in X$，用 $\bar{x}$ 表示 x 所在的 E-类. 本文总是假设等价关系 $E \neq X \times X$ 且 $E \neq \{(x, x): x \in X\}$.

1　预备知识

引理 1　设 $h \in T_E(X, R)$. 若 h 是 $T_E(X, R)$ 的右相容元，则 $h(X)=R$ 或者 $h(X)=X$.

证　首先证明 $R \subseteq h(X)$. 用反证法. 若不然，即存在 $r \in R-h(X)$. 定义 $f: X \longrightarrow X$ 为 $f=\langle r \rangle$，其中 $\langle r \rangle$ 表示取值为 r 的常值映射. 显然 $f \in T_E(X, R)$ 且 $f \leqslant \mathrm{id}_X$，其中 id_X 表示集合 X 上的恒等映射. 注意到 h 是右相容元，于是

$$fh \leqslant \mathrm{id}_X h = h$$

进一步由定理 2(iii) 知，对 $\forall A \in X/E$，存在 $B \in X/E$，使得

$$fh(A) \subseteq h(B)$$

即

$$fh(A)=\{r\} \subseteq h(B)$$

但是，由 $r \notin h(X)$ 知，不存在 $B \in X/E$，使 $fh(A) \subseteq h(B)$ 成立，矛盾. 因此 $R \subseteq h(X)$. 其次证明若

$h(X) \neq R$，则 $h(X) = X$. 同样也用反证法. 若不然，则存在 $a \in X - h(X)$. 显然 $a \notin R$. 取定 $r \in \overline{a} \cap R$. 定义 $f: X \longrightarrow X$ 为

$$f(x) = \begin{cases} r & x \in R \\ a & \text{否则} \end{cases}$$

显然 $f \in T_E(X, R)$. 容易验证 $f \leqslant \mathrm{id}_X$. 由 h 的右相容性知

$$fh \leqslant \mathrm{id}_X h = h$$

注意到 $h(X) \neq R$，于是存在 $A \in X/E$，使

$$| h(A) | \geqslant 2$$

由 f 的定义知 $fh(A) = \{r, a\}$. 进一步由定理 2(iii) 知，存在 $B \in X/E$，使得 $fh(A) \subseteq h(B)$，即

$$fh(A) = \{r, a\} \subseteq h(B)$$

但是，由 $a \notin h(X)$ 知，不存在 $B \in X/E$，使 $fh(A) \subseteq h(B)$ 成立，矛盾. 因此 $h(X) = X$.

根据引理 1，有如下推论：

推论 1　设 $h \in T_E(X, R)$. 若 h 是 $T_E(X, R)$ 的右相容元，则 $h(R) = R$.

证　显然 $h(R) \subseteq R$. 现在证明 $R \subseteq h(R)$. 任取 $r \in R$. 由引理 1 知，存在 $x \in X$，使得 $h(x) = r$. 下面分 2 种情形讨论：

情形 1　$x \in R$. 由 r 的任意性知 $R \subseteq h(R)$，因此 $h(R) = R$.

情形 2　$x \notin R$. 令 $r' \in \overline{x} \cap R$，则 $h(r') = r$，这表明 $R \subseteq h(R)$. 因此 $h(R) = R$.

故 $h(R) = R$.

引理 2[9]　设 $f \in T_E(X, R)$，则 f 是半群 $T_E(X, R)$ 的正则元当且仅当对 $\forall A \in X/E$，存在 $B \in X/E$，使得 $A \cap f(X) \subseteq f(B)$.

引理 3[3]　设 f 是变换半群 $T_E(X, R)$ 的正则元，则对 $\forall U \in E(f)$，存在 E-类 $A \subseteq U$，使得 $f(A) = f(U)$.

进一步有如下结论：

引理 4　设 $f \in T_E(X, R)$，则 f 是半群 $T_E(X, R)$ 的正则元当且仅当对 $\forall U \in E(f)$，存在 E-类 $A \subseteq U$，使得 $f(A) = f(U)$.

证　由引理 3 知必要性成立.

充分性　设 $A \in X/E$，分 2 种情形讨论：

情形 1　若 $A \cap f(X) = \varnothing$，则对 $\forall B \in X/E$，有 $A \cap f(X) \subseteq f(B)$.

情形 2　若 $A \cap f(X) \neq \varnothing$，则存在 $U \in E(f)$，使得

$$A \cap f(X) = f(U)$$

于是存在 $B \in X/E (B \subseteq U)$，使得

$$f(U) = f(B)$$

因此

$$A \cap f(X) = f(B)$$

从而不管何种情形都有 $A \cap f(X) \subseteq f(B)$. 根据引理 2，$f$ 是半群 $T_E(X, R)$ 的正则元.

设 $h \in T_E(X, R)$ 且 $A \in X/E$. 若存在 $B \in X/E$，使得 $h(B) = A$，则 A 被 h 作用下是 E-满的.

由引理 4 知，若 h 不是半群 $T_E(X, R)$ 的正则元，则存在 E-类 A 不是 E-满的. 记

$$\lambda = \min\{ | A | : A \in X/E \text{ 且 } A \text{ 被 } h \text{ 作用下不是 } E\text{-满的} \}$$

引理 5　设 X/E 是无限集. 若 h 是变换半群 $T_E(X, R)$ 的右相容元但不是正则元，则对 $\forall A \in X/E$，有 $| h(A) | \leqslant \lambda - 1$，其中 λ 如上定义.

证 用反证法.若不然,设存在 $A_* \in X/E$,使得 $|h(A_*)| \geqslant \lambda$.令 $h(A_*) \subseteq B_* \in X/E$.设 E-类 A 被映射 h 作用下不是 E-满的且 $|A| = \lambda$.不妨设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{\lambda-1}, r\}$(其中 $r \in R$).现在证明 $B_* \neq A$.若不然,即 $B_* = A$,则 $|h(A_*)| = \lambda$.于是 $h(A_*) = B_* = A$.这表明 A 被映射 h 作用下是 E-满的.这与 A 被映射 h 作用下不是 E-满的矛盾.因此 $B_* \neq A$.设 $h(A_*) = B_*^1 \cup B_*^2 \cup \cdots \cup B_*^\lambda$,其中非空集合 $B_*^1, B_*^2, \cdots, B_*^\lambda$ 两两不交,并且 $r_* \in B_*^\lambda \cap R$.定义 $f: X \longrightarrow X$ 为

$$f(x) = \begin{cases} a_i & x \in B_*^i (1 \leqslant i \leqslant \lambda - 1) \\ r & x \in B_*^\lambda \\ a_1 & x \in B_* - h(A_*) \\ x & \text{否则} \end{cases}$$

显然 $f \in T_E(X, R)$.容易证明 $f \leqslant \mathrm{id}_X$.由 h 是右相容元知 $fh \leqslant \mathrm{id}_X h = h$.但是,由 h 的定义知

$$fh(A_*) = \{a_1, a_2, \cdots, a_{\lambda-1}, r\} = A$$

根据定理 2(ⅲ),存在 $B \in X/E$,使得 $fh(A_*) \subseteq h(B)$,即 $A \subseteq h(B)$.显然 $h(B) \subseteq A$,因此 $h(B) = A$.这与 A 被映射 h 作用下不是 E-满的矛盾.故结论成立.

2 主要结论

定理 5 设 X/E 是有限集,则 h 是变换半群 $T_E(X, R)$ 的右相容元当且仅当 $h(X) = R$ 或者 h 是满射.

证 必要性 设 h 是右相容元.由引理 1 知 $h(X) = R$ 或者 h 是满射.

充分性 设 $f, g \in T_E(X, R)$ 且 $f \leqslant g$.下面分 2 种情形讨论:

情形 1 $h(X) = R$.设 $gh(x) = gh(y)$,其中 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$.由定理 2(ⅰ) 和 $f \leqslant g$ 知 $fh(x) = fh(y)$,这表明 $\pi(gh)$ 加细 $\pi(fh)$,即 fh, gh 满足定理 2(ⅰ).设 $gh(x) \in fh(X)$,显然 $gh(x) \in f(X)$.由定理 2(ⅱ) 和 $f \leqslant g$ 知 $fh(x) = gh(x)$,这表明 fh, gh 满足定理 2(ⅱ).任取 $A \in X/E$.于是由定理 2(ⅲ) 和 $f \leqslant g$ 知

$$fh(A) = f(r) = g(r') = gh(B)$$

其中 $h(A) = \{r\}$,$h(B) = \{r'\}$,$r, r' \in R$ 且 $B \in X/E$.这表明 fh, gh 满足定理 2(ⅲ).因此 $fh \leqslant gh$,即 h 是右相容元.

情形 2 若 h 是满射.由于 X/E 是有限集,于是 $E(h) = X/E$.由引理 4 知 h 是变换半群 $T_E(X, R)$ 的正则元.根据定理 3(ⅱ),h 是半群 $T_E(X, R)$ 的右相容元.

令

$$\mu = \max\{|h(A)|: A \in X/E\}$$

显然 $\mu \leqslant \lambda - 1$.

定理 6 设 X/E 是无限集且 λ, μ 如上定义,则 h 是变换半群 $T_E(X, R)$ 的右相容元当且仅当下述 3 个命题之一成立:

(ⅰ) $h(X) = R$;

(ⅱ) h 是满射且 h 是正则元;

(ⅲ) h 是满射,对 $\forall A \in X/E$,有 $|h(A)| \leqslant \lambda - 1$.并且,对于不同的 $a_1, a_2, \cdots, a_{t-1} \in A \in X/E$(其中 $2 \leqslant t \leqslant \mu$)和 $r \in A \cap R$,存在 $B \in X/E$,使得

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}, r\} \subseteq h(B)$$

证 必要性 设 h 是右相容元.由引理 1 知 $h(X) = R$ 或者 h 是满射.现在设 h 不是正则元.根据引理 5,对 $\forall A \in X/E$,有

$$|h(A)| \leqslant \lambda - 1$$

现在用反证法证明 (iii) 的剩余结论成立. 若不然，即不存在 $B \in X/E$，使得

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}, r\} \subseteq h(B)$$

令 $A_* \in X/E$ 满足 $|h(A_*)| = \mu$. 不妨设

$$h(A_*) = \{b_1, b_2, \cdots, b_{\mu-1}, r'\} \subseteq B_* \in X/E$$

其中 $r' \in R$. 显然

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}, r\} \neq \{b_1, b_2, \cdots, b_{\mu-1}, r'\}$$

定义 $f: X \longrightarrow X$ 为

$$f(x) = \begin{cases} a_i & x = b_i (1 \leqslant i \leqslant t-1) \\ r & x = r' \\ a_1 & x \in B_* - h(A_*) \\ x & \text{否则} \end{cases}$$

容易验证 $f \in T_E(X, R)$ 且 $f \leqslant \mathrm{id}_X$. 于是 $fh \leqslant \mathrm{id}_X h = h$. 由 f 的定义知

$$fh(A_*) = \{a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}, r\}$$

但是不存在 $B \in X/E$，使得

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}, r\} \subseteq h(B)$$

这与定理 2(iii) 矛盾. 因此必要性成立.

充分性　设 $f, g \in T_E(X, R)$ 且 $f \leqslant g$，分 3 种情形讨论：

情形 1　$h(X) = R$. 如定理 5 情形 1 所证.

情形 2　h 是满射且 h 是正则元. 由定理 3(ii) 知 h 是半群 $T_E(X, R)$ 的右相容元.

情形 3　设 h 满足 (iii). 显然 fh, gh 满足定理 2(i),(ii). 下面验证 fh, gh 满足定理 2(iii). 由 $f \leqslant g$ 知，对 $\forall A \in X/E$，有

$$fh(A) \subseteq f(B) \subseteq g(C)$$

其中 $B, C \in X/E$ 且 $h(A) \subseteq B$. 由 $|h(A)| \leqslant \lambda - 1$ 知 $|fh(A)| \leqslant \lambda - 1$. 令

$$fh(A) = \{a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}, r\}$$

其中 $r \in R$，显然 $1 \leqslant t \leqslant \mu$. 下面讨论 2 种可能性：

(a) $t = 1$. 此时 $fh(A) = \{r\}$. 注意到 h 是满射，于是存在 $D \in X/E$，使得 $fh(A) \subseteq gh(D)$.

(b) $t \geqslant 2$. 令 $c_1, c_2, \cdots, c_{t-1} \in C$，$r_* \in C \cap R$，满足 $a_i = g(c_i)$ 且 $r = g(r_*)$，其中 $i \in \{1, 2, \cdots, t-1\}$. 由 (iii) 知存在 $D \in X/E$，使得

$$\{c_1, c_2, \cdots, c_{t-1}, r_*\} \subseteq h(D)$$

进一步有 $fh(A) \subseteq gh(D)$. 这表明 fh, gh 满足定理 2(iii). 因此 $fh \leqslant gh$. 故 h 是半群 $T_E(X, R)$ 的右相容元.

参考文献：

[1] MITSCH H. A Natural Partial Order for Semigroups [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1986，97(3)：384－388.

[2] SINGHA B. Partial Orders on Partial Baer-Levi Semigroups [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society，2010，81(2)：195－207.

[3] SUN L，DENG W N，PEI H S. Naturally Ordered Transformation Semigroups Preserving an Equivalence and a Cross-Section [J]. Algebra Colloquium，2011，18(3)：523－532.

[4] PEI H S，DENG W N. Naturally Ordered Semigroups of Partial Transformations Preserving an Equivalence Relation [J]. Communications in Algebra，2013，41(9)：3308－3324.

[5] SUN L, WANG L M. Natural Partial Order in Semigroups of Transformations with Invariant Set [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2013, 87(1): 94-107.

[6] SUN L, SUN J L. A Note on Naturally Ordered Semigroups of Transformations with Invariant Set [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2015, 91(2): 264-267.

[7] 吴金艳,赵 平,游泰杰. 半群 OI_n 的偏度秩 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(10): 67-71.

[8] 张传军,朱华伟,肖宏治. 半群 $PO_n(k, m)$的秩 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(6): 6-11.

[9] ARAUJO J, KONIECZNY J. Semigroups of Transformations Preserving an Equivalence Relation and a Cross-Section [J]. Communications in Algebra, 2004, 32(5): 1917-1935.

[10] 薛 琳,孙 垒. 一类变换半群的左相容元 [J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2015, 28(4): 472-474.

Right Compatible Elements in Certain Transformation Semigroups

LI Jian-hua[1], SUN Lei[2]

1. Mathematics College, Luoyang Normal University, Luoyang Henan 471002, China;

2. School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan 454003, China

Abstract: Let $\mathcal{T}_X$ be the full transformation semigroup on a nonempty set X, E be a nontrivial equivalence relation on X and R be a cross-section of X/E, then

$$T_E(X, R)=\{f \in \mathcal{T}_X:\ \forall x, y \in X,\ (x, y) \in E \text{ implies } (f(x), f(y)) \in E \text{ and } f(R) \subseteq R\}$$

is a subsemigroup of $\mathcal{T}_X$. In this paper the authors describe all the right compatible elements in the transformation semigroup $T_E(X, R)$ endowed with the natural partial order and give a necessary and sufficient condition for these elements.

Key words: transformation semigroup; natural partial order; right compatible element

责任编辑 廖 坤