DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.11.011

具有 B-D 功能性反应的害虫脉冲综合治理系统①

张爱景，　窦家维，　李　婧

陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710062

摘要： 研究了一类描述害虫与其天敌构成的捕食系统中对害虫的综合防治（IPM）问题，系统由具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应和脉冲效应的食饵-捕食者模型描述. 为控制害虫数量的增长，每隔一定时间喷洒一次杀虫剂，并以脉冲形式投放一定数量的天敌. 首先应用脉冲微分系统的 Floquet 理论研究了害虫灭绝周期解局部渐近稳定的条件，进一步利用比较定理获得了害虫灭绝周期解全局渐近稳定和系统持续生存的条件.

关　键　词： 食饵-捕食者模型；B-D 功能性反应；害虫脉冲综合防治；害虫灭绝周期解

中图分类号： O175.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673－9868(2016)11－0069－10

近年来，脉冲微分系统在农业和林业的病虫害防治研究中得到了重要的应用[1-5]. 在数学生态学研究中，对害虫的控制主要有 3 种策略，即化学防治、生物防治和综合防治[4-8]，其中：化学防治主要是通过喷洒农药的方式防治害虫，这种策略见效快，但会对环境造成污染；生物防治主要是利用生物代谢素、信息素或投放天敌等来控制害虫的数量，这种策略对环境污染小，但是成本较高；综合害虫治理是综合考虑以较低的成本和对环境危害较小的影响，利用生物防治和化学防治等相互配合的方式，把害虫控制在一定数量之内. 本文将建立并研究喷洒杀虫剂和投放天敌相结合的害虫综合防治模型.

文献[9]在实验的基础上，对不同类型的捕食过程提出了 Holling I-III 型功能性反应. 很多学者对具有 Holling 型功能性反应的食饵-捕食者系统进行研究，得到了许多有价值的结论[10-13]. 文献[14]研究了具有 sigmoid 功能性反应的害虫综合治理模型，模型是基于捕食者捕获食饵的数量很小的假设建立的. 如果捕食者的数量较多，在捕食过程中捕食者之间会发生相互干扰，由于 Beddington-DeAngelis（简记为 B-D）功能性反应函数关于捕食者数量是单调递减的，应用 B-D 功能性反应能较好地刻画这些捕食过程. 本文主要研究一类具有 B-D 功能性反应，即利用喷洒杀虫剂以及投放天敌对害虫进行脉冲控制的食饵-捕食者系统模型的动力学行为，主要研究害虫灭绝周期解的存在性及稳定性，以及系统的持续生存性等问题.

本文所研究的模型由下面的脉冲微分系统描述：

$$\begin{cases} x' = rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{axy}{1+b_1x+b_2y} & t\neq n\tau \\ y' = y\left(\dfrac{\lambda ax}{1+b_1x+b_2y}-\mu-cy\right) & t\neq n\tau \\ x(n\tau^+) = px(n\tau) \\ y(n\tau^+) = y(n\tau)+q \end{cases} \tag{1}$$

---

① 收稿日期：2015－05－23

基金项目：国家自然科学基金项目(61272435).

作者简介：张爱景(1989－)，女，山东济宁人，硕士研究生，主要从事脉冲微分方程理论及应用.

通信作者：窦家维，副教授.

其中：$x=x(t)$，$y=y(t)$ 分别表示 $t(t\in\mathbb{R}_+=[0,\infty))$ 时刻害虫与天敌的数量；$r>0$，$k>0$ 分别表示害虫的内禀增长率与环境容纳量；$\dfrac{ax}{1+b_1x+b_2y}$ 是B-D 功能性反应函数；$\mu>0$,$c>0$ 分别表示天敌的死亡率及其密度制约因素，$\lambda>0$ 是害虫向天敌的转化率. 系统(1) 中后两个方程表示每隔一定时间 τ 对害虫进行一次脉冲综合防治. (1) 式中第三个方程描述喷洒杀虫剂控制害虫，$p(0<p\leqslant 1)$ 表示喷药后害虫的残存率，第四个方程表示喷药后再投放数量为 q 的天敌，$n\in\mathbb{N}_+=\{1,2,\cdots\}$.

1 预备知识

关于系统(1)，显然有下面结论：

引理 1 若$(x(t),y(t))$ 为系统(1) 具有初值 $x(0)\geqslant 0$，$y(0)\geqslant 0$ 的解，则当 $t\geqslant 0$ 时，$x(t)\geqslant 0$，$y(t)\geqslant 0$. 进一步，如果 $x(0)>0$，$y(0)>0$，则有 $x(t)>0$，$y(t)>0(t\geqslant 0)$.

由模型的生物意义，本文只考虑系统(1) 具有非负初值的解.

引理 2 给出了解的最终有界性.

引理 2 存在常数 $M>0$，对于系统(1) 任意具有正初值的解$(x(t),y(t))$，当时间 t 足够大时有 $x(t)\leqslant M$，$y(t)\leqslant M$.

证 设$(x(t),y(t))$ 为系统(1) 的任意解，令

$$z(t)=\lambda x(t)+y(t)$$

取常数 b 满足 $0<b<\mu$，当 $t\neq n\tau$ 时，有

$$z'(t)+bz(t)=-\frac{\lambda r}{k}x^2+\lambda(r+b)x-cy^2-(\mu-b)y\leqslant$$

$$-\frac{\lambda r}{k}x^2+\lambda(r+b)x-(\mu-b)y \tag{2}$$

$$z(n\tau^+)=\lambda px(n\tau)+y(n\tau)+q\leqslant z(n\tau)+q$$

由于 $b<\mu$，则由(2) 式可知，存在 M_0，使下式成立：

$$\begin{cases} z'(t)\leqslant -bz(t)+M_0 & t\neq n\tau \\ z(n\tau^+)\leqslant z(n\tau)+q \end{cases}$$

考虑系统

$$\begin{cases} \hat{z}'(t)=-b\hat{z}(t)+M_0 & t\neq n\tau \\ \hat{z}(n\tau^+)=\hat{z}(n\tau)+q \end{cases} \tag{3}$$

由于系统(3) 有全局渐近稳定的周期解 $\hat{z}^*(t)$，记 $\hat{z}(t)$ 为系统(3) 具有初值 $\hat{z}(0)=z(0)=\lambda x(0)+y(0)$ 的解，则存在 $t'>0$，当 $t\geqslant t'$ 时，有 $\hat{z}(t)\leqslant\hat{z}^*(t)+1$. 取 $M=\max\limits_{t\in[0,\tau]}\hat{z}^*(t)+1$，又由脉冲微分系统的比较定理[15] 可知

$$z(t)\leqslant\hat{z}(t)\leqslant M$$

因此，当时间 t 充分大时有 $x(t)\leqslant M$，$y(t)\leqslant M$. 证毕.

引理 3 给出了当害虫灭绝时，即当 $x(t)\equiv 0$ 时天敌种群的变化趋势. 害虫灭绝时系统(1) 化为系统：

$$\begin{cases} y'=y(-\mu-cy) & t\neq n\tau \\ y(n\tau^+)=y(n\tau)+q \end{cases} \tag{4}$$

引理 3 系统(4) 有一个正 $\tau-$周期解 $y^*(t)$，其表达式为

$$y^*(t)=\frac{\mu\tilde{y}\exp(-\mu t)}{\mu+c\tilde{y}(1-\exp(-\mu t))} \qquad t\in(n\tau,(n+1)\tau]$$

其中

$$\tilde{y}=\begin{cases}\dfrac{q}{1-\exp(-\mu\tau)} & c=0\\ \dfrac{1}{2c}\left[(qc-\mu)+\sqrt{(qc-\mu)^2+\dfrac{4qc\mu}{1-\exp(-\mu\tau)}}\right] & c\neq 0\end{cases}$$

且对于系统(4)的任意解 $y(t)$，当 $t\to\infty$ 时，有 $|y(t)-y^*(t)|\to 0$.

证　首先在 $t\in(n\tau,(n+1)\tau]$ 上求解系统(4)，得到

$$y(t)=\frac{\mu y(n\tau^+)\exp(-\mu(t-n\tau))}{\mu+cy(n\tau^+)(1-\exp(-\mu(t-n\tau)))}$$

根据脉冲条件

$$y((n+1)\tau^+)=y((n+1)\tau)+q$$

有

$$y((n+1)\tau^+)=\frac{\mu y(n\tau^+)\exp(-\mu\tau)}{\mu+cy(n\tau^+)(1-\exp(-\mu\tau))}+q$$

记

$$y(n\tau^+)=y_n$$

可以得到

$$y_{n+1}=\frac{\mu y_n\exp(-\mu\tau)}{\mu+cy_n(1-\exp(-\mu\tau))}+q$$

定义函数

$$g(y)=\frac{\mu y\exp(-\mu\tau)}{\mu+cy(1-\exp(-\mu\tau))}+q$$

得到差分方程

$$y_{n+1}=g(y_n)$$

求解该差分方程，可知其有唯一正不动点：

$$\tilde{y}=\begin{cases}\dfrac{q}{1-\exp(-\mu\tau)} & c=0\\ \dfrac{1}{2c}\left[(qc-\mu)+\sqrt{(qc-\mu)^2+\dfrac{4qc\mu}{1-\exp(-\mu\tau)}}\right] & c\neq 0\end{cases}$$

因此，系统(4)以 $\tilde{y}$ 为初值的解是一个正 τ－周期解，该周期解的稳定性可转化为差分方程 $y_{n+1}=g(y_n)$ 的不动点 $\tilde{y}$ 的稳定性来研究.

下面证明 $\tilde{y}$ 是全局渐近稳定的.

由于

$$g'(y)=\frac{\mu^2\exp(-\mu\tau)}{(\mu+cy(1-\exp(-\mu\tau)))^2}>0$$

因此

$$g(y)=\frac{\mu y\exp(-\mu\tau)}{\mu+cy(1-\exp(-\mu\tau))}+q$$

是 y 的单调递增函数.

如果初值 $y(0)=y_0$ 满足 $0<y_0<\tilde{y}$，则有

$$0<g(y_0)<g(\tilde{y})=\tilde{y}$$

即 $y_1 < \tilde{y}$. 由归纳推理可以得到，对所有的 $n \in \mathbb{N}_+$，都有 $0 < y_n < \tilde{y}$.

又因为

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\mu y_n \exp(-\mu\tau)}{\mu + c y_n(1-\exp(-\mu\tau))} + q - y_n =$$

$$\frac{c(\exp(-\mu\tau)-1)(y_n-\tilde{y})(y_n-\hat{y})}{\mu + c y_n(1-\exp(-\mu\tau))} > 0$$

其中 $\hat{y}$ 为差分方程 $y_{n+1}=g(y_n)$ 的唯一负不动点. 所以，当 $0<y_0<\tilde{y}$ 时，$0<y_n<\tilde{y}(n\in\mathbb{N}_+)$，且 $\{y_n\}$ 单调递增趋向于 $\tilde{y}$.

类似地，可以证明当 $y_0 > \tilde{y}$ 时，$y_n > \tilde{y}(n \in \mathbb{N}_+)$，并且 $\{y_n\}$ 单调递减趋向于 $\tilde{y}$. 由此可知，$\tilde{y}$ 是全局渐近稳定的. 所以，系统(4) 以 $\tilde{y}$ 为初值的周期解 $y^*(t)$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

2 害虫灭绝周期解的稳定性

由引理 3 可知，$(0, y^*(t))$ 为系统(1) 的害虫灭绝周期解，下面研究该周期解在二维空间中的稳定性.

定理 1 (i) 如果下面条件

$$r\tau < \int_0^\tau \frac{a y^*(t)}{1+b_2 y^*(t)}\mathrm{d}t - \ln p \tag{5}$$

成立，则害虫灭绝周期解 $(0, y^*(t))$ 是局部渐近稳定的.

(ii) 如果下面条件

$$r\tau < \int_0^\tau \frac{a y^*(t)}{1+b_1 k + b_2 y^*(t)}\mathrm{d}t - \ln p \tag{6}$$

成立，则害虫灭绝周期解 $(0, y^*(t))$ 是全局渐近稳定的.

证 (i) 首先应用 Floquet 理论[16] 证明周期解 $(0, y^*(t))$ 的局部稳定性.

设 $(x(t), y(t))$ 为系统(1) 的任意一个解，作变量变换，令 $u(t)=x(t)$，$v(t)=y(t)-y^*(t)$，则系统(1) 化为：

$$\begin{cases} u' = ru\left(1-\dfrac{u}{k}\right) - \dfrac{au(v+y^*(t))}{1+b_1 u + b_2(v+y^*(t))} & t \neq n\tau \\ v' = (v+y^*(t))\dfrac{\lambda a u}{1+b_1 u + b_2(v+y^*(t))} - [\mu + 2cy^*(t) + cv]v & t \neq n\tau \\ u(n\tau^+) = pu(n\tau) \\ v(n\tau^+) = v(n\tau) \end{cases} \tag{7}$$

系统(7) 对应的线性系统为：

$$\begin{cases} u' = \left[r - \dfrac{a y^*(t)}{1+b_2 y^*(t)}\right]u & t \neq n\tau \\ v' = \dfrac{\lambda a y^*(t)}{1+b_2 y^*(t)}u - [\mu + 2cy^*(t)]v & t \neq n\tau \\ u(n\tau^+) = pu(n\tau) \\ v(n\tau^+) = v(n\tau) \end{cases} \tag{8}$$

可以求得系统(8) 的单值矩阵的 Floquet 乘子为：

$$\lambda_1 = p\exp\left\{\int_0^\tau \left[r - \frac{a y^*(t)}{1+b_2 y^*(t)}\right]\mathrm{d}t\right\}$$

$$\lambda_2=\exp\left\{-\int_0^{\tau}[\mu+2cy^*(t)]\mathrm{d}t\right\}$$

显然有 $|\lambda_2|<1$，由定理条件(5)可知，$|\lambda_1|<1$ 成立，由 Floquet 理论知 $(0, y^*(t))$ 是局部渐近稳定的.

(ii) 下面证明当条件(6)成立时，$(0, y^*(t))$ 是全局渐近稳定的. 由于条件(6)蕴含了条件(5)，只需证明 $(0, y^*(t))$ 的全局吸引性. 即证明对系统(1)的任意解 $(x(t), y(t))$，当 $t\to\infty$ 时，有 $(x(t), y(t))\to(0, y^*(t))$.

(a) 首先证明当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to 0$. 由定理条件(6)，可以选择 $\varepsilon>0$ 充分小，使得对于所有的 $t\geqslant 0$，满足 $y^*(t)-\varepsilon>0$ 以及

$$\delta:=p\exp\left\{\int_0^{\tau}\left[r-\frac{a(y^*(t)-\varepsilon)}{1+b_1(k+\varepsilon)+b_2(y^*(t)-\varepsilon)}\right]\mathrm{d}t\right\}<1$$

记 $x_1(t)$ 为 logistic 系统

$$x_1{}'=rx_1\left(1-\frac{x_1}{k}\right) \tag{9}$$

满足初值条件 $x_1(0)=x(0)$ 的解，则由系统(9)解的性质以及脉冲微分系统的比较定理可知，存在 $t_1>0$，使得当 $t\geqslant t_1$ 时，有

$$x(t)\leqslant x_1(t)<k+\varepsilon$$

记系统(4)满足初值条件 $y_1(0)=y(0)$ 的解为 $y_1(t)$，由引理 3 以及脉冲微分系统的比较定理知存在 $t_2>t_1$，当 $t\geqslant t_2$ 时，有

$$y(t)\geqslant y_1(t)>y^*(t)-\varepsilon$$

因此当 $t\geqslant t_2$ 时，有

$$\begin{cases}x'\leqslant x\left[r-\dfrac{a(y^*(t)-\varepsilon)}{1+b_1(k+\varepsilon)+b_2(y^*(t)-\varepsilon)}\right] & t\neq n\tau\\ x(n\tau^+)=px(n\tau)\end{cases} \tag{10}$$

在 $t\in(n\tau, (n+1)\tau]$ 上对(10)式的第一个不等式积分，得到

$$x(t)\leqslant x(n\tau^+)\exp\left\{\int_{n\tau}^{t}\left[r-\frac{a(y^*(s)-\varepsilon)}{1+b_1(k+\varepsilon)+b_2(y^*(s)-\varepsilon)}\right]\mathrm{d}s\right\} \tag{11}$$

进一步由脉冲条件，得到

$$x((n+1)\tau)\leqslant px(n\tau)\exp\left\{\int_0^{\tau}\left[r-\frac{a(y^*(t)-\varepsilon)}{1+b_1(k+\varepsilon)+b_2(y^*(t)-\varepsilon)}\right]\mathrm{d}t\right\}=\delta x(n\tau)$$

因为 $\delta<1$，所以当 $n\to\infty$ 时，$x(n\tau)\to 0$. 进一步由(11)式得当 $t\to\infty$ 时，有

$$x(t)\to 0 \tag{12}$$

(b) 下面证明当 $t\to\infty$ 时，有 $y(t)\to y^*(t)$.

令 $y_1^*(t)$ 为一个 τ－周期函数，当 $t\in(n\tau, (n+1)\tau]$ 时，表达式为

$$y_1^*(t)=\frac{\omega\tilde{y}_1\exp(-\omega t)}{\omega+c\tilde{y}_1(1-\exp(-\omega t))}$$

其中 $\omega>0$ 为常数，

$$\tilde{y}_1=\begin{cases}\dfrac{q}{1-\exp(-\omega\tau)} & c=0\\ \dfrac{1}{2c}\left[(qc-\omega)+\sqrt{(qc-\omega)^2+\dfrac{4qc\omega}{1-\exp(-\omega\tau)}}\right] & c\neq 0\end{cases}$$

由 $y^*(t)$ 的表达式可知，当 $\omega=\mu$ 时，$y_1^*(t)=y^*(t)$. 由解对参数的连续依赖性，当 ω 与 μ 充分接近时，$y_1^*(t)$ 与 $y^*(t)$ 充分接近. 因此对于任意给定的 $\varepsilon'>0$，存在 $\delta_0>0$，当 $|\omega-\mu|<\delta_0$ 时，有

$$y^*(t)-\frac{\varepsilon'}{2}<y_1^*(t)<y^*(t)+\frac{\varepsilon'}{2} \tag{13}$$

选定 $\sigma>0$ 充分小，使得

$$\frac{\lambda a\sigma}{1+b_1\sigma}<\delta_0$$

并使

$$\frac{\mu-\lambda a\sigma}{1+b_1\sigma}>0$$

令

$$\omega=\frac{\mu-\lambda a\sigma}{1+b_1\sigma}$$

由(12)式可知，对上面的 $\sigma>0$，存在 $t_3>0$，当 $t\geqslant t_3$ 时，有 $x(t)<\sigma$. 因此当 $t\geqslant t_3$ 时，有

$$-(\mu+cy)y\leqslant y'\leqslant-(\omega+cy)y$$

记 $y_2(t)$,$y_3(t)$ 分别为系统

$$\begin{cases}y_2'=y_2(-\mu-cy_2) & t\neq n\tau\\ y_2(n\tau^+)=y_2(n\tau)+q\\ y_2(t_3)=y(t_3)\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}y_3'=y_3(-\omega-cy_2) & t\neq n\tau\\ y_3(n\tau^+)=y_3(n\tau)+q\\ y_3(t_3)=y(t_3)\end{cases}$$

的解，由脉冲微分系统的比较定理知，当 $t\geqslant t_3$ 时，有

$$y_2(t)\leqslant y(t)\leqslant y_3(t) \tag{14}$$

进一步由引理3，对上面给定的 $\varepsilon'>0$，存在 $\bar{t}>t_3$，使得当 $t\geqslant\bar{t}$ 时，有

$$y^*(t)-\varepsilon'<y_2(t)<y^*(t)+\varepsilon' \tag{15}$$

以及

$$y_1^*(t)-\frac{\varepsilon'}{2}<y_3(t)<y_1^*(t)+\frac{\varepsilon'}{2} \tag{16}$$

成立. 结合(13)-(16)式可知，当 $t\geqslant\bar{t}$ 时，有 $y^*(t)-\varepsilon'<y(t)<y^*(t)+\varepsilon'$. 这样就证明了对系统(1)的任意解($x(t)$, $y(t)$)，当 $t\to\infty$ 时，有 $y(t)\to y^*(t)$. 因此系统(1)的解(0, $y^*(t)$)是全局吸引的.

3　系统的持续生存性

本节主要研究系统(1)的持续生存性，由研究结果可知，当保证害虫灭绝周期解局部渐近稳定的条件不成立时，系统(1)是持续生存的. 具体见定理2.

定理2　如果下面条件

$$r\tau>\int_0^\tau\frac{ay^*(t)}{1+b_2y^*(t)}\mathrm{d}t-\ln p \tag{17}$$

成立，则系统是持续生存的，这里 $y^*(t)$ 是系统(4)的周期解.

根据持续生存的定义，即要证明存在常数 $m>0$，$M>0$，对于系统(1) 的任意解$(x(t),y(t))$，当时间 t 充分大时，有 $m\leqslant x(t),y(t)\leqslant M$ 成立.

证　设$(x(t),y(t))$为系统(1) 的任意给定的解，由引理 2，不妨设当 $t>0$ 时已有 $x(t)\leqslant M$，$y(t)\leqslant M$ 成立，这里 M 为一个正常数. 下面证明存在 $m>0$，当时间 t 充分大时，有 $x(t)\geqslant m$，$y(t)\geqslant m$ 成立.

取

$$m_1=\min_{t\in[0,\tau]}\frac{y^*(t)}{2}$$

其中 $y^*(t)$ 是系统(4) 的周期解. 则由引理 3，存在 $\tau_1>0$，当 $t\geqslant\tau_1$ 时，有 $y(t)\geqslant m_1$.

下面将证明存在 $m_2>0$，使得当时间 t 充分大时，有 $x(t)\geqslant m_2$，最后只需取 $m=\min\{m_1,m_2\}$ 即可.

由条件(17)，首先选择 $\sigma_1>0$ 充分小，使下式成立：

$$p\exp\left\{\int_0^\tau\left[r-\frac{a(y^*(t)+\sigma_1)}{1+b_2(y^*(t)+\sigma_1)}\right]\mathrm{d}t\right\}>1\tag{18}$$

进一步，取 $\nu>0$ 充分小，使得下面两式同时成立：

$$\rho:=p\exp\left\{\int_0^\tau\left[r-\frac{r\nu}{k}-\frac{a(y^*(t)+\sigma_1)}{1+b_2(y^*(t)+\sigma_1)}\right]\mathrm{d}t\right\}>1\tag{19}$$

$$\mu_0:=\mu-\frac{\lambda a\nu}{1+b_1\nu+b_2m_1}>0\tag{20}$$

考虑下面系统

$$\begin{cases}y_4'=y_4(-\mu_0-cy_4) & t\neq n\tau\\ y_4(n\tau^+)=y_4(n\tau)+q\end{cases}\tag{21}$$

由引理3可知，系统(21) 存在全局渐近稳定的周期解 $y_4^*(t)$. 由解对参数的连续依赖性知，选取 ε_1 满足 $0<\varepsilon_1<\sigma_1$，并对所有的 $t\geqslant0$，满足

$$y_4^*(t)<y^*(t)+(\sigma_1-\varepsilon_1)$$

首先证明对所有的 $t\geqslant0$，$x(t)<\nu$ 不能恒成立. 否则，有

$$y'\leqslant y\left(\frac{\lambda a\nu}{1+b_1\nu+b_2m_1}-\mu-cy\right)=y(-\mu_0-cy)$$

记系统(21) 满足条件 $y_4(0^+)=M$ 的解为 $y_4(t)$，由引理 3，对上述 ε_1，存在 $\tau_2=n_1\tau>\tau_1(n_1\in\mathbb{N}_+)$，使得当 $t\geqslant\tau_2$ 时，有

$$y(t)<y_4(t)<y_4^*(t)+\varepsilon_1<y^*(t)+\sigma_1\tag{22}$$

由(22) 式可得到

$$\begin{cases}x'\geqslant x\left(r-\frac{r\nu}{k}-\frac{a(y^*(t)+\sigma_1)}{1+b_2(y^*(t)+\sigma_1)}\right) & t\neq n\tau\\ x(n\tau^+)=px(n\tau)\end{cases}\tag{23}$$

在 $t\in(n\tau,(n+1)\tau](n>n_1)$ 上对(23) 式的第一个不等式积分，并根据脉冲条件得到：

$$x((n+1)\tau)\geqslant x(n\tau^+)\exp\left\{\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\left[r-\frac{r\nu}{k}-\frac{a(y^*(t)+\sigma_1)}{1+b_2(y^*(t)+\sigma_1)}\right]\mathrm{d}t\right\}=$$

$$px(n\tau)\exp\left\{\int_0^\tau\left[r-\frac{r\nu}{k}-\frac{a(y^*(t)+\sigma_1)}{1+b_2(y^*(t)+\sigma_1)}\right]\mathrm{d}t\right\}=\rho x(n\tau)$$

所以对任意的 $h\in\mathbb{N}_+$，有

$$x((n_1+h)\tau)\geqslant x(n_1\tau)\rho^h$$

由条件(19)可知，当 h 足够大时，有

$$x((n_1+h)\tau)\geqslant\nu \tag{24}$$

矛盾产生，这样就证明了 $x(t)<\nu$ 对所有 $t\geqslant 0$ 不能恒成立.

根据以上论证，需要考虑以下两种情况：

(i) 存在 $\tau_3>0$，使得当 $t\geqslant\tau_3$ 时，$x(t)\geqslant\nu$ 恒成立. 在此情形下取 $m_2=\nu$ 即可得到定理2的证明.

(ii) 存在区间列 $\{[\alpha_l,\beta_l]\}$，当 $t\in\bigcup_{l=1}^{\infty}[\alpha_l,\beta_l]:=B$ 时，$x(t)\leqslant\nu$，当 $t\notin B$ 时，$x(t)>\nu$.

记 $[\alpha,\beta]$ 为区间列中任一取定的区间 $[\alpha_l,\beta_l]$. 下面只需证明存在 $m_2>0$，使得 $x(t)\geqslant m_2$，$t\in[\alpha,\beta]$.

假设 $\alpha\in[\mathrm{d}\tau,(d+1)\tau)$，$d$ 为某一正整数，并注意到由 $[\alpha,\beta]$ 的定义一定有 $x(\alpha^+)\geqslant p\nu$. 为方便讨论，记 $\overline{T}=(n_1+d+1)\tau$，其中 n_1 由(22)式所确定.

1) 首先假设 $\overline{T}<\beta$.

考虑系统

$$\begin{cases}x'=x\left(r-\dfrac{r\nu}{k}-\dfrac{aM}{1+b_2M}\right) & t\neq n\tau\\ x(n\tau^+)=px(n\tau)\end{cases} \tag{25}$$

记系统(25)满足初值条件 $x(\mathrm{d}\tau^+)=p\nu$ 的解为 $\hat{x}(t)$，并记 $\hat{x}(\overline{T})=\overline{x}$. 由脉冲微分系统的比较定理可知，当 $x\geqslant\alpha$ 时，$x(t)\geqslant\hat{x}(t)$.

如果条件

$$p\exp\left(\tau\left(r-\frac{r\nu}{k}-\frac{aM}{1+b_2M}\right)\right)=1 \tag{26}$$

成立，则系统(25)具有全局渐近稳定的周期解 $\hat{x}{}^*(t)$，易知当时间 t 充分大时，有

$$x(t)\geqslant\hat{x}(t)\geqslant\min_{t\in[0,\tau]}\frac{\hat{x}{}^*(t)}{2}$$

这种情况下，取 $m_2'=\min\limits_{t\in[0,\tau]}\dfrac{\hat{x}{}^*(t)}{2}$ 即可.

如果条件

$$p\exp\left(\tau\left(r-\frac{r\nu}{k}-\frac{aM}{1+b_2M}\right)\right)>1 \tag{27}$$

成立，则 $\hat{x}(n\tau)$ 关于 n 是单调递增的，又由于 $0<p\leqslant 1$，由(27)式可知，

$$r-\frac{r\nu}{k}-\frac{aM}{1+b_2M}>0$$

则 $\hat{x}(t)$ 在 $(n\tau,(n+1)\tau]$ 上关于 t 是单调递增的，因此有

$$\min_{t\in[\alpha,\beta]}x(t)\geqslant\min_{t\in[\alpha,\beta]}\hat{x}(t)\geqslant\min_{t\in[\mathrm{d}\tau,\beta]}\hat{x}(t)=\hat{x}(\mathrm{d}\tau^+)=p\nu$$

这种情况下，取 $m_2'=p\nu$ 即可.

下面考虑

$$p\exp\left(\tau\left(r-\frac{r\omega}{k}-\frac{aM}{1+b_2M}\right)\right)<1 \tag{28}$$

的情况. 这时，$\hat{x}(n\tau)$ 关于 n 是单调递减的.

记 $y_5(t)$ 为系统(21)满足初值条件 $y_5((d+1)\tau^+)=M$ 的解，由系统(21)的周期性可知，当 $t>\overline{T}$ 时，有

$$y(t)<y_5(t)<y^*(t)+\sigma_1$$

记系统

$$\begin{cases} x' = x\left[r - \dfrac{r\nu}{k} - \dfrac{a(y^*(t)+\sigma_1)}{1+b_2(y^*(t)+\sigma_1)}\right] & t \neq n\tau \\ x(n\tau^+) = px(n\tau) \end{cases}$$

满足初值条件 $x(\overline{T}) = \overline{x}$ 的解为 $\widetilde{x}(t)$，类似于(24)式的证明，存在 $n_2 \in \mathbb{N}_+$，使得

$$x(\overline{T} + n_2\tau) \geqslant \nu \tag{29}$$

由脉冲微分系统的比较定理可知，在$[\overline{T}, \overline{T}+n_2\tau]$上，有 $x(t) \geqslant \widetilde{x}(t) \geqslant \nu$，由于在$[\overline{T}, \beta)$上，$x(t) < \nu$，所以 $\overline{T} + n_2\tau > \beta$. 综上可得：

$$\min_{t\in[\alpha,\beta]} x(t) \geqslant \min_{t\in[\alpha,\beta]} \hat{x}(t) \geqslant \min_{t\in[d\tau,\overline{T}+n_2\tau]} \hat{x}(t) \geqslant p\hat{x}(\overline{T}+n_2\tau)$$

其中 $\hat{x}(\overline{T})$，$\hat{x}(\overline{T}+n_2\tau)$ 分别为系统(25)满足条件 $\hat{x}(0^+) = p\nu$ 的解在$(n_1+1)\tau$ 以及$(n_1+n_2+1)\tau$ 处的值. 若取 n_1，n_2 分别为满足(22)式及(29)式的最小正整数，则它们与 α，β 无关. 故 $\hat{x}(\overline{T}+n_2\tau)$ 也与 α，β 无关. 取 $m_2' = p\hat{x}(\overline{T}+n_2\tau)$，则当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时，有 $x(t) \geqslant m_2'$. 因此也有 $x(t) \geqslant m_2'$，$t \in B$.

2) 假设 $\overline{T} > \beta$.

当条件(26)或条件(27)成立时，同样可以取 $m'' = \min\limits_{t\in[0,\tau]} \dfrac{\hat{x}^*(t)}{2}$ 或 $m'' = p\nu$. 当条件(28)成立时，有

$$\min_{t\in[\alpha,\beta]} x(t) \geqslant \min_{t\in[\alpha,\beta]} \hat{x}(t) \geqslant \min_{t\in[d\tau,\overline{T}]} \hat{x}(t) \geqslant p\hat{x}(\overline{T})$$

此时可取 $m_2'' = p\hat{x}(\overline{T})$. 类似地，$m_2''$ 与 α，β 无关，同理可得 $x(t) \geqslant m_2''$，$t \in B$.

最后，令 $m_2 = \min\{p\nu, m_2', m_2''\}$，定理得证.

参考文献：

[1] TERRY A J. Biocontrol in an Impulsive Predator-Prey Model [J]. Mathematical Biosciences，2014，256：102－115.

[2] MAILLERET L，GROGNARD F. Global Stability and Optimisation of a General Impulsive Biological Control Model [J]. Mathematical Biosciences，2009，221(2)：91－100.

[3] ZHANG S W，DONG L Z，CHEN L S. The Study of Predator-Prey System with Defensive Ability of Prey and Impulsive Perturbations on the Predator [J]. Chaos，Solitons and Fractals，2005，23(2)：631－643.

[4] NUNDLOLL S，MAILLERET L，GROGNARD F. Two Models of Interfering Predators in Impulsive Biological Control [J]. Journal of Biological Dynamics，2010，4(1)：102－114.

[5] TANG S Y，TANG G Y. Optimum Timing for Integrated Pest Management：Modelling Rates of Pesticide Application and Natural Enemy Releases [J]. Journal of Theoretical Biology，2010，264(2)：623－638.

[6] 唐三一，肖燕妮. 单种群生物动力系统 [M]. 北京：科学出版社，2008：310－323.

[7] 肖燕妮，周义仓，唐三一. 生物数学原理 [M]. 西安：西安交通大学出版社，2012：224－234.

[8] TANG S Y，CHEN L S. Modelling and Analysis of Integrated Pest Management Strategy [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems，2004，4(3)：759－768.

[9] HOLLING C S. The Function Response of Predators to Prey Density and Its Role in Mimicry and Population Regulation [J]. Mem Ent Canada，1965，97：3－60.

[10] 唐秋林，陈玉娟，李莉莉，等. 基于比率依赖的 Holling Ⅲ型 Leslie 捕食扩散模型的分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(3)：49－54.

[11] 张国洪，王小利，王稳地. 一个考虑扩散的 Holling-Tanner 捕食—食饵模型研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(3)：16－19.

[12] SEO G, DEANGELIS D L. A Predator-Prey Model with a Holling Type I Functional Response Including a Predator Mutual Interference [J]. Journal of Nonlinear Science, 2011, 21(6): 811－833.

[13] LAMONTAGNE Y, COUTU C, ROUSSEAU C. Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System with Generalised Holling Type III Functional Response [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2008, 20(3): 535－571.

[14] 张树文，陈兰荪. 具有脉冲效应和综合害虫控制的捕食系统 [J]. 系统科学与数学，2005，25(3)：264－275.

[15] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific Publishing, 1989: 85－97.

[16] BAINOV D, SIMEONOV P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications [M]. New York: Longman Scientific and Technical Press, 1993: 26－39.

Integrated Pest Management in an Impulsive Predator-prey System with B-D Functional Response

ZHANG Ai-jing, DOU Jia-wei, LI Jing

College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China

Abstract: In this paper, we study a kind of integrated pest management (IPM) problem in the predation system with pests and natural enemies. The system is described by a predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response and impulsive effect. In order to control the number of pests, we spray pesticides and release natural enemies in periodic pulse form. By applying the Floquet theory, we obtain the conditions to ensure the local asymptotic stability of the pest-eradication periodic solution. In addition, by comparison method, we study the global asymptotic stability of the periodic solution and the permanence of the system.

Key words: predator-prey model; B-D functional response; impulsive integrated pest management; pest-eradication solution; stability

责任编辑 张 枸