DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.10.008

p-Lapacian 方程关于 Fučík 谱共振问题解的存在性[①]

宋树枝[1,2], 唐春雷[1]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067

摘要：当 $(a,b)\in\{\lambda_1\}\times[\lambda_1,+\infty)$ 或 $(a,b)\in[\lambda_1,+\infty)\times\{\lambda_1\}$ 时，在 f 至多线性增长的情况下，运用环绕定理证明了 p-Laplacian 方程

$$\begin{cases}-\Delta_p u = au_+^{p-1}-bu_-^{p-1}+f(x,u)-h(x) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

至少存在 1 个弱解.

关 键 词：Landesman-Lazer 条件；共振；Fučík 谱；环绕

中图分类号：O176.3 **文献标志码：A** **文章编号：**1673-9868(2016)10-0055-07

考虑方程

$$\begin{cases}-\Delta_p u = au_+^{p-1}-bu_-^{p-1}+f(x,u)-h(x) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中，$1<p<N$，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为有界区域，$\Delta_p u=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 为 p-Laplacian 算子，$u\pm=\max\{u,0\}$. 本文主要考察方程(1)关于 Fučík 谱共振意义下弱解的存在性. 算子 $-\Delta_p$ 的 Fučík 谱 Σ_p 是指由非线性特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta_p u = au_+^{p-1}-bu_-^{p-1} & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{2}$$

的非平凡解构成的集合，即

$$\Sigma_p=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\text{：方程(2)有非平凡解}\}$$

相关性质可参见文献[1-2]及其参考文献. 当 $a=b=\lambda\in\mathbb{R}$ 时，方程(2)即为算子 $-\Delta_p$ 的特征值问题. 显然，$(\lambda,\lambda)\in\Sigma_p$ 当且仅当 λ 是算子 $-\Delta_p$ 的特征值. 众所周知，$-\Delta_p$ 的第一特征值 λ_1 为正的、单的，且具有正的特征向量 $\varphi_1\in X\cap L^{\infty}(\Omega)\cap C^1(\Omega)$ 满足 $\int_\Omega\varphi_1^p\,\mathrm{d}x=1$. 于是，$\Sigma_p$ 包含 2 条平凡谱线 $\{\lambda_1\}\times\mathbb{R}$ 及 $\mathbb{R}\times\{\lambda_1\}$. 除此之外，文献[1]指出，$\{\lambda_1\}\times\mathbb{R}$ 及 $\mathbb{R}\times\{\lambda_1\}$ 在 Σ_p 中是孤立的，谱 Σ_p 中包含一条 Lipschitz 连续的谱线，被称为第一条非平凡谱线，并且该谱线在无穷远处以两条平凡谱线为渐近线. 文献[1]中的第一条非平凡谱线的具体构造如下：对 $s\geqslant 0$，定义：

$$S=\{u\in X\text{：}\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x=1\}\tag{3}$$

---

① 收稿日期：2015-12-23

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267)；重庆基础与前沿研究项目(cstc2014jcyjA00035)；重庆市教委科学技术研究项目(KJ1600618).

作者简介：宋树枝(1980-)，女，四川乐山人，讲师，理学博士，主要从事非线性泛函分析和偏微分方程的研究.

通信作者：唐春雷，教授，博士研究生导师.

$$J_s(u)=\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x - s\int_\Omega u_+^{p-1}\,\mathrm{d}x \qquad \forall u\in S$$

$$c(s)=\inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{t\in[0,1]} J_s(\gamma(t)) \tag{4}$$

其中

$$\Gamma_0=\{\gamma\in C([0,1],S):\gamma(0)=\varphi_1,\ \gamma(1)=-\varphi_1\} \tag{5}$$

则 $c(s)$ 是 J_s 的临界值，$c(s)$ 严格递减，$c(s)>\lambda_1$ 且 $c(0)=\lambda_2$(这里 λ_2 表示 $-\Delta_p$ 的第二个特征值). 相似地，对 $s\geqslant 0$，定义：

$$\widetilde{J}_s(u)=\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x - s\int_\Omega u_-^{p-1}\,\mathrm{d}x \qquad \forall u\in S$$

$$\tilde{c}(s)=\inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{t\in[0,1]} \widetilde{J}_s(\gamma(t)) \tag{6}$$

则 $\tilde{c}(s)$ 为 $\widetilde{J}_s$ 的临界值. 注意，$c(s)=\tilde{c}(s)$(见文献[3])，则第一条非平凡谱线为

$$\{(c(s)+s,\ c(s)):s\geqslant 0\}\cup\{(c(s),\ c(s)+s):s\geqslant 0\}$$

第一条非平凡谱线的结构在本文结论的证明中起到了关键性的作用. 具体结论如下.

定理 1 假设 $(a,b)\in\{\lambda_1\}\times[\lambda_1,+\infty)$ 且 $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，$h\in L^q(\Omega)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，满足：

(f_1) $|f(x,t)|\leqslant k_1(x)\in L^q(\Omega)$，对所有 $t>0$ 成立；

(f_2) $0<\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{f(x,t)}{|t|^{p-2}t}=b_1<c(b)-\lambda_1$，其中 $c(b)=\tilde{c}(b)$ 为(6)式定义的正数；

(f_3) $\int_\Omega h(x)\varphi_1\mathrm{d}x<\int_\Omega f^{+\infty}(x)\varphi_1\mathrm{d}x$，其中 $f^{+\infty}(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(x,t)$.

则方程(1)至少存在 1 个弱解.

注 1 我们首先强调，当 $(a,b)\in\{\lambda_1\}\times[\lambda_1,+\infty)$ 时，在条件(f_1),(f_2)下，方程(1)关于 Fučík 谱共振. 事实上，令

$$\widetilde{f}(x,t)=\lambda_1 t_+^{p-1}-bt_-^{p-1}+f(x,t)$$

则：

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\widetilde{f}(x,t)}{|t|^{p-2}t}=\lambda_1 \qquad \lim_{t\to-\infty}\frac{\widetilde{f}(x,t)}{|t|^{p-2}t}=b+b_1$$

这说明方程(2)在谱点 $(\lambda_1,\ b+b_1)$ 处共振. 针对此共振问题，我们要求非线性项 f 在相应的特征空间 span$\{\varphi_1\}$ 上满足 Landesman-Lazer 类型的条件(f_3). 其次，条件(f_2)表明：当 $t\to-\infty$ 时，f 是渐近线性的. 具有 Dirichlet 边界的 p-Laplacian 方程关于谱线 $\{\lambda_1\}\times\mathbb{R}$ 及 $\mathbb{R}\times\{\lambda_1\}$ 共振的结果可参见文献[3-6]. 值得注意的是，在这些文献中，非线性项 f 均满足下面的增长性条件：

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{f(x,t)}{t^{p-1}}=0 \qquad \text{a.e. } x\in\Omega \tag{7}$$

即 f 至多为次线性增长. 显然，定理 1 对非线性项 f 的限制更弱. 例如，令 $h(x)=c<\frac{\pi}{2}$，$M>0$ 为常数，及

$$f(t)=\begin{cases}\arctan(t) & t\geqslant 0\\ -M^{p-1}t\sin\dfrac{b_1}{t} & t\in[-M,0)\\ \| t|^p\sin\dfrac{b_1}{t} & t\leqslant -M\end{cases}$$

则 f 满足定理 1 的条件但不满足条件(7).

本文中，令 $X=W_0^{1,p}(\Omega)$，$\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 为相应的范数，$\|.\|_{L^r}$ 表示通常的 $L^r(\Omega)$ 上的

范数，$c\in\mathbb{R}$ 表示常数，$\varphi_1>0$ 表示第一特征向量且 $\|\varphi_1\|_{L^p}=1$. 定义泛函 $I_{(\lambda_1,b)}:X\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$I_{(\lambda_1,b)}(u)=\frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{\lambda_1}{p}\|u_+\|_{L^p}^p-\frac{b}{p}\|u_-\|_{L^p}^p-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+\int_\Omega hu\,\mathrm{d}x$$

这里

$$F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$$

显然，泛函 $I_{(\lambda_1,b)}\in C^1(X,\mathbb{R})$. 根据标准的变分法的理论，方程(1)的弱解为泛函 $I_{(\lambda_1,b)}$ 的临界点. 注意 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域，由 Sobolev 嵌入定理可知，存在常数 $C>0$，使得

$$\|u\|_{L^r}\leqslant C\|u\|\qquad\forall u\in X\tag{8}$$

接下来，为了运用临界点理论证明定理 1，我们首先验证(PS)条件成立.

引理 1　假设 f 满足条件$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_3)$，则泛函 $I_{(\lambda_1,b)}$ 满足(PS)条件.

证　设$\{u_n\}\subset X$ 为(PS)序列，即当 $n\to\infty$ 时，$|I_{(\lambda_1,b)}(u_n)|\leqslant c$，且 $I'_{(\lambda_1,b)}(u_n)\to 0$. 因为 f 至多为线性增长，所以我们只需证明$\{u_n\}$在 X 中有界即可. 由反证法，不妨假设当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n\|\to\infty$. 令 $v_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则$\{v_n\}$在 X 中有界，从而存在 $v\in X$，使得：

$$\begin{cases}v_n\rightharpoonup v & x\in X\\ v_n\to v & x\in L^p(\Omega)\\ v_n\to v & \text{a. e. } x\in\Omega\end{cases}\tag{9}$$

并且，存在一个函数 $Z\in L^p(\Omega)$ 满足 $Z(x)\geqslant 0$(a. e. $x\in\Omega$)，使得 $|v_n(x)|\leqslant Z(x)$(a. e. $x\in\Omega$). 对 $\forall\phi\in X$，有

$$\left\langle\frac{I'_{(\lambda_1,b)}(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}},\phi\right\rangle=\int_\Omega|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x-\lambda_1\int_\Omega(v_n)_+^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x+b\int_\Omega(v_n)_-^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{h(x)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x\to 0\qquad n\to\infty\tag{10}$$

下面逐个讨论(10)式中的项. 首先，由(9)式可知：

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_\Omega(v_n)_+^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x=\int_\Omega v_+^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x\\ \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_\Omega(v_n)_-^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x=\int_\Omega v_-^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x\end{cases}\qquad\forall\phi\in X\tag{11}$$

对 $h\in L^q(\Omega)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|u_n\|^{p-1}}\int_\Omega h(x)\phi\,\mathrm{d}x=0\qquad\forall\phi\in X\tag{12}$$

下面证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x=-\int_\Omega b_1v_-^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x\qquad\forall\phi\in X\tag{13}$$

令：

$$\Omega_+=\{x\in\Omega: v(x)>0\}$$
$$\Omega_-=\{x\in\Omega: v(x)<0\}$$
$$\Omega_0=\{x\in\Omega: v(x)=0\}$$

由(9)式，当 $n\to\infty$ 时，$u_n(x)=\|u_n\|v_n(x)\to+\infty$(或$-\infty$)对 $x\in\Omega_+$(或 Ω_-)几乎处处成立. 因此，条件(f_1)表明

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega_+}\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|u_n\|^{p-1}}\int_{\Omega_+}|f(x,u_n)\phi|\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|u_n\|^{p-1}}\int_{\Omega_+}k_1(x)|\phi|\,\mathrm{d}x=0\qquad\forall\phi\in X\tag{14}$$

由条件(f_2)知，存在 $M>0$，使得当 $t<-M$ 时，$\left|\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}\right|<b_1+1$. 于是，运用 Lebesgue 控制收敛定理可知，对 $\forall \phi \in X$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_-}\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_-}\frac{f(x,u_n)}{u_n^{p-1}}v_n^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x=-\int_{\Omega_-}b_1v_-^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

当 $x\in\Omega_0$ 时，$v_n(x)\to 0$ 几乎处处成立，且

$$\int_{\Omega_0}\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x=\int_{\{\Omega_0:\,u_n<-M\}}\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\{\Omega_0:\,-M\leqslant u_n\leqslant M\}}\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x+\int_{\{\Omega_0:\,u_n>M\}}\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x$$

类似(14),(15)式可证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_0}\frac{f(x,u_n)\phi}{\|u_n\|^{p-1}}\mathrm{d}x=0\qquad \forall \phi\in X$$

综上可知(13)式成立.

将(11),(12)及(13)式代入(10)式，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x-\lambda_1\int_{\Omega}v_+^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x+(b+b_1)\int_{\Omega}v_-^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x=0\qquad \forall\phi\in X \tag{16}$$

取 $\phi=v_n-v$，(16)式变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\cdot(\nabla v_n-\nabla v)\mathrm{d}x=0$$

于是，运用 Hölder's 不等式得

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}(|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot(\nabla v_n-\nabla v)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^{p-1}-\|v\|^{p-1})(\|v_n\|-\|v\|)\geqslant 0$$

这表明

$$\|v\|=\lim_{n\to\infty}\|v_n\|=1$$

又根据空间 X 的一致凸性得：$v_n\to v$ 在 X 中强收敛，从而(16)式可表示为

$$\int_{\Omega}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x=\lambda_1\int_{\Omega}v_+^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x-(b+b_1)\int_{\Omega}v_-^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x=0\qquad\forall\phi\in X \tag{17}$$

(17)式蕴含事实：$v\in X$ 是 $-\Delta_p u=\lambda_1u_+^{p-1}-(b+b_1)u_-^{p-1}$ 的非平凡解，故 $v=\mathrm{span}\{\phi_1\}$. 令 $v=t_0\varphi_1$，t_0 为常数. 我们断言 $t_0>0$. 若 $t_0<0$，则 $v=-v_-$ 且 $v^+=0$，(17)式可改写为

$$\int_{\Omega}|\nabla v_-|^{p-2}\nabla v_-\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x=(b+b_1)\int_{\Omega}v_-^{p-1}\phi\,\mathrm{d}x\qquad\forall\phi\in X$$

这暗示 $b+b_1$ 为 $-\Delta_pu=\lambda|u|^{p-2}u$ 的非平凡解，且 $-v_-=t_0\varphi_1$ 为相应的特征向量，与 $b+b_1>\lambda_1$ 矛盾. 因此，$t_0>0$，$v=v_+$，$v_-=0$. 于是，当 $n\to\infty$ 时，$u_n(x)=v_n(x)\|u_n\|\to+\infty$，这使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x,u_n)v_n\mathrm{d}x=f^{+\infty}(x)v(x) \tag{18}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n(x))}{\|u_n\|}=\lim_{n\to\infty}v_n(x)\frac{1}{u_n(x)}\int_0^{u_n(x)}f(x,s)\mathrm{d}s=f^{+\infty}(x)v(x) \tag{19}$$

其中第二个极限可由 L'Hospitial 法则得到. 联合(18),(19)式，$v=t_0\phi_1>0$ 及

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{\langle I'_{(\lambda_1,b)}(u_n),u_n\rangle-pI(u_n)}{\|u_n\|}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega}\frac{p\,F(x,u_n)}{\|u_n\|}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}f(x,u_n)v_n\mathrm{d}x-(p-1)\int_{\Omega}h(x)v_n\mathrm{d}x\right)$$

可知

$$\int_\Omega f^{+\infty}(x)\varphi_1\mathrm{d}x=\int_\Omega h(x)\varphi_1\mathrm{d}x$$

这与条件(f_3)矛盾.

接下来，我们考察泛函 $I_{(\lambda_1,b)}$ 的几何性质.

引理 2　假设条件(f_1)－(f_3)成立，则存在常数 $T_b>0$，使得

$$\max\{I_{(\lambda_1,b)}(T_b\varphi_1),\ I_{(\lambda_1,b)}(-T_b\varphi_1)\}<\inf_{\widetilde{E}_b}I_{(\lambda_1,b)}\tag{20}$$

其中

$$\widetilde{E}_b=\{u\in X:\ \|u\|^p-b\|u_-\|_{L^p}^p\geqslant c(b)\|u\|_{L^p}^p\}$$

证　此证明分 3 步完成.

第一步，验证 $\inf\limits_{\widetilde{E}_b}I_{(\lambda_1,b)}>-\infty$. 根据条件($\mathrm{f}_1$)和($\mathrm{f}_2$)，存在常数 $C_\varepsilon>0$，使得

$$|F(x,t)|\leqslant\frac{b_1+\varepsilon}{p}t^p+C_\varepsilon|t|\qquad\forall(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}\tag{21}$$

对 $\forall w\in\widetilde{E}_b$，由(8),(21)式及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}I_{(\lambda_1,b)}(w)=&\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla w|^p\mathrm{d}x-\frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega|w_+|^p\mathrm{d}x-\frac{b}{p}\int_\Omega|w_-|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,w)\mathrm{d}x+\int_\Omega h(x)w\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{p}(c(b)-\lambda_1)\|w\|_{L^p}^p+\frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega w_-^p\,\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,w)\mathrm{d}x+\int_\Omega h(x)w\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{p}[c(b)-(\lambda_1+b_1+\varepsilon)]\|w\|_{L^p}^p+\frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega|w_-|^p\mathrm{d}x-(\|h\|_{L^p}+C_\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{q}})\|w\|_{L^p}\geqslant\\&\frac{1}{p}[c(b)-(\lambda_1+b_1+\varepsilon)]\|w\|_{L^p}^p-(\|h\|_{L^p}+C_\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{q}})\|w\|_{L^p}\end{aligned}$$

注意 $b_1<c(b)-\lambda_1$(见条件(f_2))，取 $\varepsilon<\frac{1}{2}[c(b)-(\lambda_1+b_1)]$，则

$$I_{(\lambda_1,b)}(w)\geqslant\frac{1}{2p}[c(b)-(\lambda_1+b_1)]\|w\|_{L^p}^p-(\|h\|_{L^p}+D_\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{q}})\|w\|_{L^p}$$

对 $t\geqslant0$，令

$$g(t)=At^p-Bt$$

其中：

$$A=\frac{1}{2p}[c(b)-(\lambda_1+b_1)]>0\qquad B=(\|h\|_{L^p}+D_\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{q}})>0$$

不难发现

$$g_{\min}(t)=A\left(\frac{B}{pA}\right)^{\frac{p}{p-1}}-B\left(\frac{B}{pA}\right)^{\frac{1}{p-1}}>-\infty$$

即

$$\inf_{\widetilde{E}_b}I_{(\lambda_1,b)}>-\infty$$

第二步，用反证法证明，当 $t\to+\infty$ 时，$I_{(\lambda_1,b)}(t\varphi_1)\to-\infty$. 设存在序列$\{t_n\}\in\mathbb{R}$(使得当 $n\to\infty$ 时 $t_n\to+\infty$)及常数 c，满足

$$\liminf_{n\to\infty}I_{(\lambda_1,b)}(t_n\varphi_1)\geqslant c$$

则

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{I_{(\lambda_1,b)}(t_n\varphi_1)}{t_n}\geqslant0\tag{22}$$

注意

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x,\ t_n\varphi_1)}{t_n\varphi_1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{t_n\varphi_1}f(x,\ s)\mathrm{d}s}{t_n\varphi_1}=f^{+\infty}(x)\varphi_1$$

因此，由条件(f_3)及 Fatou 引理得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{I_{(\lambda_1,\ b)}(t_n\varphi_1)}{t_n}=-\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{F(x,\ t_n\varphi_1)}{t_n}+\int_\Omega h\varphi_1\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\int_\Omega\liminf_{n\to\infty}\frac{F(x,\ t_n\varphi_1)}{t_n\varphi_1}\varphi_1+\int_\Omega h\varphi_1\mathrm{d}x=$$

$$-\int_\Omega f^{+\infty}(x)\varphi_1\mathrm{d}x+\int_\Omega h\varphi_1\mathrm{d}x<0$$

与(22)式矛盾. 从而，$\lim\limits_{t\to+\infty}I_{(\lambda_1,\ b)}(t\varphi_1)=-\infty$ 成立.

第三步，验证 $\lim\limits_{t\to-\infty}I_{(\lambda_1,\ b)}(t\varphi_1)=-\infty$. 由条件($f_2$)知，对 $\forall\varepsilon\in(0,b_1)$，存在常数 $D_\varepsilon>0$，使得

$$F(x,\ t)\geqslant\frac{b_1-\varepsilon}{p}\mid t\mid^p-D_\varepsilon\mid t\mid$$

对 $t\leqslant 0$ 及 $x\in\Omega$ 几乎处处成立. 因此，结合 Hölder 不等式可知，当 $t\to-\infty$ 时，有

$$I_{(\lambda_1,\ b)}(t\varphi_1)=(\lambda_1-b)\frac{\mid t\mid^p}{p}-\int_\Omega F(x,\ t\varphi_1)\mathrm{d}x+t\int_\Omega h(x)\varphi_1\mathrm{d}x\leqslant$$

$$(\lambda_1-b-b_1+\varepsilon)\frac{\mid t\mid^p}{p}-t(\parallel h\parallel_{L^q}+D_\varepsilon\mid\Omega\mid^{\frac{1}{q}})\tag{23}$$

注意到 $\lambda_1-b-b_1+\varepsilon<0$，这是因为 $(\lambda_1,b)\in\{\lambda_1\}\times[\lambda_1,+\infty)$ 且 $\varepsilon\in(0,b_1)$. 因此，(23)式表明 $\lim\limits_{t\to-\infty}I_{(\lambda_1,\ b)}(t\varphi_1)=-\infty$ 成立.

上述事实说明存在足够大的常数 $T_b>0$，使得(20)式成立.

令：

$$Q=[-T_b\varphi_1,\ T_b\varphi_1]\qquad\partial Q=\{-T_b\varphi_1,\ T_b\varphi_1\}$$

和

$$\Gamma_b=\{\gamma\in C([0,1],X):\gamma(0)=T_b\varphi_1,\ \gamma(1)=-T_b\varphi_1\}\tag{24}$$

其中 T_b 为引理 2 中给定的常数. 于是，下面的环绕结构成立：

引理 3 假设 $b\geqslant\lambda_1$ 并且条件(f_1)-(f_3)成立，则(Q，∂Q)与 $\widetilde{E}_b$ 环绕.

证 只需验证 $\gamma([-1,1])\cap\widetilde{E}_b\neq\varnothing(\forall\gamma\in\Gamma_b)$($\Gamma_b$ 的定义见(24)式即可，这是因为 $\partial Q\cap\widetilde{E}_b=\varnothing$ 显然成立). 若 $0\in\gamma([-1,1])$，则 $0\in\widetilde{E}_b$，结论成立. 下面假设 $0\notin\gamma([-1,1])$. 令 π 为 S(S 的定义见(3)式)上的径向投影，即

$$\pi(u)=\frac{u}{\parallel u\parallel_{L^p}}\qquad\forall u\neq 0$$

因为

$$(\pi\circ\gamma)(-1)=\pi(\gamma(-1))=\pi(-T_b\varphi_1)=-\varphi_1$$

且

$$(\pi\circ\gamma)(1)=\pi(\gamma(1))=\pi(T_b\varphi_1)=\varphi_1$$

所以 $\pi\circ\gamma\in\Gamma_0$($\Gamma_0$ 的定义见(5)式). 根据(6)式及 $c(b)=\tilde{c}(b)$ 知，存在 $t_0\in[-1,1]$，使得

$$J_b(\pi\circ\gamma(t_0))\geqslant c(b)$$

记

$$u_0=\gamma(t_0)$$

则

$$\parallel\nabla u_0\parallel^p-b\parallel u_{0-}\parallel_{L^p}^p\geqslant c(b)\parallel u_0\parallel_{L^p}^p$$

即 $u_0\in\widetilde{E}_b$. 于是，由 γ 的任意性可知结论成立.

定理 1 的证明　根据引理 1、引理 2 和引理 3，并运用经典的环绕定理(见文献[7] 的定理 8.4) 可得 $I_{(\lambda_1, b)}$ 存在临界点，且对应的临界值为

$$c(\lambda_1, b) = \inf_{\gamma \in \Gamma_b} \max_{t \in [0, 1]} I_{(\lambda_1, b)}(\gamma(t))$$

因此，方程(1) 至少有 1 个弱解.

最后，类似定理 1 的证明过程，可得到如下的对称性的结论：

定理 2　假设$(a, b) \in [\lambda_1, +\infty) \times \{\lambda_1\}$，$h \in L^q(\Omega)$，$f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，满足：

(f_4)　$|f(x, t)| \leqslant k_2(x) \in L^q(\Omega)$ 对所有 $t < 0$ 成立；

(f_5)　$0 < \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(x, t)}{|t|^{p-2} t} = b_2 < c(a) - \lambda_1$，其中 $c(a)$ 是由(4) 式所定义的正数；

(f_6)　$\int_\Omega h(x) \varphi_1 \mathrm{d}x > \int_\Omega f_{-\infty}(x) \varphi_1 \mathrm{d}x$，其中 $f_{-\infty}(x) = \lim\limits_{t \to -\infty} f(x, t)$.

则方程(1) 至少存在 1 个弱解.

参考文献：

[1] CUESTA M，FIGUEIREDO D，GOSSEZ J P. The Beginning of the Fučík Spectrum for the p-Laplacian [J]. J Differential Equations，1999，159(1)：212－238.

[2] DANCER N，KANISHKA P. Some Remarks on the Fučík Spectrum of the p-Laplacian and Critical Groups [J]. J Math Anal Appl，2001，254(1)：164－177.

[3] TANAKA M. Existence of a Non-Trivial Solution for the p-Laplacian Equation with Fučík Type Resonance at Infinity II [J]. Nonlinear Anal，2009，71(7－8)：3018－3030.

[4] TANAKA M. Existence of a Non-Trivial Solution for the p-Laplacian Equation with Fučík Type Resonance at Infinity [J]. Nonlinear Anal，2009，70(6)：2165－2175.

[5] TANAKA M. Existence of a Non-Trivial Solution for the p-Laplacian Equation with Fučík-Type Resonance at Infinity III [J]. Nonlinear Anal，2010，72(1)：507－526.

[6] MOTREANU D，TANAKA M. Sign-Changing and Constant-Sign Solutions for p-Laplacian Problems with Jumping Nonlinearities [J]. J Differential Equations，2010，249(12)：3352－3376.

[7] STRUWE M. Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems [M]. Berlin：Springer-Verlag，1996.

Existence of Solutions for Resonance with Respect to Fuĉík for p-Laplcian Equation

SONG Shu-zhi[1,2]，　TANG Chui-lei[1]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；

2. School of Mathematics and Statistics，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China

Abstract：When $(a, b) \in \{\lambda_1\} \times [\lambda_1, +\infty)$ or $(a, b) \in [\lambda_1, +\infty) \times \{\lambda_1\}$，$f$ has at most linear growth，the existence of solutions is obtained by applying the link theorem for the p-Laplacian equation

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a u_+^{p-1} - b u_-^{p-1} + f(x, u) - h(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Key words：Landesman-Lazer condition；resonance；Fučík spectrum；link

责任编辑　廖　坤