DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.10.010

拟常曲率空间中具有平行平均曲率向量的伪脐子流形[①]

王世莉，　朱　华，　姚纯青

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要研究了拟常曲率空间中具有平行平均曲率向量的伪脐子流形的一些性质，运用常曲率空间中研究极小子流形 Simons 的方法，估算了子流形的第二基本形式模长的平方的 Laplacian，并且通过一些条件的限制，得到了这类子流形关于第二基本形式模长的平方及截面曲率和 Ricci 曲率的若干 Pinching 定理.

关 键 词： 常曲率空间；平行平均曲率；伪脐子流形

中图分类号：O186.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2016)10-0068-06

关于常曲率空间中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，文献[1-4]已得出了相关结论并给出了相应证明. 文献[5]讨论了一类新的空间，称之为拟常曲率空间，其黎曼曲率张量满足

$$K_{ABCD}=a(g_{AC}g_{BD}-g_{AD}g_{BC})+b(g_{AC}\lambda_B\lambda_D+g_{BD}\lambda_A\lambda_C-g_{AD}\lambda_B\lambda_C-g_{BC}\lambda_A\lambda_D)$$

其中 $\sum\limits_A g_{AB}\lambda_A\lambda_B=1$，$a$，$b$ 是 N^{n+p} 上的光滑函数. 本文把外围空间从常曲率空间推广到拟常曲率空间，得到了以下结论：

定理 1　设 M^n 是拟常曲率空间 $N^{n+p}(p\geqslant 2)$ 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，若 M^n 的第二基本形式模长的平方 σ 满足下列条件之一：

(i) $\sigma\leqslant\dfrac{n}{2p-3}[(p-1)a+(3p-4)H^2]+\dfrac{(n+1)(p-1)}{2(2p-3)}b-\dfrac{(3n+1)(p-1)}{2(2p-3)}\mid b\mid$；

(ii) $\sigma\leqslant\dfrac{n}{n+1}[a+(n+2)H^2]+\dfrac{1}{2}b-\dfrac{(3n+1)}{2(n+1)}\mid b\mid$；

(iii) $\sigma\leqslant\dfrac{2n(a+H^2)+(n+1)b-(3n+1)\mid b\mid}{2+\mathrm{sgn}(p-1)}$.

则 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形.

定理 2　设 M^n 是拟常曲率空间 $N^{n+p}(p\geqslant 2)$ 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，M^n 上每点的 Ricci 曲率 R_{ii} 满足下列条件之一：

(i) $R_{ii}\geqslant\dfrac{n^2+2n-4}{n+4}(a+H^2)+\dfrac{5n-7}{2(n+4)}b+\dfrac{9n-5}{2(n+4)}\mid b\mid$；

(ii) $R_{ii}\geqslant\left[(n-1)-\dfrac{p-1}{3p-5}\right](a+H^2)+\dfrac{5np-7p-9n+11}{2n(3p-5)}b+\dfrac{9np-5p-13n+9}{2n(3p-5)}\mid b\mid$；

---

① 收稿日期：2015-12-11
基金项目：国家自然科学基金项目(11471188).
作者简介：王世莉(1990-)，女，四川安岳人，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.
通信作者：姚纯青，副教授.

(iii) $R_{ii} \geqslant \frac{n^2-2}{n+1}(a+H^2)+\frac{2n^2-n-3}{2n(n+1)}b+\frac{2n^2+3n-1}{2n(n+1)}|b|$.

则 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形.

定理3 设 M^n 是拟常曲率空间 $N^{n+p}(p \geqslant 2)$ 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，M^n 上每点的 Ricci 曲率和截面曲率的下确界分别为 Q, K，若

$$Q > (n-2)(a+H^2)-\frac{K}{2}(n-4)+\frac{n^2-2n-1}{2n}b+\frac{2n^2-2n-1}{2n}|b| \qquad n \geqslant 4$$

则 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形.

1 预备知识

设 M^n 是拟常曲率空间 $N^{n+p}(p \geqslant 2)$ 中的子流形，在 N^{n+p} 内选取局部幺正标架场 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}$，使得限制在 M^n 上时，向量 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是 M^n 的切向量，从而 $\boldsymbol{e}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}$ 是 M^n 的法向量. 设 $\boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_{n+p}$ 为其对偶标架场，并约定各类指标范围如下：

$$A, B, C, \cdots = 1, \cdots, n+p$$
$$i, j, k, \cdots = 1, \cdots, n$$
$$\alpha, \beta, \cdots = n+1, \cdots, n+p$$

由 N^{n+p} 是拟常曲率空间，则有

$$K_{ABCD} = a(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC})+b(\delta_{AC}\lambda_B\lambda_D+\delta_{BD}\lambda_A\lambda_C-\delta_{AD}\lambda_B\lambda_C-\delta_{BC}\lambda_A\lambda_D) \tag{1}$$

其中 $\sum_A \lambda_A^2 = 1$，a, b 是 N^{n+p} 上的光滑函数. 则 N^{n+p} 的结构方程为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_A = -\sum_B \boldsymbol{\omega}_{AB} \wedge \boldsymbol{\omega}_B \qquad \boldsymbol{\omega}_{AB}+\boldsymbol{\omega}_{BA} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{AB} = -\sum_C \boldsymbol{\omega}_{AC} \wedge \boldsymbol{\omega}_{CB}+\boldsymbol{\Phi}_{AB} \qquad \boldsymbol{\Phi}_{AB} = \frac{1}{2}\sum_{C,D} K_{ABCD}\boldsymbol{\omega}_C \wedge \boldsymbol{\omega}_D$$

当限制在 M^n 上时，有：

$$\boldsymbol{\omega}_\alpha = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\omega}_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha \boldsymbol{\omega}_j \qquad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha \tag{2}$$

M^n 的结构方程为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i = -\boldsymbol{\omega}_{ik} \wedge \boldsymbol{\omega}_k \qquad \boldsymbol{\omega}_{ij}+\boldsymbol{\omega}_{ji} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{ij} = -\boldsymbol{\omega}_{ik} \wedge \boldsymbol{\omega}_{kj}+\boldsymbol{\Omega}_{ij} \qquad \boldsymbol{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2}R_{ijkl}\boldsymbol{\omega}_k \wedge \boldsymbol{\omega}_l \tag{3}$$

M^n 的 Gauss 方程和 Ricci 方程分别为：

$$R_{ijkl} = K_{ijkl}+\sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha)$$

$$R_{\alpha\beta kl} = K_{\alpha\beta kl}+\sum_i (h_{ik}^\alpha h_{il}^\beta - h_{il}^\alpha h_{ik}^\beta) \tag{4}$$

其中 R, K 分别表示 M^n, N^{n+p} 的曲率张量.

记 M^n 的第二基本形式模长的平方为 σ，平均曲率向量为 $\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{H}_\alpha = (h_{ij}^\alpha)$，则有：

$$\sigma = \sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^\alpha)^2 = \sum_\alpha \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_\alpha^2 \qquad \boldsymbol{\xi} = \sum_\alpha \left(\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^\alpha\right)\boldsymbol{e}_\alpha \qquad |\boldsymbol{\xi}| = H$$

设 $\boldsymbol{\xi} = H\boldsymbol{e}_{n+1}$，由 M^n 具有平行平均曲率向量，则 H 为非零常数，且：

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{H}_{n+1} = nH \qquad \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_\alpha = 0 \qquad \alpha \neq n+1$$

$$R_{n+1\alpha jk} = 0 \tag{5}$$

记

$$\tau = \sum_{\alpha \neq n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2 = \sum_{\alpha \neq n+1} \operatorname{tr} \boldsymbol{H}_\alpha^2$$

则有：

$$\tau=\sigma-nH^2 \qquad \sum_i h_{iik}^{n+1}=0 \qquad \sum_i h_{iikl}^{n+1}=0 \tag{6}$$

设 N^{n+p} 是局部对称空间，则有 $K_{ABCD;E}=0$，即

$$K_{\alpha ijkl}=\sum_\beta K_{\alpha\beta jk}h_{il}^\beta+\sum_\beta K_{\alpha i\beta k}h_{jl}^\beta+\sum_\beta K_{\alpha ij\beta}h_{kl}^\beta-\sum_m K_{mijk}h_{ml}^\alpha \tag{7}$$

由 M^n 是伪脐的，则有：

$$h_{ij}^{n+1}=H\delta_{ij}$$

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_\beta(\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta)\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\beta}}=\sum_{\alpha\neq n+1}(\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_{n+1})\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{n+1}=nH\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{jk}^\alpha h_{ki}^{n+1}=$$

$$nH\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{jk}^\alpha H\delta_{ki}=nH^2\tau \tag{8}$$

对任意 $\alpha,\beta\neq n+1$，由$(\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\beta}})$ 是 $p-1$ 阶对称方阵，故可选取法标架场 $\boldsymbol{e}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{e}_{n+p-1}$，使得

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\beta}})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha^2)\delta_{\alpha\beta} \tag{9}$$

对任意的实数 ε，由(1)—(9) 式，有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha=(1+\varepsilon)\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha R_{mijk}+h_{mi}^\alpha R_{mkjk})+\varepsilon\sum_{\alpha\neq n+1}(\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2)^2-$$

$$\varepsilon n(a+H^2)\tau-\varepsilon b\sum_k\lambda_k^2\tau-(1-\varepsilon)\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\beta}})^2]+$$

$$(1-\varepsilon)nb\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{ik}^\alpha\lambda_j\lambda_k-nb\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\lambda_\alpha\lambda_\beta \tag{10}$$

设 M^n 是 $N^{n+p}(p\geqslant 2)$ 的黎曼子流形，

$$\tau=\sum_{\alpha\neq n+1}\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\alpha}}^2$$

下面给出定理证明需要的一些不等式(参考文献[3－4,6])：

$$\frac{1}{p-1}\tau^2\leqslant\sum_{\alpha\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2]^2\leqslant\tau^2 \tag{11}$$

$$0\leqslant\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2]\leqslant\tau^2-\sum_{\alpha\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2]^2 \tag{12}$$

$$0\leqslant\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2]\leqslant\frac{p-2}{p-1}\tau^2 \tag{13}$$

$$0\leqslant\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2]\leqslant\frac{n}{2}\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta]^2 \tag{14}$$

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{mk}^\alpha R_{mijk}+h_{mi}^\alpha R_{mkjk})\geqslant n\tau K \tag{15}$$

$$2\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2]+\sum_{\alpha\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2]^2\leqslant\left[1+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(p-1)\right]\tau^2 \tag{16}$$

2　主要结果及证明

引理 1　设 M^n 是 $N^{n+p}(p\geqslant 2)$ 的伪脐子流形，Q 为 M^n 上 Ricci 曲率的下确界，则有

$$0\leqslant\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2]\leqslant$$

$$2[(n-1)(a+H^2)+b\sum_i\lambda_i^2-Q+(n-2)b\lambda_i^2]\tau$$

证　由文献[7]，有：

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_k(h_{ki}^\alpha)^2\leqslant a(n-1)+b(n-2)\lambda_i^2+b\sum_k\lambda_k{}^2+(n-1)H^2-Q \tag{17}$$

$$\tau\leqslant n(n-1)(a+H^2)+2(n-1)b\sum_i\lambda_i^2-nQ \tag{18}$$

对固定的 $\alpha\neq n+1$，令

$$h_{ij}^\alpha=\mu_i^\alpha\delta_{ij}$$

且有

$$(\mu_i^\alpha - \mu_j{}^\alpha)^2 \leqslant 2\left[(\mu_i^\alpha)^2 + (\mu_j{}^\alpha)^2\right]$$

由(18)式有

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2 - \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2] = \\ &\frac{1}{2}\sum_{\beta\neq n+1,i,j}(\mu_i^\alpha - \mu_j{}^\alpha)(h_{ij}^\beta)^2 \leqslant 2\sum_i\Big[\sum_{\beta\neq n+1,j}(h_{ij}^\beta)^2\Big](\mu_i^\alpha)^2 \leqslant \\ &2[a(n-1) + b(n-2)\lambda_i^2 + b\sum_k\lambda_k{}^2 + (n-1)H^2 - Q]\ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2\end{aligned} \tag{19}$$

对(19)式关于 $\alpha \neq n+1$ 求和可证得引理 1.

引理 2 设 M^n 是 $N^{n+p}(p \geqslant 2)$ 的伪脐子流形,Q 为 M^n 上 Ricci 曲率的下确界,则有

$$\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2 - \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2 \leqslant 2[(n-1)(a+H^2) + b(n-2)\lambda_i^2 + b\sum_k\lambda_k{}^2 - Q]\tau - \frac{2}{n}\sum_{\alpha\neq n+1}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2)^2$$

证 对固定的 $\alpha \neq n+1$,令

$$h_{ij}^\alpha = \mu_i^\alpha\delta_{ij}$$

且由(17)式有

$$\sum_{\beta\neq n+1(\neq\alpha)}\sum_k(h_{ki}^\beta)^2 \leqslant a(n-1) + b(n-2)\lambda_i^2 + b\sum_k\lambda_k{}^2 + (n-1)H^2 - Q - (\mu_i^\alpha)^2 \tag{20}$$

由(20)式及 Schwarz 不等式

$$\Big(\sum_i\mu_i^\alpha\Big)^2 \leqslant n\sum_i(\mu_i^\alpha)^2$$

有

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2 - \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2] \leqslant \\ &2\sum_i\Big[\sum_{\beta\neq n+1,j}(h_{ij}^\beta)^2\Big](\mu_i^\alpha)^2 \leqslant \\ &2\sum_i\Big[a(n-1) + b(n-2)\lambda_i^2 + b\sum_k\lambda_k{}^2 + (n-1)H^2 - Q - (\mu_i^\alpha)^2\Big](\mu_i^\alpha)^2 \leqslant \\ &2\Big[a(n-1) + b(n-2)\lambda_i^2 + b\sum_k\lambda_k{}^2 + (n-1)H^2 - Q\Big]\sum_i(\mu_i^\alpha)^2 - \frac{2}{n}\Big[\sum_i(\mu_i^\alpha)^2\Big]^2\end{aligned} \tag{21}$$

对(21)式关于 $\alpha \neq n+1$ 求和即可证得引理 2.

在(10)式中取 $\varepsilon = -1$,则有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha = n(a+H^2)\tau + b\sum_k\lambda_k^2\tau - 2\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2\boldsymbol{H}_\beta^2 - \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_\beta)^2] - \\ \sum_{\alpha\neq n+1}[\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2]^2 + 2nb\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{ik}^\alpha\lambda_j\lambda_k - nb\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\lambda_\alpha\lambda_\beta\end{aligned} \tag{22}$$

由 $\sum_i\lambda_i^2 \leqslant 1$,$\sum_\alpha\lambda_\alpha^2 \leqslant 1$ 及 Schwarz 不等式可得:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{ik}^\alpha\lambda_j\lambda_k &= \sum_{\alpha\neq n+1}\sum_i\Big(\sum_j h_{ij}^\alpha\lambda_j\Big)^2 \leqslant \\ &\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_i\Big[\sum_j(h_{ij}^\alpha)^2\sum_j\lambda_j^2\Big] \leqslant \\ &\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2 = \tau\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\lambda_\alpha\lambda_\beta &= \sum_{i,j}\Big[\sum_{\alpha\neq n+1}h_{ij}^\alpha\lambda_\alpha\Big]^2 \leqslant \\ &\sum_{i,j}\Big[\sum_{\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2\sum_{\alpha\neq n+1}\lambda_\alpha^2\Big] \leqslant \\ &\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2 = \tau\end{aligned} \tag{24}$$

定理 1 的证明 由(11),(12),(22),(23),(24)式有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant n(a+H^2)\tau+b\sum_k\lambda_k^2\tau-2\tau^2+\frac{1}{p-1}\tau^2+ \\ 2nb\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}\lambda_j\lambda_k-nb\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta \tag{25}$$

由(25)式，有：

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\begin{cases}\sum\limits_{\alpha\neq n+1}\sum\limits_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant n(a+H^2)\tau-2\tau^2+\dfrac{1}{p-1}\tau^2-nb\tau & b\geqslant 0\\ \sum\limits_{\alpha\neq n+1}\sum\limits_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant n(a+H^2)\tau-2\tau^2+\dfrac{1}{p-1}\tau^2+b\tau+2nb\tau & b<0\end{cases}$$

因 $\tau=\sigma-nH^2$，于是对任意的 b，都有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\tau\left\{na+\frac{3p-4}{p-1}nH^2+\frac{3-2p}{p-1}\sigma+\frac{n+1}{2}b-\frac{3n+1}{2}\mid b\mid\right\}$$

又因为 M^n 是紧致的，且

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$

在定理 1 的条件 (i) 下，可得$\frac{1}{2}\Delta\tau\geqslant 0$，由 Hopf 极大原理得 τ 为常数，$\Delta\tau=0$，则有：

$$h_{ijk}{}^{\alpha}=0\qquad \alpha\neq n+1$$

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=0$$

由文献[6] 可知 $\tau=0$. 又因 M^n 是伪脐子流形，所以 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形. 同理，可得出定理 1 中 (ii)，(iii) 的结果.

定理 2 的证明　由(11)，(18)，(22)，(23)，(24) 式，引理 1 及 $\tau\leqslant\sigma$，有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant n(a+H^2)\tau-4\Big[(n-1)(a+H^2)\tau+b\sum_i\lambda_i^2-Q+(n-2)b\lambda_i^2\Big]\tau+ \\ b\sum_k\lambda_k^2\tau-\Big[n(n-1)(a+H^2)+2(n-1)b\sum_i\lambda_i^2-nQ\Big]\tau+ \\ 2nb\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}\lambda_j\lambda_k-nb\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta \tag{26}$$

由(26)式，有：

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\begin{cases}\tau\{(-n^2-2n+4)(a+H^2)+(n+4)Q+(6-7n)b\} & b\geqslant 0\\ \tau\{(-n^2-2n+4)(a+H^2)+(n+4)Q+(2n+1)b\} & b<0\end{cases}$$

于是对任意的 b，都有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\tau\left\{(-n^2-2n+4)(a+H^2)+(n+4)Q+\frac{-5n+7}{2}b+\frac{-9n+5}{2}\mid b\mid\right\}$$

类似于定理 1(i) 的证明可得出定理 2 的结果.

定理 3 的证明　在(10) 式中，当 $-1\leqslant\varepsilon\leqslant 1$ 时，由(15) 式及引理 2 有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant(1+\varepsilon)n\tau K-\varepsilon n(a+H^2)\tau-\varepsilon b\sum_k\lambda_k^2\tau+\varepsilon\sum_{\alpha\neq n+1}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2)^2- \\ 2(1-\varepsilon)\Big[(n-1)(a+H^2)+b(n-2)\lambda_i^2+b\sum_k\lambda_k{}^2-Q\Big]\tau-\frac{2}{n}\sum_{\alpha\neq n+1}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{H}_\alpha^2)^2+ \\ (1-\varepsilon)nb\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}\lambda_j\lambda_k-nb\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta \tag{27}$$

取

$$\varepsilon=-\frac{2}{n-2}\qquad n\geqslant 4$$

则由(27) 式有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\frac{n-4}{n-2}nK\tau-2n(a+H^2)\tau+\frac{2nQ}{n-2}\tau+\frac{2-2n}{n-2}\sum_{k}{\lambda_k}^2b\tau-2n\lambda_i^2b\tau+$$
$$\frac{n^2}{n-2}b\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}\lambda_j\lambda_k-nb\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta \tag{28}$$

由(28)式，有：

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\begin{cases}\tau\left\{\dfrac{n-4}{n-2}nK-2n(a+H^2)+\dfrac{2nQ}{n-2}+\dfrac{2-2n}{n-2}b-2nb-nb\right\} & b\geqslant 0\\ \tau\left\{\dfrac{n-4}{n-2}nK-2n(a+H^2)+\dfrac{2nQ}{n-2}+\dfrac{n^2}{n-2}b\right\} & b<0\end{cases}$$

于是对任意的 b，都有

$$\sum_{\alpha\neq n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\tau\left\{\frac{n-4}{n-2}nK-2n(a+H^2)+\frac{2nQ}{n-2}+\frac{1+2n-n^2}{n-2}b+\frac{1+2n-2n^2}{n-2}\mid b\mid\right\} \tag{29}$$

由(29)式，类似于定理 1(i)的证明可得出定理 3.

注 1 当 a 为常数，$b=0$ 时，定理 1、定理 2 为文献[4]中常曲率空间上熟知的定理，定理 3 为文献[6]中常曲率空间上熟知的定理. 定理 1、定理 2、定理 3 为常曲率空间向拟常曲率空间的推广.

参考文献：

[1] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature I [J]. Amer J Math，1974，96(2)：346－366.

[2] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature II [J]. Amer J Math，1975，97(1)：76－100.

[3] LI A M，LI J M. An Intrinsic Rigidity Theorem for Minimal Submanifolds in a Sphere [J]. Arch Math，1992，58：582－594.

[4] 纪永强. 子流形几何 [M]. 北京：科学出版社，2004：207－208.

[5] 白正国. 拟常曲率黎曼流形在常曲率空间中的等距嵌入 [J]. 数学年刊，1986，7A(4)：445－449.

[6] 纪永强. 全脐子流形的几个充分条件 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，1989，17(3)：10－13.

[7] 何国庆. 关于拟常曲率空间的伪脐子流形 [J]. 安徽师范大学学报(自然科学版)，2006，29(4)：320－324.

[8] 赵盼盼，姚纯青，王新敬. 拟常曲率流形中具有常平均曲率的子流形 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(4)：30－34.

Pseudo Umbilical Sub-Manifolds with Parallel Mean Curvature Vector in the Quasi Constant Curvature Space

WANG Shi-li， ZHU Hua， YAO Chun-qing

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper mainly studied the pseudo umbilical sub-manifolds with parallel mean curvature vector in the quasi constant curvature，using the constant curvature space theorem Simons method，estimating sub-manifolds' long square Laplacian of the second fundamental，and obtaining some conditions of limitation about this kind of sub-manifoldssome Pinching theorems of the second fundamental form long square and the section curvature and Ricci curvature.

Key words：quasi constant curvature space；parallel mean curvature；pseudo umbilical sub-manifold

责任编辑 廖 坤