DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.10.009

多线性奇异积分算子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性①

李　睿，　陶双平

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：利用函数分层分解方法和 A_p 权不等式等工具，证明了多线性奇异积分算子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性.

关　键　词：多线性奇异积分算子；Morrey-Herz 空间；A_p 权

中图分类号：O177.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2016)10－0062－06

设 $\Omega \in L^r(S^{n-1})(r \geqslant 1)$ 是零阶齐次函数，其中 S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面. 令 A 是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，并满足 $D^\alpha A \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)(|\alpha|=m)$. 多线性奇异积分算子 T_A 定义为

$$T_A = \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{m+n}} R_{m+1}(A;x,y) f(y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

其中 $R_{m+1}(A;x,y)$ 表示函数 A 在 x 处关于 y 的 $m+1$ 阶 Taylor 级数余项，即

$$R_{m+1}(A;x,y) = A(x) - \sum_{|\alpha|<m+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha A(y)(x-y)^\alpha$$

相应地，T_A 的极大函数定义为

$$M_A f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon^{m+n}} \int_{|x-y|<\varepsilon} |\Omega(x-y) R_{m+1}(A;x,y) f(y)|\mathrm{d}y \tag{2}$$

当 $\Omega \in \mathrm{Lip}_1$ 且满足一阶消失矩时，文献[1－2]得到了 T_A 的 L^p 有界性. 文献[3]将 L^p 有界性的条件推广到了 $\Omega \in \bigcup_{q>1} L^q(S^{n-1})$. 随后，文献[4－5]在 Ω 满足一定的尺寸条件下证明了 T_A 的 L^p 有界性结果. 有关 T_A 的加权有界性和端点估计参见文献[6－10]. 本文的主要目的是建立 T_A 在 Morrey-Herz 空间上的加权有界性. 首先回顾加权 Morrey-Herz 空间的定义：

设 $\omega(x)$ 为非负可测函数. 用 $L^p(\omega)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的加权 Lebesgue 空间，定义为

$$L^p(\omega) = \left\{ f:\ \|f\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

记 $k \in \mathbb{Z}$，$B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 2^k\}$，$D_k = B_k - B_{k-1}$，用 $X_k = X_{D_k}$ 表示集合 D_k 的特征函数. 设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，$\lambda \geqslant 0$，$0 < p, q \leqslant \infty$，$\omega_1$ 和 ω_2 是非负可测函数，则加权齐次 Morrey-Herz 空间 $MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ 定义为

$$MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2) = \{ f \in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \omega_2) : \|f\|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)} < \infty \}$$

其中

---

① 收稿日期：2015－12－17
基金项目：国家自然科学基金项目(11561062).
作者简介：李　睿(1990－)，甘肃天水人，硕士研究生，主要从事调和分析的研究.
通信作者：陶双平，教授，博士研究生导师.

$$\| f \|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1,\omega_2)} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} \omega_1(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \| f X_k \|_{L^q(\omega_2)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 时取通常的极限形式.

通常的齐次 Morrey-Herz 空间 $MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ $(\omega_1=\omega_2=1)$ 是由文献[11]引入的，有关该类空间上算子有界性的结果参见文献[12-14].

设 Ω 为零次齐次函数，$\Omega \in L^r(S^{n-1})$，$r \geqslant 1$，称

$$\omega_r(\delta) = \sup_{|\rho| \leqslant \delta} \left(\int_{S^{n-1}} | \Omega(\rho x) - \Omega(x) |^r \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}}$$

为 Ω 的 L^r 连续模[15]，其中sup取自球面 S^{n-1} 上的所有旋转 ρ，$|\rho|$ 表示 ρ 与恒等旋转间的距离. 称 Ω 满足 L^r-Dini 条件是指

$$\int_0^1 \frac{\omega_r(\delta)}{\delta} \mathrm{d}\delta < \infty \tag{3}$$

设 f 为一局部可积函数，对任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$，记 $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\mathrm{d}x$，BMO 空间定义为

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{\mathrm{loc}}^1 \mathbb{R}^n : \| f \|_{\mathrm{BMO}} = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B | f(x) - f_B | \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

用 A_p 表示 Muckenhoupt 权类[15]，本文的主要结果如下：

定理 1 设零阶齐次函数 $\Omega \in L^r(S^{n-1})$ $(r \geqslant 1)$ 满足(3)式和

$$\int_{S^{n-1}} x^\alpha \Omega(x) \mathrm{d}x = 0 \qquad | \alpha | = m$$

A 是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，满足 $D^\alpha A \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ $(|\alpha| = m)$，T_A 由(1)式定义. 如果 $1 < q < \infty$，$0 < p \leqslant \infty$，$\lambda > 0$，及

$$\frac{\lambda}{\delta} - \frac{n}{q} < \alpha < \delta\lambda + n\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{n-1}{nr}\right)$$

其中 δ 由下面引理 3 所给定，那么，当 $\omega_1, \omega_2 \in A_1$，$q' < r \leqslant \infty$ 时，算子 T_A 在加权 Morrey-Herz 空间 $MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ 上是有界的.

全文中，p' 表示 $p \geqslant 1$ 的共轭指标，即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. C 表示与主要参数无关的常数，其值在不同的地方不尽相同.

引理 1[16] 设 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $A(x)$ 的 m 阶偏微商属于 $L^r(\mathbb{R}^n)$ $(r \geqslant 1)$，则

$$| R_{m+1}(A; x, y) | \leqslant C | x - y |^m \sum_{|\alpha| = m} \left(\frac{1}{|I_x^y|} \int_{I_x^y} | D^\alpha A(z) |^r \mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{r}}$$

其中 I_x^y 是以 x 为中心，以 $2\sqrt{n}\ | x - y |$ 为边长，且边平行于坐标轴的方体.

引理 2[6] 设 $1 < q < \infty$，$\Omega \in L^r(S^{n-1})$，$q' < r \leqslant \infty$，则由(1)式定义的算子 T_A 在 $L^q(\omega)$ 上有界.

引理 3[17] 设 $\omega \in A_1$，$B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : | x | \leqslant 2^k\}$，$k \in \mathbb{Z}$，则存在常数 $C > 0$ 及 $0 < \delta < 1$，使得

$$\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_j)} \leqslant \begin{cases} C 2^{(k-j)n\delta} & k \leqslant j \\ C 2^{(k-j)n} & k > j \end{cases}$$

定理 1 的证明

对任意的 $f \in MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$，记

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x) X_j(x) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x)$$

则有

$$\| T_A f \|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1,\omega_2)} = \sup_{k_0 \in \mathbb{R}} [\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \| T_A f X_k \|_{L^q(\omega_2)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbb{R}}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}\|(T_Af_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}+$$
$$C\sup_{k_0\in\mathbb{R}}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k-2}^{k+2}\|(T_Af_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}+$$
$$C\sup_{k_0\in\mathbb{R}}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k+3}^{\infty}\|(T_Af_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}=$$
$$E_1+E_2+E_3$$

首先估计 E_2. 由引理 2 可知

$$E_2\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbb{R}}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k-2}^{k+2}\|f_j\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$C\sup_{k_0\in\mathbb{R}}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_k\|_{L^q(\omega_2)}^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$C\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1,\omega_2)}$$

下面估计 E_1. 注意到

$$\|(T_Af_j)X_k\|_{L^q(\omega_2)}\leqslant C_1\|(M_Af_j)X_k\|_{L^q(\omega_2)}\leqslant C_2\|(T_Af_j)X_k\|_{L^q(\omega_2)}$$

分两种情况来分别讨论：

情况 1　$m=0$.

这时 $R_{m+1}(A;x,y)=A(x)-A(y)$. 用 a_j 表示 A 在 B_j 上的平均值. 注意到 $k\geqslant j+3$，由 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 函数的性质可得

$$\|(T_Af_j)X_{k_{L^q(\omega_2)}}\|\leqslant C\|(M_Af_j)X_k\|_{L^q(\omega_2)}\leqslant$$
$$C2^{-kn}\Big(\int_{A_k}\Big(\int_{A_j}|\Omega(x-y)||A(x)-A(y)||f_j(y)|\mathrm{d}y\Big)^q\omega_2(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$
$$C2^{-kn}\Big(\int_{A_k}\Big(\int_{A_j}|\Omega(x-y)||A(x)-a_j||f_j(y)|\mathrm{d}y\Big)^q\omega_2(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}+$$
$$C2^{-kn}\Big(\int_{A_k}\Big(\int_{A_j}|\Omega(x-y)||A(y)-a_j||f_j(y)|\mathrm{d}y\Big)^q\omega_2(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\equiv$$
$$F_1+F_2$$

先估计 F_1. 利用 Hölder 不等式得

$$F_1\leqslant C2^{-kn}\Big(\int_{A_k}|A(x)-a_j|^q\Big(\int_{A_j}|\Omega(x-y)||f_j(y)|\mathrm{d}y\Big)^q\omega_2(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$
$$C2^{-kn}\Big(\int_{A_k}|A(x)-a_j|^q\Big(\Big(\int_{A_j}|\Omega(x-y)|^{q'}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q'}}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big)^q\omega_2(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$
$$C2^{-kn}\Big(\int_{A_k}|A(x)-a_j|^q\Big(\Big(\int_{A_j}|\Omega(x-y)|^r\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_{A_j}\Big)^{\frac{1}{s}}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big)^q\omega_2(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$
$$C2^{-kn}2^{\frac{jn}{s}}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big(\int_{A_k}|A(x)-a_j|^q\Big(\int_{x+B_j}|\Omega(y)|^r\mathrm{d}y\Big)^{\frac{q}{r}}\omega_2(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$
$$C2^{-kn}2^{\frac{jn}{s}}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big(\int_{A_k}|A(x)-a_j|^q\Big(\int_{|x|-2^j}^{|x|+2^j}v^{n-1}\mathrm{d}v\int_{S^{n-1}}|\Omega(y')|^r\mathrm{d}y'\Big)^{\frac{q}{r}}\omega_2(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$
$$C\|A\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}\|2^{-kn}2^{\frac{jn}{s}}2^{\frac{j+kn-k}{r}}(k-j)\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}[\omega_2(x)]^{\frac{1}{q}}$$

其中$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$，$\frac{1}{q'}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$. 由引理 3，得

$$\begin{aligned}\| f_j \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} [\omega_2(x)]^{\frac{1}{q}} \leqslant C \| f_j \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} [\omega_2(x)]^{\frac{1}{q}} \left[\frac{\omega_2(B_k)}{\omega_2(B_j)}\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \\ C2^{\frac{(k-j)n}{q}} \| f_j \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} [\omega_2(x)]^{\frac{1}{q}} \leqslant \\ C2^{\frac{(k-j)n}{q}} \| f_j \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} [| B_j | \operatorname*{ess\,inf}_{y\in B_j} \omega_2(y)]^{\frac{1}{q}} \leqslant \\ C2^{\frac{kn}{q}} \| f_j \|_{L^q(\omega_2)}\end{aligned}$$

因此

$$F_1 \leqslant C(k-j) \| A \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \| \Omega \|_{L^r(S^{n-1})} \| 2^{n(j-k)\left(1-\frac{1}{q}-\frac{n-1}{nr}\right)} \| f_j \|_{L^q(\omega_2)}$$

类似地，我们有

$$F_2 \leqslant C(k-j) \| A \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \| \Omega \|_{L^r(S^{n-1})} \| 2^{n(j-k)\left(1-\frac{1}{q}-\frac{n-1}{nr}\right)} \| f_j \|_{L^q(\omega_2)}$$

所以

$$\| (T_A f_j) X_k \|_{L^q(\omega_2)} \leqslant C \| A \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \| \Omega \|_{L^r(S^{n-1})} \| 2^{n(j-k)\left(1-\frac{1}{q}-\frac{n-1}{nr}\right)} \| f_j \|_{L^q(\omega_2)}$$

情况 2　$m \geqslant 1$.

设

$$\overline{A}(x) = A(x) - \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} m_{B_j}(D^\alpha A) x^\alpha$$

其中，$m_{B_j}(g)$ 表示 g 在 B_j 上的平均值. 易知

$$R_{m+1}(A;x,y) = R_{m+1}(\overline{A};x,y)$$

注意到，当 $k \geqslant j+3$，$x \in A_k$，$y \in A_j$ 时，$|x-y| \approx 2^k$. 由于

$$R_{m+1}(A;x,y) = R_{m+1}(\overline{A};x,y) = R_m(\overline{A};x,y) - \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \overline{A}(y)(x-y)^\alpha$$

所以

$$|R_{m+1}(A;x,y)| \leqslant |R_m(\overline{A};x,y)| + \sum_{|\alpha|=m} \left| \frac{1}{\alpha!} \overline{A}(y) \right| |x-y|^m$$

由引理 1 得

$$|R_m(\overline{A};x,y)| \leqslant C |x-y|^m \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{1}{|I_x^y|} \int_{I_x^y} |D^\alpha A(Z) - m_{B_j}(D^\alpha A)|^s \mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{s}}$$

注意到，$I_x^y \subset 2nB_{k+1}$，所以

$$|R_m(\overline{A};x,y)| \leqslant C |x-y|^m (k-j) \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha A \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R})^n}$$

因此

$$\begin{aligned}\| (T_A f_j) X_k \|_{L^q(\omega_2)} \leqslant 2^{-k(m+n)} \left(\int_{A_k} \left(\int_{A_j} |\Omega(x-y)| |R_m(\overline{A};x,y)| |f_j(y)| \mathrm{d}y \right)^q \omega_2(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} + \\ C \sum_{|\alpha|=m} 2^{-kn} \left(\int_{A_k} \left(\int_{A_j} |\Omega(x-y)| |D^\alpha A(Z) - m_{B_j}(D^\alpha A)| |f_j(y)| \mathrm{d}y \right)^q \omega_2(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} = \\ G_1 + G_2\end{aligned}$$

于是，类似于 F_1 的估计方法，有

$$G_1, G_2 \leqslant C(k-j) \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha A \|_{\mathrm{BMO}} \| \Omega \|_{L^r(S^{n-1})} 2^{n(j-k)\left(1-\frac{1}{q}-\frac{n-1}{nr}\right)} \| f_j \|_{L^q(\omega_2)}$$

因此

$$\|(T_A f_j)X_k\|_{L^q(\omega_2)} \leqslant C(k-j)\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{\mathrm{BMO}}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}2^{n(j-k)\left(1-\frac{1}{q}-\frac{n-1}{nr}\right)}(k-j)\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}$$

于是，有

$$E_1 \leqslant C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_n)}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}\sup_{k_0\in\mathbb{R}}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\times$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-3}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}2^{(k-j)\left(\alpha-n\left(1-\frac{1}{q}-\frac{n-1}{nr}\right)\right)}(k-j)\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

注意到

$$[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}=\left([\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q(\omega_2)}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\left(\sum_{l=-\infty}^{j}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_l\|^p_{L^q(\omega_2)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

因此

$$E_1 \leqslant C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_n)}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}\sup_{k_0\in\mathbb{R}}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\times$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-3}2^{(k-j)\left(\alpha-n\left(1-\frac{1}{q}-\frac{n-1}{nr}\right)\right)}(k-j)[\omega_1(B_j)]^{\frac{\lambda}{n}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}=$$

$$CJ\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_n)}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}$$

注意到 $\alpha < n\left(1-\dfrac{1}{q}-\dfrac{n-1}{nr}\right)+\delta\lambda$，$\lambda>0$，有

$$J=\sup_{k_0\in\mathbb{R}}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-3}2^{(k-j)\left(\alpha-n\left(1-\frac{1}{q}-\frac{n-1}{nr}\right)\right)}(k-j)[\omega_1(B_k)]^{\frac{\lambda}{n}}\left[\frac{\omega_1(B_j)}{\omega_1(B_k)}\right]^{\frac{\lambda}{n}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbb{R}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left[\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_{k_0})}\right]^{\frac{\lambda p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbb{R}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{(k-k_0)\delta\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C$$

因此

$$E_1 \leqslant C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_n)}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}$$

最后，我们估计 E_3. 同估计 E_1 的方法一样，可以得到

$$E_3 \leqslant C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_n)}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}$$

综上所述，定理 1 证毕.

参考文献：

[1] COHEN J. A Sharp Estimate for a Multilinear Sungular Integrals [J]. Indiana Univ Math，1981，30(4)：693—702.

[2] COHEN J，GOSSELIN J. On Multilinear Singular Integrals on $\mathbb{R}^n$ [J]. Studia Mathematica，1982，72(2)：199—233.

[3] HOFMANN S. On Certain Nonstandard Calderón-Zymund Operators [J]. Studia Math，1994，109(2)：105—131.

[4] HU G E. $L^2(\mathbb{R}^n)$ Bounedness for a Class of Multilinear Singular Integral Operators [J]. Acta Mathematica Sinica(English Series)，2003，19(3)：693—720.

[5] HU G E. L^p Bounedness for the Multilinear Singular Integral Operator [J]. Integr Equ Oper Theory，2005，52(3)：437—449.

[6] HU G E. On a Multilinear Singular Integral Operator [J]. Approximation Theory and Its Applications，1995，11(4)：90—107.

[7] HU G E，YANG D C. Sharp Function Estimates and Weighted Norm Ineqalities for Multilinear Singular Integral Operators [J]. Bull London Math Soc，2003，35(3)：759—769.

[8] DING Y, LU S Z. Weighted Bounedness for a Class of Rough Multilinear Operators [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2001, 17(2): 517-526.

[9] MO H X, YU D Y, ZHOU H P. Generalized Higher Commutators Generated by the Multilinear Fractional Integrals and Lipschitz Functions [J]. Turkish Journal of Mathematics, 2014, 38(4): 851-861.

[10] 陶双平,冯进喜.一类多线性奇异积分的弱型估计 [J].数学学报,2009,52(3):515-522.

[11] LU S Z, XU L F. Bounedness of Rough Singular Operators on the Homogeneous Morrey-Herz Spaces [J]. Hokkaido Math J, 2005, 34: 299-314.

[12] LU S Z, YANG D C. The Decomposition of Weighted Herz Space on $\mathbb{R}^n$ and Its Applications [J]. Sci China(Ser A), 1995, 38(2): 147-158.

[13] 陶双平,武江龙.齐次 Morrey-Herz 空间上粗糙核高阶交换子的有界性 [J].数学进展,2007,36(5):607-616.

[14] 龚少花,陶双平,温学平.广义 Hausdorff 算子的加权 Lipschitz 估计 [J].西南大学学报(自然科学版),2014,36(6):111-115.

[15] MUCKENHOUP B. Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function [J]. Transactuons of the American Mathematical Society, 1972, 165: 207-226.

[16] CHEN W G, HU G E, LU S Z. Criterion of (L^p, L^q) Boundedness for a Class of Multilinear Oscillatory Singular Integrals [J]. Nagoya Mathematics Journal, 1998, 149: 33-51.

[17] JOURNE J L. Calderon-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderon [J]. Lecture Notes in Math, 1983, 994(5): 93-127.

Boundedness of the Multilinear Singular Integral Operators on the Weighted Morrey-Herz Spaces

LI Rui, TAO Shuang-ping

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, by using function decompositions and the inequalities of A_p weights, the boundedness of the multilinear singular integral operators is established on weighted Morrey-Herz spaces.

Key words: multilinear singular integral operator; Morrey-Herz space; A_p weight

责任编辑 廖 坤