第 38 卷第 10 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2016年10月
Vol. 38 No. 10　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Oct. 2016

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.10.006

关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=35y(y+1)(y+2)(y+3)$ ①

刘海丽，　罗　明

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：运用递归数列的方法，证明了不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=35y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有一组正整数解 $(x, y)=(4, 1)$.

关 键 词：不定方程；整数解；递归数列

中图分类号：O156.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)10-0042-05

当 $(m, n)=1$，$m, n\in\mathbb{N}_+$ 时，对于形如

$$mx(x+1)(x+2)(x+3)=ny(y+1)(y+2)(y+3)$$

的不定方程已有不少的研究工作(参见文献[1-8]).

本文将运用递归数列的方法证明：当 $(m, n)=(1, 35)$ 时，不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=35y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

仅有正整数解 $(x, y)=(4, 1)$. 我们先将方程(1)化为

$$(x^2+3x+1)^2-35(y^2+3y+1)^2=-34 \tag{2}$$

易知方程 $X^2-35Y^2=-34$ 的全部整数解由以下两个(非结合)类给出：

$$x_n+y_n\sqrt{35}=\pm(1+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$x_n+y_n\sqrt{35}=\pm(-1+\sqrt{35})(6+\sqrt{35})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

其中 $1+\sqrt{35}$ 是 $X^2-35Y^2=-34$ 的最小正整数解，$6+\sqrt{35}$ 是 Pell 方程 $u^2-35v^2=1$ 的基本解. 于是方程(2)的解应满足

$$(2y+3)^2=\pm 4y_n+5 \tag{3}$$

或

$$(2y+3)^2=\pm 4\overline{y_n}+5 \tag{4}$$

容易验证下面各式成立：

$$u_{n+1}=12u_n-u_{n-1} \qquad u_0=1,\ u_1=6 \tag{5}$$

$$v_{n+1}=12v_n-v_{n-1} \qquad v_0=0,\ v_1=1 \tag{6}$$

$$y_{n+1}=12y_n-y_{n-1} \qquad y_0=1,\ y_1=7 \tag{7}$$

$$u_{2n}=2u_n^2-1 \qquad v_{2n}=2u_nv_n \tag{8}$$

$$y_n=u_n+v_n \tag{9}$$

$$u_{n+2h}\equiv -u_n \pmod{u_h} \qquad v_{n+2h}\equiv -v_n \pmod{u_h} \tag{10}$$

---

① 收稿日期：2015-12-17
基金项目：国家自然科学基金项目(11471265).
作者简介：刘海丽(1991-)，女，山西朔州人，硕士研究生，主要从事代数数论的研究.

$$y_{n+2h}\equiv -y_n \pmod{u_h} \tag{11}$$

因为

$$\overline{y_n}=u_n-v_n=u_{-n}+v_{-n}=y_{-n}$$

所以只需考虑(3)式，其中 $n\in\mathbb{Z}$.

下面将证明(3)式仅当 $n=0,-1$ 时成立，由此求得方程(2)的全部整数解，进而作为推论得到方程(1)的全部正整数解.

1 $(2y+3)^2=-4y_n+5$

引理1 $-4y_n+5$ 是平方数仅对 $n=0$ 成立.

证 因为当 $|n|\geqslant 1$ 时，$-4y_n+5<0$，所以 $-4y_n+5$ 不可能是平方数. 当 $n=0$ 时，有 $-4y_n+5=1^2$.

2 $(2y+3)^2=4y_n+5$

引理2 若 $4y_n+5$ 为平方数，则必有 $n\equiv 0,-1 \pmod{60}$.

证 我们采用对序列 $\{4y_n+5\}$ 取模的方法来证明.

取 mod 5，排除 $n\equiv 1,2 \pmod 5$，此时 $4y_n+5\equiv 3,2 \pmod 5$.

取 mod 31，排除 $n\equiv 3 \pmod 5$，此时 $4y_n+5\equiv 24 \pmod{31}$，剩余 $n=0,4 \pmod 5$.

取 mod 131，排除 $n\equiv 4 \pmod{10}$，此时 $4y_n+5\equiv 116 \pmod{131}$，剩余 $n\equiv 0,5,9 \pmod{10}$.

取 mod 20 021，排除 $n\equiv 9 \pmod{20}$，此时 $4y_n+5\equiv 20\,006 \pmod{20\,021}$，剩余 $n\equiv 0,5,10,15,19 \pmod{20}$，即 $n\equiv 0,5,10,15,19,20,25,30,35,39,40,45,50,55,59 \pmod{60}$.

取 mod 13，排除 $n\equiv 1 \pmod 3$，即 $n\equiv 10,19,25,40,55 \pmod{60}$，此时 $4y_n+5\equiv 7 \pmod{13}$.

取 mod 11，排除 $n\equiv 2 \pmod 6$，即 $n\equiv 20,50 \pmod{60}$，此时 $4y_n+5\equiv 7 \pmod{11}$.

取 mod 47，排除 $n\equiv 3,9 \pmod{12}$，即 $n\equiv 15,39,45 \pmod{60}$，此时 $4y_n+5\equiv 13,13,44 \pmod{47}$.

取 mod 18 481，排除 $n\equiv 5 \pmod{15}$，即 $n\equiv 5,35 \pmod{60}$，此时 $4y_n+5\equiv 7\,299 \pmod{18\,481}$，剩余 $n\equiv 0,30,59 \pmod{60}$.

下面用计算排除 $n\equiv 30 \pmod{60}$，令 $n=60k+30$. 若 $2\mid k$，则 $n\equiv 6 \pmod 8$，对序列 $\{4y_n+5\}$ 取 mod 71，排除 $n\equiv 6 \pmod 8$，此时 $4y_n+5\equiv 28 \pmod{71}$；若 $2\nmid k$，则 $n\equiv 2 \pmod 8$，取 mod 71，排除 $n\equiv 2 \pmod 8$，此时 $4y_n+5\equiv 53 \pmod{71}$.

引理3 设 $2\parallel n$，$n>0$，则

$$\left(\frac{\pm 4v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{5u_n\pm 4v_n}{11}\right)$$

证 由(6)式知，当 $n\in\mathbb{Z}$，$n>0$ 时，有 $u_{2n}\equiv 1 \pmod 2$，$u_n\equiv 1 \pmod 5$，$(3,5u_n\pm 4v_n)=1$. 当 $2\parallel n$ 时，有 $u_n\equiv 3 \pmod 4$，$5u_n\pm 4v_n\equiv 3 \pmod 4$，$u_{2n}\equiv 1 \pmod 8$，从而有：

$$\left(\frac{-1}{u_n}\right)=-1 \qquad \left(\frac{2}{u_{2n}}\right)=1$$

于是由(8)式，有

$$\left(\frac{\pm 4v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 8u_nv_n+5(u_n^2-35v_n^2)}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 8u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=$$

$$\left(\frac{2}{u_{2n}}\right)\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{5u_n\pm 4v_n}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{5u_n\pm 4v_n}{u_n^2+35v_n^2}\right)=-\left(\frac{5u_n\pm 4v_n}{u_n^2+35v_n^2}\right)$$

若 $5\mid n$，则 $5\mid v_n$，有

$$\left(\frac{5u_n\pm 4v_n}{u_n^2+35v_n^2}\right)=\left(\frac{5}{u_n^2+35v_n^2}\right)\left(\frac{u_n\pm\frac{4v_n}{5}}{u_n^2+35v_n^2}\right)=\left(\frac{u_n^2+35v_n^2}{5}\right)\left(\frac{u_n\pm\frac{4v_n}{5}}{u_n^2+35v_n^2}\right)=$$

$$\left(\frac{u_n^2+35v_n^2}{u_n\pm\frac{4v_n}{5}}\right)=\left(\frac{u_n^2-\left(\frac{4v_n}{5}\right)^2+\frac{891}{25v_n^2}}{u_n\pm\frac{4v_n}{5}}\right)=\left(\frac{891}{u_n\pm\frac{4v_n}{5}}\right)=-\left(\frac{5u_n\pm4v_n}{11}\right)$$

若 $5\nmid n$，则 $5\nmid v_n$，有

$$\left(\frac{5u_n\pm4v_n}{u_n^2+35v_n^2}\right)=\left(\frac{25u_n^2+875v_n^2-16v_n^2+16v_n^2}{5u_n\pm4v_n}\right)=-\left(\frac{5u_n\pm4v_n}{11}\right)$$

引理 4　设 $n\equiv0\pmod{20}$，则仅当 $n=0$ 时，$4y_n+5$ 是平方数.

证　令 $n=2\cdot k\cdot5\cdot2^t(t\geqslant1,2\nmid k)$. 对 $\{5u_n\pm4v_n\}$ 取 mod 11，所得的两个剩余序列周期均为 6；而对 $\{2^t\}$ 取 mod 6，所得的剩余序列的周期为 2. 我们对 k 分两种情况讨论：

(i) $k\equiv1\pmod4$. 当 $m\equiv0\pmod2$ 时，令 $m=2^t$；当 $m\equiv1\pmod2$ 时，令 $m=5\cdot2^t$. 此时总有 $m\equiv4\pmod6$，且 $n=2lm$，$l\equiv1\pmod4$. 于是，由(9)，(11) 式及引理 3，有

$$4y_n+5\equiv4y_{2m}+5\equiv4v_{2m}+5\pmod{u_{2m}}$$

于是有

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{4v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m+4v_m}{11}\right)=\left(\frac{10}{11}\right)=-1$$

矛盾. 从而 $4y_n+5$ 是非平方数.

(ii) $k\equiv-1\pmod4$. 当 $m\equiv1\pmod2$ 时，令 $m=2^t$；当 $m\equiv0\pmod2$ 时，令 $m=5\cdot2^t$. 此时总有 $m\equiv2\pmod6$，且 $n=2lm$，$l\equiv-1\pmod4$. 于是，由(9)，(11) 式及引理 3，有

$$4y_n+5\equiv-4y_{2m}+5\equiv-4v_{2m}+5\pmod{u_{2m}}$$

于是有

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-4v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m-4v_m}{11}\right)=-1$$

矛盾. 从而 $4y_n+5$ 是非平方数.

引理 5　设 $4\mid n$，$n>0$，则

$$\left(\frac{\pm116v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{5u_n\pm116v_n}{281}\right)$$

证　由(5)式知，当 $n\in\mathbb{Z}$，$n>0$ 时，有 $u_{2n}\equiv1\pmod2$，$u_n\equiv1\pmod5$. 当 $4\mid n$ 时，有 $u_n\equiv1\pmod4$，$u_{2n}\equiv1\pmod8$，$5u_n\pm116v_n\equiv2\pmod3$，从而有：

$$\left(\frac{-1}{u_n}\right)=1\qquad\left(\frac{2}{u_{2n}}\right)=1$$

当 $4\mid n$ 时，还有 $\left(\frac{5u_n\pm116v_n}{17}\right)=\left(\frac{5}{17}\right)$，$\left(\frac{12}{17}\right)=-1$. 由(8) 式有

$$\left(\frac{\pm116v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm232u_nv_n+5(u_n^2-35v_n^2)}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm232u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=$$
$$\left(\frac{2}{u_{2n}}\right)\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{5u_n\pm116v_n}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{5u_n\pm116v_n}{u_n^2+35v_n^2}\right)=\left(\frac{u_n^2+35v_n^2}{5u_n\pm116v_n}\right)$$

若 $5\mid n$，则 $5\mid v_n$，有：

$$\left(\frac{u_n^2+35v_n^2}{5u_n\pm116v_n}\right)=\left(\frac{5u_n\pm116v_n}{u_n^2+35v_n^2}\right)=\left(\frac{5}{u_n^2+35v_n^2}\right)=\left(\frac{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}{u_n^2+35v_n^2}\right)=$$
$$\left(\frac{u_n^2+35v_n^2}{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}\right)=\left(\frac{u_n^2-\left(\frac{116v_n}{5}\right)^2+\frac{14\ 331}{25v_n^2}}{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}\right)=\left(\frac{14\ 331}{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}\right)=\left(\frac{3}{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}\right)$$

$$\left(\frac{17}{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}\right)\left(\frac{281}{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}\right)=\left(\frac{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}{3}\right)\left(\frac{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}{17}\right)\left(\frac{u_n\pm\frac{116v_n}{5}}{281}\right)=\left(\frac{5u_n\pm 116v_n}{281}\right)$$

若 $5\nmid n$，则 $5\nmid v_n$，有

$$\left(\frac{u_n^2+35v_n^2}{5u_n\pm 116v_n}\right)=\left(\frac{25u_n^2-13\,456v_n^2+875v_n^2+13\,456v_n^2}{5u_n\pm 116v_n}\right)=\left(\frac{14\,331}{5u_n\pm 116v_n}\right)=$$

$$\left(\frac{3}{5u_n\pm 16v_n}\right)\left(\frac{17}{5u_n\pm 16v_n}\right)\left(\frac{281}{5u_n\pm 16v_n}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5u_n\pm 116v_n}{281}\right)=\left(\frac{5u_n\pm 116v_n}{281}\right)$$

引理6 设 $n\equiv -1\pmod{60}$，则仅当 $n=-1$ 时，$4y_n+5$ 是平方数.

证 令 $n=-1+2\cdot k\cdot 3\cdot 5\cdot 2^t(t\geqslant 1,\ 2\nmid k)$. 对$\{5u_n\pm 116v_n\}$取 mod 281，所得的两个剩余序列周期均为140；而对$\{2^t\}$取 mod 140，所得的剩余序列的周期为12.

(i) $k\equiv 1\pmod 4$. 当 $t\equiv 0,1,2,5,6,11\pmod{12}$ 时，令 $m=2^t$；当 $t\equiv 8,9,10\pmod{12}$ 时，令 $m=3\cdot 2^t$；当 $t\equiv 3,4,7\pmod{12}$ 时，令 $m=3\cdot 5\cdot 2^t$. 则当 $t(t\geqslant 2)\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\pmod{12}$ 时，有

$$m\equiv 36,72,4,120,100,32,64,100,68,136,132,88\pmod{140}$$

对应地，有

$$5u_m-116v_m\equiv 146,194,266,22,186,6,142,186,220,227,122,52\pmod{281}$$

(ii) $k\equiv -1\pmod 4$. 当 $t\equiv 1,2,3,5,11\pmod{12}$ 时，令 $m=2^t$；当 $t\equiv 0,6,8,9\pmod{12}$ 时，令 $m=3\cdot 2^t$；当 $t\equiv 4,7,10\pmod{12}$ 时，令 $m=3\cdot 5\cdot 2^t$. 则当 $t(t\geqslant 2)\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\pmod{12}$ 时，有

$$m\equiv 108,72,4,8,100,32,52,100,68,136,100,88\pmod{140}$$

对应地，有

$$5u_m+116v_m\equiv 6,220,227,122\ 171,257,52,171,194,266,171,76\pmod{281}$$

当 $t=1$ 时，有 $m=2$，$5u_m-116v_m=-1\,037$，对任意 m，均有 $\left(\frac{5u_m\mp 116v_m}{281}\right)=-1$. 当 $k\equiv\pm 1\pmod 4$ 时，有 $n=2lm$，$l\equiv\pm 1\pmod 4$，从而由(9)，(10)式有

$$\begin{aligned}y_n&\equiv y_{-1\pm 2m}\equiv u_{-1\pm 2m}+v_{-1\pm 2m}\equiv\\&u_{-1}u_{\pm 2m}+35v_{-1}v_{\pm 2m}+v_{-1}u_{\pm 2m}+u_{-1}v_{\pm 2m}\equiv\\&35v_{-1}v_{\pm 2m}+u_{-1}v_{\pm 2m}\equiv -29v_{\pm 2m}\equiv\mp 29v_{2m}\pmod{u_{2m}}\end{aligned}$$

又由引理5，有

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\mp 116v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m\mp 116v_m}{281}\right)=-1$$

矛盾. 从而 $4y_n+5$ 是非平方数.

3 主要结果

根据前面的讨论，现在给出本文的主要结果：

定理1 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=35y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有1组正整数解$(x,y)=(4,1)$.

证 由引理1有$(2y+3)^2=-4y_0+5=1$，因此 $y=-1,-2$. 由引理4有$(2y+3)^2=4y_0+5=9$，因此 $y=0,-3$. 由引6有$(2y+3)^2=4y_{-1}+5=25$，因此 $y=1,-4$.

易知方程(1)共有20组整数解，其中有16组平凡解使其两端都为0，即(0，0)，(0，−1)，(0，−2)，(0，−3)，(−1，0)，(−1，−1)，(−1，−2)，(−1，−3)，(−2，0)，(−2，−1)，(−2，−2)，(−2，−3)，(−3，0)，(−3，−1)，(−3，−2)，(−3，−3). 另外4组非平凡解，它们分别是(4，1)，(−7，1)，(4，−4)，(−7，−4). 因此$(x,y)=(4,1)$是不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=35y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有的一组正整数解.

参考文献：

[1] COHN J H E. The Diophantine Equation $y(y+1)(y+2)(y+3)=2x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J]. Pacific J Math，1971，37(2)：331－335.

[2] PONNUDURAI T. The Diophantine Equation $y(y+1)(y+2)(y+3)=3x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J]. J London Math Soc，1975，10(2)：232－240.

[3] 宣体佐. 关于不定方程 $y(y+1)(y+2)(y+3)=5x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，1982(3)：27－34.

[4] 罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1991，8(1)：1－8.

[5] 程　瑶，马玉林. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2007，24(3)：27－30.

[6] 郭凤明，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(5)：101－105.

[7] 柯　召，孙　琦. 谈谈不定方程 [M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011：15－29.

[8] 柯　召，孙　琦. 数论讲义 [M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2001.

On the Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=35(y+1)(y+2)(y+3)$

LIU Hai-li，　LUO　Ming

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，with the method of recurrence sequences，we have shown that the diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=35y(y+1)(y+2)(y+3)$ has the only positive integer solution $(x，y)=(4，1)$.

Key words：diophantine equation；integer solution；recurrence sequence

责任编辑　廖　坤